指数関数による磁化曲線の近似法

正 員 島 谷
正 員 藤 田

信 (富山技術短大)
宏 (富 山 大)

1. ま え が き

鉄心を含む非線形電気回路の特性は、鉄心の持つ磁氣的性質に著しく影響される。回路の設計や解析には鉄心の磁化特性を正確な数式で表現できると好都合である。しかし、磁性理論からこれを求めることが困難であるため、Fröhlich, Widger 氏らによる有理関数近似や、べき関数、指数関数、双曲線関数、フーリエ級数などで近似する方法が一般に用いられている。

磁化特性の近似式はその非線形性を明確に表わし、表現式と計算が簡単で、広い範囲にわたり近似誤差の小さいことが望ましい。上記の近似法はそれぞれの特長を持っているが、一般に次の問題点がある。

- (1) 近似範囲が目的によっては不十分である。
- (2) 低磁束密度部分の近似精度が悪い。
- (3) 磁気特性が方形化するに従い、近似誤差が増加する。
- (4) 近似式と材料の物理的特性との関係が明確でない。
- (5) 近似範囲と精度が不十分なため、動特性算定に使用しても良い結果を期待できない。

従来よく用いられる Fröhlich 氏の近似法⁽¹⁾は有名であるが、これは比較的高磁束密度部分の近似に適した方法である。広い範囲の近似法として、近年 Widger 氏の有理関数近似⁽²⁾、Macfadyen 氏らの指数関数近似の報告がある⁽³⁾⁽⁴⁾。後者は近似範囲と精度の点で優れた方法である。しかし、この方法も弱磁界の精度が十分でなく、広い用途を持つ方形特性材料の近似では顕著にこの欠点を現わし、近似式およびその作成も複雑である。

本論文は、Macfadyen 氏らの方法を修正して得た指数関数近似法により⁽⁵⁾、従来の問題点をほとんど解消できることを述べたものである。すなわち、磁化特性は簡単な基本式と 1~2 の補正項で表わされることを示し、更に市販電磁鋼体の磁化曲線を近似した統計結果から、近似式と材料の物理的性質との関係を明らかにしている。また、方形特性材料やリアクトルおよび発電機の特性近似例を挙げ、本法の近似法は従来の方法に比べて格段に高精度であることを示し、更に動特性算定に用い好結果を得ることを明らかにしている。

2. 磁化曲線の近似法

磁性体に関して次式が成り立つ。

$$B = \mu_0 H + J \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 B : 磁束密度 (T), μ_0 : 真空透磁率
 $4\pi \times 10^{-7}$ (H/m), H : 磁化力 (A/m), J : 磁
 化の強さ (T)

磁性鋼帯の磁化曲線は、磁化機構の回転磁化範囲で図 1 のように幾つかの磁化力区間が指数関数によって高精度に近似できる。図において

$$0 \leq H \leq H_1 \text{ で } B = K_1(1 - e^{-K_2 H}) \quad \dots (2)$$

$$H_1 < H \leq H_2 \text{ で } B = K_1'(1 - e^{-K_2'(H + dH_1)}) \quad \dots\dots\dots (3)$$

図 1 指数関数による磁化曲線近似と範囲

Fig. 1. Approximation and bound of the magnetization curve by exponential series.

Approximation of magnetization curves by Exponential Series.
 By Nobu Shimatani, Member (Toyama College of Technology)
 & Hiroshi Fujita, Member (Faculty of Engineering, Toyama University).

島谷 信: 正員, 富山県立技術短期大学
 藤田 宏: 正員, 富山大学工学部電気工学科

図 2 補正曲線

Fig. 2. Correction curve.

$$H_2 \leq H \leq H_3 \text{ で } B = K_1''(1 - e^{-K_2''(H + \Delta h_2)}) \quad (4)$$

ただし, $K_1, K_1', K_1'', K_2, K_2', K_2''$: 定数

H_2, H_3 は H_1 の 5, 10 倍程度であり, 近似の相対誤差は (2) 式の範囲で図の斜線部分を除き 10^{-3} , (3), (4) 式の範囲で 10^{-4} 程度である。

(2) 式により, 相対誤差 0.5% 以内に近似できる磁束密度の上限値 B_1 は表 2 の値である。これは一般の機器が動作する最大磁束密度に近い値である。また, 鉄心継ぎ目などの空けきを持つ磁気回路では上限値 B_1 が増加するから, 実用面では (2) 式と図 1 に示した斜線部分の補正, および (1) 式の $\mu_0 H$ を考慮すれば十分であると考えられる。

磁化機構上の不連続磁化範囲に属する斜線部分の補正值は, 各磁化力に対する磁束密度の測定値と (2) 式による計算値との差であり, 図 2 は補正曲線である。この曲線は重極二次遅れ系のインパルス応答の形に近く, Macfadyen 氏らはこの部分を $K_1 H \cdot \exp(-K_2 H)$ で近似している。しかし, 補正曲線の形は材料の性質によって異なり, 方形特性のものでは鋭い形となるため, 特性の方形化と共に近似誤差が増大する。

著者らはこの部分の精度の向上に Macfadyen 氏らの方法を修正して得た (5) 式による結果, 各種の補正曲線に対して, 極めて良い対応を示した。Macfadyen 氏らの補正は同式で $m=1$ に該当している。

$$\Delta b = K_3 H e^{-K_4 H^m} \quad (5)$$

ただし, Δb : 磁束密度の補正值, K_3, K_4, m : 定数

以上から, 磁化曲線を次式で近似する。

$$B = K_1(1 - e^{-K_2 H}) - K_3 H e^{-K_4 H^m} + \mu_0 H \quad (6)$$

上式に用いる定数は次のように簡単に決定できる。第 1 項の K_1, K_2 はごく一般的な方法によって求まるから, これを計算例で示す。 K_3, K_4, m は (5) 式を H について微分し, 条件 $d\Delta b/dH|_{H=0} = \tan \theta$, $d\Delta b/dH|_{H=h_0} = 0$, $H=h_0$ のとき $\Delta b = \Delta b_0$ を考慮して

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \tan \theta \\ K_4 &= 1/(m h_0^m) \\ m &= 1/\ln(K_3 h_0/\Delta b_0) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ただし, θ : 補正曲線の原点における接線と H 軸との成す角, h_0 : 補正最大値 Δb_0 の磁化力

更に, 次の方法によっても定数を決定できる。(5) 式両辺の対数を取り $\ln K_3 = k_3$, $\ln H = x$, $H^m = e^{mx}$, $\ln \Delta b = y$ とおけば

$$k_3 + x - K_4 e^{mx} = y \quad (8)$$

いま, n 個の補正点を考え, i 番目の $H_i, \Delta b_i$ から $\ln H_i = x_i, \ln \Delta b_i = y_i$, また (8) 式で $x = x_i$ とした y の値を $\bar{y}_i$ とし, $\rho_i = y_i - \bar{y}_i$ を用いて補正点を表わせば次の残差方程式を得る。

$$k_3 + x_i - K_4 e^{mx_i} = y_i - \rho_i \quad (9)$$

(9) 式に次の $\Sigma \rho_i^2$ 最小条件を適用し (10) 式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \Sigma \frac{\partial \rho_i}{\partial k_3} \rho_i &= 0, \quad \Sigma \frac{\partial \rho_i}{\partial K_4} \rho_i = 0, \quad \Sigma \frac{\partial \rho_i}{\partial m} \rho_i = 0 \\ K_4 \Sigma e^{mx_i} - k_3 \Sigma 1 + \Sigma (y_i - x_i) &= 0 \\ K_4 \Sigma e^{2mx_i} - k_3 \Sigma e^{mx_i} + \Sigma (y_i - x_i) e^{mx_i} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (10)$$

(10) 式から

$$\left. \begin{aligned} k_3 &= \frac{\Sigma e^{2mx_i} \Sigma (y_i - x_i) - \Sigma e^{mx_i} \Sigma (y_i - x_i) e^{mx_i}}{(\Sigma e^{mx_i})^2 - n \Sigma e^{2mx_i}} \\ K_3 &= e^{k_3} \\ K_4 &= \frac{n \Sigma (y_i - x_i) e^{mx_i} - \Sigma e^{mx_i} \Sigma (y_i - x_i)}{(\Sigma e^{mx_i})^2 - n \Sigma e^{2mx_i}} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

(11) 式において m をパラメータとし, $\Sigma \rho_i^2$ を最小にする m の値から, 定数 K_3, K_4 が求まる。

(7) 式および (11) 式から求める定数値は, 表 1 のように良く一致する。また, この手法によって直流および交流発電機の無負荷特性を次のように近似できる。

$$E = K_1(1 - e^{-K_2 i_f}) - K_3 i_f e^{-K_4 i_f^m} + E_r \quad (12)$$

ただし, E : 発電機の誘起起電力 (V), i_f : 励磁電流 (A), E_r : 残留磁気による起電力 (V)

表 1 (7) 式および (11) 式による計算結果の比較
Table 1. Comparison between the calculated results by Eqs. (7) and (11).

種別 定数値	電磁鋼帯の磁化曲線の例		発電機の無負荷特性の例	
	(7) 式による	(11) 式による	(7) 式による	(11) 式による
K_3	9.700×10^{-3}	9.620×10^{-3}	2.640	2.648
K_4	3.607×10^{-3}	3.644×10^{-3}	1.722×10^{-3}	1.626×10^{-3}
m	2.557	2.550	1.898	1.900

3. 近似範囲と精度

本法の近似は(6)式第1項を基本とするから、近似範囲は第1項によりほぼ決まる。第1項により、実用精度上十分と考えられる相対誤差 0.5% 以内の近似範囲を、市販電磁鋼帯の直流磁化曲線 (JIS により測定された製造会社の技術資料⁽⁶⁾) について調査した結果、図3を得た。同図は最大誘磁率を生じる磁化力を $H_{\mu m}$ としたとき、0.5% 以内の誤差で近似できる磁化力範囲を $H_{\mu m}$ の倍率で示したもので、斜線部分はその該当範囲である。同図より約 1.5 $H_{\mu m}$ の磁化力から、その範囲に入ることがわかる。

次に、近似誤差が 0.5% になる磁化力の最大値は図からわかるが、この磁化力に対する磁束密度は表2の値である。表には交流磁化曲線(励磁実効電流曲線⁽⁶⁾)および機器の特性近似結果などについても記載した。空けきがある磁気回路では、空けきに要する起磁力のため磁化曲線の変化が緩和される結果、(6)式第1項による近似の上限値は増加する。変圧器では、鉄心継ぎ目の空けきに励磁アンペア回数増加分として、普通

図3 市販電磁鋼帯の(6)式第1項の近似範囲
Fig. 3. Approximation bound by first term of formula Eq. (6) at marketing steel.

表2 (6)式第1項による相対誤差 0.5% の上限値
Table 2. Upper bound with 0.5% relative error by first term of Eq. (6).

空けき	磁化特性	方向性	上限磁束密度 (T)
なし	直流磁化曲線	無方向	1.22~1.51
		方向性	1.44~1.65
	交流磁化曲線 (励磁実効電流曲線)	無方向	1.37~1.59
		方向性	1.68~1.78
あり	変圧器鉄心(直流)	無方向	上記より 2~5% 増
		方向性	上記より 1.5~3% 増
	電磁石(直流) 直流発電機無負荷 交流発電機無負荷	炭素鋼	1.76 定格のときの 150% 定格のときの 150%

10~20% が見込まれる⁽⁷⁾。表2の値は、この分として 10% の増加を見込んだものである。直流電磁石には鉄心接触部の空けき、残留磁気による吸引力軽減用の残留空けきが設けられている。表2の値は直流電磁石に用いる構造用炭素鋼 (SS 41) を断面積 300 mm²、平均磁路長さ 210 mm の環状鉄心に加工し、0.5 mm の空けきを設けたモデルについてのもので、空けきを設けない場合の上限値は 1.53 T である。直流、交流発電機の数値は、出力 1 kW~500 MW 各数機種の特徴を近似した結果を示したものである。

本法の(6)式第1項の結果に、第2項の低磁束密度部分の補正を行なえば、補正部分は初磁化率範囲を除き、高誘磁率材料の場合でも 1~1.5% の誤差で近似できる。この場合、数十~数百% の誤差を生じる従来の近似法に比べ、格段に精度が向上する。また、第3項 $\mu_0 H$ 補正は磁化力 $H > 10^3$ A/m の範囲で有効である。次に、(6)式第3項の外部磁界による $\mu_0 H$ 補正を行ない、第2項の適用を工夫することにより、飽和磁束密度に近い 2.0 T 付近まで近似範囲を拡大できる。この詳細は〈5.4〉節において述べる。

4. 市販電磁鋼帯の物理的性質と近似の定数値

市販電磁鋼帯の直流磁化曲線を(6)式で近似し、統計的に整理した結果、定数 K_1, K_2, K_3, K_4, m の値は材料の最大誘磁率および硬度と密接な関係を示した。

電磁鋼帯では、Si 含有率が増えると磁気異方性定数が減少し⁽⁸⁾⁽⁹⁾、最大誘磁率 $\mu_{\max}$ は Si 含有率 3% 前後までは一定の割合で増加する⁽⁸⁾。定数 K_2, K_3 の値は磁化曲線の立上り度合いと関連するから、 $\mu_{\max}$ が増加すれば K_2, K_3 も増加することが考えられる。市販品の $\mu_{\max}$ と近似結果から得た K_2, K_3 との関係は図4および図5となり、両者はほぼ比例している。すなわち

図4 方向性材料の K_2, K_3
Fig. 4. K_2, K_3 in case of oriented core.

図5 無方向性材料の K_2, K_3 Fig. 5. K_2, K_3 in case of non-oriented core. 図6 ハイライト, ホームコアの K_1 , 抵抗率 ρ および飽和磁化 J_s と硬度Fig. 6. K_1 , specific resistance ρ and saturation magnetization J_s versus hardness in case of HILITE and HOME cores.方向性電磁鋼帯では, a_1, a_2 を定数として

$$K_2 = a_1 \mu_{\max}, K_3 = a_2 \mu_{\max} \quad (13)$$

無方向性電磁鋼帯では, a_3, a_4, b を定数として

$$K_2 = a_3 \mu_{\max}, K_3 = a_4 \mu_{\max} + b \quad (14)$$

ここで, 異方性定数と $\mu_{\max}$ は密接な関係にあるが, 本法近似の定数 K_2, K_3 は $\mu_{\max}$ との比例関係から考えて, 異方性定数と密接な関係にあると思われる。

次に, 定数 K_1 の値は材料の方向性の有無や種類で異なるが, 硬度と密接に関係する。電磁鋼帯は 800°C 以上の焼きなまし温度で製造される⁽⁹⁾。この温度条件では鋼帯の硬度は Si 含有率にはほぼ比例して増加し⁽⁹⁾ Si 含有率の増加は抵抗率を増し, 飽和磁束密度を低下させる^{(8)~(10)}。種々の Si 含有率を持つ無方向性電磁鋼帯の硬度と K_1 の関係について一例を示すと図6となり, 材料の飽和磁化の強さと本法近似の飽和値 K_1 とは硬度に関して類似した関係を持つ。この傾向は他の市販品について算定した結果についても同じである。また, 補正曲線の減衰度合いを示す定数 K_4, m

図7 電磁鋼帯の K_4, m Fig. 7. K_4, m in case of electromagnetic steels.

と $\mu_{\max}$ との関係は, 材料の方向性の有無により著しく異なる。図7はその代表的な例であり, 無方向性電磁鋼帯では K_4 と $\mu_{\max}$ は放物線, 方向性電磁鋼帯では双曲線の関係となり, m は $\mu_{\max}$ と直線関係にある。これらの関係は例以外の市販品でも同じ傾向を持つ。

5. 数値計算例

本法による近似と Fröhlich 氏および Macfadyen 氏らの近似法による結果を比較する。

〈5.1〉 磁化曲線の近似

資料: RG-9 (0.3mm) 方向性冷間圧延電磁鋼帯⁽⁶⁾

資料の直流磁化曲線から $H_{\mu m}$ は 13.8 A/m である。

$H_{\mu m}$ の約 1.5 倍の磁化力 $H_1 = 20$ A/m と $H_2 = 2H_1 = 40$ A/m に対する磁束密度 $B_1 = 1.263$ T, $B_2 = 1.513$ T から, 定数 K_1 は

$$K_1 = \frac{B_1^2}{2B_1 - B_2} = \frac{1.263^2}{2 \times 1.263 - 1.513} = 1.575$$

次に, $B = f(H)$ とし, $K_1 - f(H)$ を片対数方眼紙上にプロットして図8を得る。直線部分の傾斜から

$$K_2 = 2.303 / 28.43 = 0.08101$$

従って, (6)式第1式は次のように表わされる。

$$K_1(1 - e^{-K_2 H}) = 1.575(1 - e^{-8.101 \times 10^{-2} H}) \quad (15)$$

本法では K_1 の値が近似精度を支配するから, 図8で直線部分が十分に得られる K_1 を選ぶ。このとき直線部分の該当磁化範囲は近似誤差 0.2% 以内である。

(15)式による算定値と測定値との差から, 図9の補正曲線を得る。図から $\Delta b_0 = 0.4100$, $h_0 = 6.250$, $\tan \theta = 0.09700$ 。この数値を(7)式に代入して

$$\left. \begin{aligned} K_3 &= \tan \theta = 0.09700 \\ m &= 1 / \ln(0.09700 \times 6.250 / 0.4100) = 2.557 \\ K_4 &= 1 / (2.557 \times 6.250^{2.557}) = 0.003607 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

図 8 RG-9 コアの K_2 算定図

Fig. 8. Evaluation diagram for K_2 of RG-9 core.

図 9 RG-9 コアの補正曲線

Fig. 9. Correction curve for RG-9 core.

(15), (16)式より本法の近似式は次式となる。

$$B = 1.575(1 - e^{-8.101 \times 10^{-2} H}) - 9.700 \times 10^{-2} H e^{-3.607 \times 10^{-3} H^2.557} \quad (17)$$

次に, Macfadyen 氏らの近似式を一般形で示すと

$$B = \sum_{k=1}^n K_{2k-1} (1 - e^{-K_{2k} H}) - K_{2n+1} H e^{-K_{2n+2} H} + \mu_0 H \quad (n=1, 2, 3, \dots)$$

いま, $\mu_0 H$ を省略し, Newton 法により磁化力 100 A/m まで $n=2$ として近似計算を行ない次式を得る。

$$B = 0.4188(1 - e^{-0.02080H}) + 1.282(1 - e^{-0.1609H}) - 0.2958 H e^{-0.1971H} \quad (18)$$

一方, Fröhlich 氏による近似式は

$$B = 1.760 H / (6.600 + H) \quad (19)$$

以上, (17)~(19)式の算定結果および各近似法の誤差を示すと図 10 となり, 本法による近似は他の二法

図 10 RG-9 コアの直流磁化曲線と各近似法の誤差

Fig. 10. DC magnetization curve of RG-9 core and error of each approximation method.

図 11 Z8H コアの交流磁化曲線

Fig. 11. AC magnetization curve of Z8H core.

に比べ, 弱磁界の近似精度が極めて高いことがわかる。

図 11 は, 方向性電磁鋼帯 Z8H の交流磁化曲線⁽⁶⁾を同じ手法によって近似した結果を示し, 本法の近似誤差は 1.780 T の磁束密度まで 0.5% 以内である。

〈5・2〉統計資料を用いる磁化曲線の近似式

第 4 章において, 近似の定数値が材料の $\mu_{\max}$ および硬度と密接な関係にあることを述べた。その関係図は, 市販電磁鋼帯の種別ごとに描くことができる。従って, 材料の種別, $\mu_{\max}$, 硬度が与えられれば関係図から定数値を推定でき, 容易に近似式を作成できる。

いま, $\mu_{\max} = 0.011 \text{ H/m}$, マイクロビッカース硬度 = 184 のハイライトコア H12(0.35mm)⁽⁶⁾の近似式を推定する。図 5, 図 6, 図 7(a) から, 定数 K_1, K_2, K_3, K_4, m の値を読み取り, 次の近似式を得る。

$$B = 1.278(1 - e^{-0.0137H}) - 0.0134 H e^{-0.00340 H^{1.68}} \quad (20)$$

(20)式の計算結果と, 他の二法による近似結果を図

図 12 統計資料による近似(ハイライト H12 コア)

Fig. 12. Approximation using statistic data (HILITE H 12 core).

12 に示す。(20)式による相対近似誤差は、磁化力 80 A/m まで 1.5%，それ以上 230 A/m までは 0.5% 以内であり、この範囲では他の二法と比べ非常に高精度である。また、定数を計算で求めた結果と比較しても大差がない。計算で求めた定数値は $K_1=1.280$, $K_2=0.01370$, $K_3=0.01345$, $K_4=0.003400$, $m=1.660$ である。

〈5・3〉 発電機の無負荷特性曲線の近似

供試機：2,900kVA, 400V, 4, 186A, 180Hz, 3,600 rpm, 励磁用三相同期発電機 測定値を前と同様に処理し、無負荷特性を(12)式で表わせば次の近似式を得る。

$$E = 8.644 \times 10^2 (1 - e^{-1.100 \times 10^{-2} i_f}) - 2.648 i_f e^{-1.726 \times 10^{-2} i_f^{1.900}} + 10 \dots (21)$$

一方、Fröhlich 氏の近似式は

$$E = 1.305 \times 10^3 i_f / (1.266 \times 10^2 + i_f) + 10 \dots (22)$$

(21), (22) 式による計算結果と測定値との相対近似誤差を表 3 に、近似曲線を図 13 に示す。この種の近似では、定格電圧の 150% 程度まで高精度である。

〈5・4〉 本法による高磁束密度範囲までの近似法

供試機：図 14 の磁化特性を持つ可飽和リアクトル

図 14 の直流磁化曲線より $B-\mu_0 H$ を求め、固有磁化曲線を描く。この曲線で、近似しようとする最高磁束密度 B_2 とその磁化力を H_2 , $H_1=H_2/2$ の磁束密度を B_1 として定数 K_1 を求める。本例では $H_1=4 \times 10^3$ A/m, $B_1=1.933$ T, $H_2=8 \times 10^3$ A/m, $B_2=2.012$ T。これより

$$K_1 = \frac{B_1^2}{2B_1 - B_2} = \frac{1.933^2}{2 \times 1.933 - 2.012} = 2.015$$

K_1 の値から、〈5・1〉節と同様に $K_1-f(H)$ を求め図 15 を得る。図の $K_1-f(0)$ の点 P から $K_1-f(H)$

表 3 測定値と計算値の比較

Table 3. Comparison of the experimental results with calculated results.

励磁電流 i_f (A)	測定値 E (V)	本法計算値 E (V)	相対誤差 (%)	
			本 法	Fröhlich
0	10.0	10.0	0.00	0.00
10	76.5	76.9	0.59	37.95
20	150.0	149.0	0.67	25.36
30	227.5	226.7	0.35	14.29
40	302.0	302.0	0.00	7.06
50	368.0	368.5	0.14	3.12
60	424.5	425.1	0.14	1.20
70	474.0	473.4	0.13	0.14
80	515.5	515.7	0.15	0.23
90	554.0	553.2	0.15	0.32
100	586.0	586.7	0.12	0.02

図 13 2,900kVA 同期発電機の無負荷特性

Fig. 13. No-load characteristic curve of 2,900kVA synchronous generator.

図 14 リアクトル鉄心の磁化曲線と近似誤差

Fig. 14. Magnetization curve of reactor core and approximation error.

図 15 リアクトル鉄心の K_2 算定図Fig. 15. Evaluation diagram for K_2 of reactor core.

に接線 PQ を引き、直線 PQ の傾きから定数 K_2 を求める。

$$K_2 = 2.303 / (3.644 \times 10^3) = 6.320 \times 10^{-4}$$

K_1 , K_2 の値から、 Q 点までの磁化力範囲を (6) 式第 1 項で近似し、不足分を補正に関して対応性の良い (5) 式で補正する。近似精度を保証できる範囲は PQ の磁化力区間であるが、高磁束密度部分の固有磁化曲線の変化は緩やかなため、 Q 点の磁化力と H_2 とが多少不一致の場合でも、 H_2 における近似誤差は僅少である。

次に、図 14 の補正曲線から $K_3 = 8.250 \times 10^{-3}$, $\Delta b_0 = 9.850 \times 10^{-1}$, $h_0 = 5.100 \times 10^2$ を得る。従って、(7) 式により $m = 6.887 \times 10^{-1}$, $K_4 = 1.983 \times 10^{-2}$ である。

以上の結果から、(6) 式第 2 項を正とする補正を行ない、高磁束密度範囲までの近似を次式で表わす。

$$B = 2.015(1 - e^{-6.320 \times 10^{-4} H}) + 8.250 \times 10^{-3} H e^{-1.983 \times 10^{-2} H^{0.887 \times 10^{-1}}} + 4\pi \times 10^{-7} H \quad (23)$$

(23) 式の近似誤差は図 14 のように弱磁界のごく一部を除き、磁束密度 2.0 T まで 0.6% 未満である。

6. 動特性への応用

鉄心を含む回路の過渡特性算定には、磁化特性の近似精度は重要である。しかし、特にこれに関する報告はない。ここでは、本法の近似および Fröhlich 氏の近似結果を用いた動特性算定例について比較する。

〈6.1〉 鉄心を含む電気回路のステップ応答

供試モデル: C 形カットコア (断面 15×20 mm, 磁路の平均長さ 210 mm) の両脚に 1,000 回の巻線を施

図 16 リアクトルの電流レスポンス

Fig. 16. Current response of the reactor.

したリアクトル 測定の結果、漏れ磁束は無視できるほど小さいので、磁化特性を次式で表わす。

$$\phi = f(i) = K_1(1 - e^{-K_2 i}) - K_3 i e^{-K_4 i^m} \quad (24)$$

ただし、 ϕ : 鉄心の磁束 (Wb), i : 回路電流 (A)

リアクトルに直流電圧 E (V) を印加し、鉄心中のうず電流を無視すると

$$E = Ri + N \frac{df(i)}{dt} \quad (25)$$

ただし、 R : 回路抵抗 (Ω), N : コイルの巻数 (24), (25) 式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{dt}{di} &= \frac{N f'(i)}{E - Ri} \\ f'(i) &= K_1 K_2 e^{-K_2 i} - K_3 e^{-K_4 i^m} (1 - m K_4 i^{m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (26)$$

(26) 式で初期条件 $t=0$, $i=0$ として数値計算を行なった i と t の関係を図 16 に示す。計算値と測定値はほぼ一致する。異なる部分は積層鉄心中のうず電流による磁束の位相ずれに起因する。これは磁束の測定結果から明らかである。Fröhlich 氏の方法では、測定値との差が大きく現われる。計算に用いた定数値は $K_1 = 5.02 \times 10^{-4}$, $K_2 = 6.27 \times 10^{-4}$, $K_3 = 2.50 \times 10^{-2}$, $K_4 = 5.53 \times 10^2$, $m = 1.09$, $E = 4.44 \times 10^{-1}$, $R = 8.88$ で、測定はその都度鉄心を消磁して行なったものである。

〈6.2〉 直流分巻発電機の自己励磁

供試機: 2kW, 100V, 4極, 1,800rpm, 補極付直流分巻発電機 供試機の無負荷飽和曲線を次式で近似する。

$$E = f(i_f) = K_1(1 - e^{-K_2 i_f}) - K_3 i_f e^{-K_4 i_f^m} + E_r \quad (27)$$

界磁回路の電圧方程式は

図 17 直流分巻発電機の自己励磁特性

Fig. 17. Characteristic of self-excitation in DC shunt generator.

$$E = R_f i_f + N_f (d\phi_f / dt) \quad (28)$$

ただし、 R_f : 界磁回路の抵抗 (Ω), N_f : 界磁コイルの全巻数, ϕ_f : 主極毎極の発生磁束 (Wb)

励磁電流 i_f の値は小さいから、電機子回路の抵抗降下、インダクタンス降下および電機子反作用の影響を無視すると、誘起起電力 E_0 は回転数一定のとき

$$E_0 = E = K_0 \phi_0 \quad (29)$$

ただし、 K_0 : 定数, ϕ_0 : 主極毎極の有効磁束 (Wb)

次に、主極界磁の漏れ係数 σ を考えると

$$\phi_f = \sigma \phi_0 \quad (30)$$

(28)~(30)式より

$$E = R_f i_f + \frac{\sigma N_f dE}{K_0 dt} \quad (31)$$

(27), (31)式より

$$\left. \begin{aligned} \frac{di_f}{dt} &= \frac{K_0}{\sigma N_f} \frac{f(i_f) - R_f i_f}{f'(i_f)} \\ f'(i_f) &= K_1 K_2 e^{-K_3 i_f} \\ &\quad - K_3 e^{-K_4 i_f^m} (1 - m K_4 i_f^{m-1}) \end{aligned} \right\} \quad (32)$$

上式に初期条件 $t=0$ で $i_f=0$ を考慮して数値計算を行なえば i_f と t , (27)式から E と t の関係が求まる。

図 17 は電圧確立の時間経過を各界磁抵抗について示したもので、計算値は測定値と良く一致する。

自己励磁による電圧の上昇率は、無負荷飽和曲線と界磁抵抗線との差、すなわち(28)式右辺第2項の大きさに比例する⁽¹¹⁾。Fröhlich 氏の近似法では(28)式右辺第2項が大きくなるため、電圧の確立時間が実測値と比べ非常に短くなる。また、確立する電圧値は無負荷飽和曲線の飽和部分で動作させる場合を除き過大になる。従って、図 17 が示すように自己励磁現象の解

析には不適当である。

ここで、計算に用いた供試機の数値は $K_1=1.705 \times 10^2$, $K_2=1.173$, $K_3=7.600 \times 10$, $K_4=5.970$, $K_0=3.600 \times 10^4$, $m=1.420$, $N_f=4.2 \times 10^3$, $\sigma=1.250$, $E_r=4.700$ である。

7. む す び

本論文は、従来の近似法の欠点である弱磁界低磁束密度部分の近似精度を格段に改善し、実用の磁化範囲全般を高精度に近似する方法を提案した。また、これまでに触れられなかった材料の性質との関係を検討し、本法は材料の持つ物理的性質と密接な関係にあることを明らかにした。

なお、本法の特徴を要約すれば次のとおりである。

- (1) 近似式の表現と計算手法が簡単である。
- (2) 実用範囲では、どの近似法よりも近似精度が高く、特に高透磁率材料で特徴が現われる。
- (3) 近似式中の定数は材料の磁気異方性の有無、製造法などに関係し、材料の最大透磁率や硬度と密接な相関関係を持つ。
- (4) 機器の磁化特性の近似にそのまま利用でき、近似範囲および精度は十分である。
- (5) 動特性の算定に用いて良好な結果が得られる。

終わりに、本研究に種々の資料を提供いただいた新日本製鉄技術サービス部 井上昌平氏、ならびに東京芝浦電気、北陸電力の関係各位に深く感謝します。

(昭和 55 年 6 月 16 日受付, 同 56 年 4 月 24 日再受付)

文 献

- (1) 電気学会編: 電気磁気学, p.246 (昭 42-5)
- (2) G. F. T. Widger: "Representation of magnetisation curves over extensive range by rational fraction approximations", *Proc. Instn. Elect. Engrs*, **116**, 156 (1969)
- (3) W. K. Macfadyen, R. R. S. Simpson, R. D. Slater & W. S. Wood: "Representation of magnetisation curves by exponential series", *ibid.*, **120**, 902 (1973)
- (4) J. Früchtenicht: "Analytische Beschreibung von Magnetisierungs-Kennlinien bei harmonischer Erregung", *Electrotech. Z. (ETZ-A)*, **99**, 671 (1978)
- (5) 島谷・藤本: 「指数関数による磁化曲線及び発電機の無負荷特性曲線近似」, 昭 50 電気学会大会, p. 679
- (6) 例えば, 新日本製鉄 SC 502, 503 (昭 46-6), 川崎製鉄 A (F) (昭 46-6), 400130-1 (F) (1965), 八幡製鉄 ORIENT COR (1958), HILITE COR (1962), 熱延珪素鋼板 (1959, 1962)
- (7) 磯部・竹内: 電気機器設計学, p. 254, 276 (昭 41) オーム社
- (8) 近角: 強磁性体の物理, p. 111, 313 (昭 33) 裳華房
- (9) 田口: 電磁鋼板, p. 4, 26, 41, 47 (昭 54) 新日本製鉄
- (10) 電気学会編: 電気工学ハンドブック, p. 397 (昭 42)
- (11) 野中: 電気機器(1), p. 135 (昭 46) 森北出版