電荷分布のある二次元異方性媒質の 等方化写像

正 員 寺 門 龍 一 (茨城大)

非会員 大 越 春 喜 (茨城大)

1. ま え が き

二次元異方性媒質の問題を等方性媒質に変換して考える手法は、等方性媒質に対する従来の種々の計算法が適用可能となるところから、応用性の広いものである。この等方化にもいろいろの考え方がある^{(1)~(6)}、それぞれに特徴を有するが、距離係数の概念を導入した等方化写像法⁽⁷⁾は最も用いやすい方法の一つである。

しかしこれまでの方法は、考える領域中においては $\text{div } \mathbf{D} = 0$ を前提としており、等方化後の媒質中ではラプラスの方程式が成立する場合に限られていた。電磁気学的興味から言えば、等方化後の媒質中でポアソンの方程式が成立するような場の問題も欠かすことはできない。異方性に対する認識の高まりつつあることを考えれば、この種の問題に解を与えておくことは将来有用であると推測できる。

その考えによって、本論文では電荷分布を有する二次元異方性媒質にも適用できる等方化写像の方法を提案する。この方法は、対称テンソルを持つ異方性媒質の等方化写像法をテンソル解析の立場から見ることによって、その適用範囲の拡張が図られたものであって、従来の等方化写像法をも包含するものである。

2. 等方化写像と座標変換

図1(a)のように、テンソル主軸を z 平面の x, y 座標軸に対して角 γ だけ回転した形で表現した誘電率テンソル

Isotropic Mapping for Two-Dimensional Anisotropic Medium with Charge Distribution. By Ryuiti Terakado, Member & Haruki Ogoshi, Non-member (Faculty of Engineering, Ibaraki University).

寺門龍一：正員，茨城大学工学部電気工学科

大越春喜：非会員，茨城大学大学院電気工学専攻〔現在，古河電気工業(株)〕

図 1 座標変換と写像

Fig. 1. Transformation of coordinate and mapping.

$$\epsilon_z = \begin{bmatrix} \epsilon_{\parallel} \cos^2 \gamma + \epsilon_{\perp} \sin^2 \gamma & (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \sin \gamma \cos \gamma \\ (\epsilon_{\parallel} - \epsilon_{\perp}) \sin \gamma \cos \gamma & \epsilon_{\parallel} \sin^2 \gamma + \epsilon_{\perp} \cos^2 \gamma \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (1)$$

の等方化は文献(7)の(23)式で実現され、その際等方化された図1(b)の w 平面の誘電率は $\sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}}$ となる。ここに、その変換行列を再記する。この写像は角の記号 α, β, δ が次の意味を持つように定められたものである。

伸縮率不変の方向： z 平面の x 軸と角 β をなす方向の長さは写像によって不変である。

両平面の基準の方向： z 平面の x 軸と角 α をなす方向が、 w 平面の u 軸と角 δ をなす方向に写像される。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \left. \begin{aligned} a &= \{ \epsilon_{\parallel} \sin \gamma \sin(\gamma - \alpha) \\ &\quad + \epsilon_{\perp} \cos \gamma \cos(\gamma - \alpha) \} \cos \delta \\ &\quad + \sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}} \sin \alpha \sin \delta / \sqrt{AB} \\ b &= \{ \epsilon_{\parallel} \cos \gamma \sin(\alpha - \gamma) \\ &\quad + \epsilon_{\perp} \sin \gamma \cos(\alpha - \gamma) \} \cos \delta \\ &\quad - \sqrt{\epsilon_{\parallel} \epsilon_{\perp}} \cos \alpha \sin \delta / \sqrt{AB} \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

$$\begin{aligned}
 c &= [\{\varepsilon_{\parallel} \sin \gamma \sin (\gamma - \alpha) \\
 &\quad + \varepsilon_{\perp} \cos \gamma \cos (\gamma - \alpha)\} \sin \delta \\
 &\quad - \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \sin \alpha \cos \delta] / \sqrt{AB} \\
 d &= [\{\varepsilon_{\parallel} \cos \gamma \sin (\alpha - \gamma) \\
 &\quad + \varepsilon_{\perp} \sin \gamma \cos (\alpha - \gamma)\} \sin \delta \\
 &\quad + \sqrt{\varepsilon_{\parallel} \varepsilon_{\perp}} \cos \alpha \cos \delta] / \sqrt{AB} \\
 A &= \varepsilon_{\parallel} \sin^2 (\alpha - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \cos^2 (\alpha - \gamma) \\
 B &= \varepsilon_{\parallel} \sin^2 (\beta - \gamma) + \varepsilon_{\perp} \cos^2 (\beta - \gamma)
 \end{aligned}$$

いま、同式に $\alpha = \gamma, \beta = \gamma, \delta = 0$ を代入すると、写像行列は

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma \\ -\sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} \sin \gamma & \sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}} \cos \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

となる。この行列は、単位ベクトルを基底とする直交 Oxy 座標系を 1 および $\sqrt{\varepsilon_{\parallel} / \varepsilon_{\perp}}$ を基底とする図 1(a) のような直交 Ouv 座標系に変換する変換行列と全く同じである。このように等方位写像は座標変換と同一であるように見えるが、次のような本質的差異をも有する。

等方位写像された同図(b) w 平面的単位ベクトルを基底とする直交 Ouv 座標系と(a)図の Ouv 座標系とで、対応する点の座標 (u, v) の値は当然同じである。しかし、ベクトル場として傾きや回転を考えてみれば、(a)図と(b)図の Ouv 座標系では著しい違いのあることがわかる。この点に留意すれば、座標変換の立場で等方位写像を見ることはテンソル解析の手法を活用できる点で有利である。

以後、図 1(a) の Oxy 座標系を原座標系、同図の Ouv 座標系を変換座標系、(b)図の Ouv 座標系を写像座標系と呼ぶ。

3. 拡張された等方位写像法

異方性媒質を等方性媒質に変換するにあたっては、異方性媒質に定められた原座標系も、変換後の等方位された媒質における写像座標系も、いずれも曲線座標系や斜交座標系である必要はない。それらはともに単位ベクトルを基底とする直交座標系であることが望ましい。しかし前述のように、等方位のためには変換座標系における基底は単位ベクトルとはならない。よって、原座標系および写像座標系はいずれも直交座標系で単位ベクトルを基底に持つものとし、変換座標系は任意の基底を持つ斜交座標系であるとする。

図 2(a) のように、原座標系の基底は単位ベクトル e_1, e_2 であり、変換座標系の基底は t_1, t_2 でその方向は同図の θ, φ によって与えられるとする。この基本

図 2 原座標系、変換座標系、写像座標系

Fig. 2. Three coordinate systems: original, transformation and mapping.

テンソル行列は (付録参照)。

$$[g_{ij}] = \begin{bmatrix} t_1^2 & t_1 t_2 \sin (\theta - \varphi) \\ t_1 t_2 \sin (\theta - \varphi) & t_2^2 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

であり、両座標系間の変換行列は図の関係から

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (M^{-1})^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_1 \cos \theta & -t_2 \sin \varphi \\ t_1 \sin \theta & t_2 \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \quad \dots\dots (5)$$

となる。この $(M^{-1})^t$ から M^{-1}, M, M' を求めれば、種々のベクトル、テンソルはそれらを用いて(付10)~(付16)式のように変換される。この変換関係は t_1, t_2 をともに単位ベクトルであるとみなす(b)図の写像座標系に対しても全く同様である。

いま考える等方位写像においては、原座標系および写像座標系の双方において

$$E = -\text{grad } \varphi \quad \dots\dots\dots (6)$$

$$\text{div } D = \rho \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$D = \varepsilon E \quad \dots\dots\dots (8)$$

を満足しなければならない。そして、変換関係の基本として、両座標系の対応する点における電位 φ および電荷密度 ρ の二つのスカラーはそれぞれ等しいということ、すなわち

$$\varphi_z(x, y) = \varphi_w(u, v) \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$\rho_z(x, y) = \rho_w(u, v) \quad \dots\dots\dots (10)$$

を出発点とする。この条件の下に(6)~(8)式を満足するように、電氣的諸量の変換関係を求める。

まず、(6)式について考える。原座標系、写像座標系ともに直交座標系であり、そして、 e_1, e_2 ばかりでなく、 t_1, t_2 もまた単位ベクトルである。すなわち、

$$\begin{aligned}
 \text{grad } \varphi &= e_1 (\partial \varphi / \partial x) + e_2 (\partial \varphi / \partial y) \\
 \text{grad } \varphi &= t_1 (\partial \varphi / \partial u) + t_2 (\partial \varphi / \partial v) \quad \dots (11)
 \end{aligned}$$

である。ところが変換座標系では t_1, t_2 は単位ベクトル

ルではないので、原座標系に対して付録に述べるような変換を受ける。テンソル解析法によれば、スカラー場 φ の傾き $\text{grad } \varphi$ を共変成分、反変成分で表わすとき、それぞれ

$$\left. \begin{aligned} \text{共 変 } \text{grad } \varphi &= t_1 \frac{\partial \varphi}{\partial u} + t_2 \frac{\partial \varphi}{\partial v} \\ \text{反 変 } \text{grad } \varphi &= t_1 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} g^{11} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} g^{12} \right) \\ &\quad + t_2 \left(\frac{\partial \varphi}{\partial u} g^{21} + \frac{\partial \varphi}{\partial v} g^{22} \right) \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

である。しかるに、写像座標系においては t_1, t_2 は単位ベクトルであり、しかも $t_1 = t^1, t_2 = t^2$ となる。このことを考慮すれば、(6)式を満たすためには電位 φ は不変であるから、(12)の両式を(11)式と比較すれば明らかのように、電界 E は共変ベクトルとして変換を受けなければならないことがわかる。よって、電界に対する変換式は(付13)式となる。

次に(7)式については、(10)式のように ρ の不変性を満たす必要がある。ところが、ベクトル場の発散はすべての座標系で同一のスカラー値を持つことがテンソル解析上明らかであり、従って電束密度 D は通常のベクトル、すなわち反変ベクトルとしての変換を受ける。その変換式は(付12)式である。

そして(8)式については、 E が共変ベクトル、 D が反変ベクトルであるところから、 ϵ は共変ベクトルを反変ベクトルに変換する反変テンソルである。よって、誘電率に対する変換式は(付14)式である。

以上をまとめると次のようになる。原座標系の単位ベクトル基底 e_1, e_2 、変換座標系の基底 t_1, t_2 が変換行列 M により

$$\begin{bmatrix} e_1 \\ e_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} t_1 \\ t_2 \end{bmatrix} \quad (13)$$

と変換されるものとすれば、原座標系 (x 平面) と t_1, t_2 を単位ベクトルとする写像座標系 (w 平面) との間の座標の変換は

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = (M^{-1})^t \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (14)$$

であり、そして電氣的諸量は次の変換を受ける。

$$\text{電位 } \varphi_z = \varphi_w \quad (15)$$

$$\text{真電荷密度 } \rho_z = \rho_w \quad (16)$$

$$\text{電界 } E_z = M E_w, E_w = M^{-1} E_z \quad (17)$$

$$\text{電束密度 } D_z = (M^{-1})^t D_w, D_w = M^t D_z \quad (18)$$

$$\text{誘電率 } \epsilon_z = (M^{-1})^t \epsilon_w M^{-1}, \epsilon_w = M^t \epsilon_z M \quad (19)$$

いまは等方化を考えるので、

$$\epsilon_w = \epsilon I \quad (20)$$

I : 単位行列

と置くと、等方化された誘電率は

$$\epsilon = (\det M) \sqrt{\det \epsilon_z} \quad (21)$$

となり、等方化のための条件式として

$$M M^t / (\det M) = \sqrt{\det \epsilon_z} \epsilon_z^{-1} \quad (22)$$

を得る。これは文献(3), (4), (7)の等方化写像における条件式と一致している。明らかに文献(7)によって与えられた等方化行列 M^t は、この条件式を満たしている。従って、文献(7)の(21)式または(23)式〔本論文(2)式〕によって、直ちに等方化写像行列 M^t を求め得る。

4. 新写像法の特徴と従来の写像法との比較

拡張された新しい写像法の特徴を明確にするため、従来の写像法との比較を行なう。

主要な写像関係を両写像法につき並記すると次のようになる。

従来の写像	新 写 像
$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$
$\varphi_z = \varphi_w$	$\varphi_z = \varphi_w$
$\rho_z = \rho_w$	$\rho_z = \rho_w$
$E_z = M E_w$	$E_z = M E_w$
$D_z = (\det M) \times (M^{-1})^t D_w$	$D_z = (M^{-1})^t D_w$
$\epsilon_w = \frac{M^t \epsilon_z M}{\det M}$	$\epsilon_w = M^t \epsilon_z M$
$\epsilon = \sqrt{\det \epsilon_z}$	$\epsilon = (\det M) \sqrt{\det \epsilon_z}$

この比較から明らかのように、両写像法の相違は、 $\det M$ という係数の有無にある。従来の写像法では、対応する微小面積中のエネルギーは保存されており、そのために $\det M$ の係数が必要であったのである。この性質によって、従来の写像法は静電容量を不変に保つ特長を有し、等角写像に近いものであり、その拡張として考えられたものと言える。新写像法では $\rho_z = \rho_w$ を出発点としているので、エネルギー、静電容量などは保存されない。新写像法の利用のために、次にそれらの関係を明らかにしておく。

両平面の写像によって対応する微小面積中のエネルギーは

$$d p_z = (1/2) E_z^t \cdot D_z dx dy \quad (23)$$

$$dp_w = (1/2) \mathbf{E}_w^t \cdot \mathbf{D}_w du dv \dots\dots\dots (24)$$

であるから、変換関係を入れて次式が求まる。

$$dp_w = (\det M) dp_z \dots\dots\dots (25)$$

真電荷密度は保存されているから、写像によって対応する微小面積中の電荷はそれぞれ次のように表わされる。

$$dq_z = \rho dx dy \dots\dots\dots (26)$$

$$dq_w = \rho du dv \dots\dots\dots (27)$$

変換関係を入れて次式を得る。

$$dq_w = (\det M) dq_z \dots\dots\dots (28)$$

すなわち、これは写像関係にある両領域の全電荷の関係でもある。従って、新写像法を電荷分布のない場に適用して静電容量を求める場合には、電位は保存されているので次の関係式が成立する。

$$C_w = (\det M) C_z \dots\dots\dots (29)$$

また、新写像法に対してコーシー・リーマンの条件を入れれば、従来の写像法と同様に

$$M^t M = (\det M) I \dots\dots\dots (30)$$

となり、この条件下では $\text{div } \mathbf{D} = 0$ が成立して、このとき等角写像となる。

5. 応用例

図3(a)のように、 $x=1$, $x=-1$ 間の領域に電荷密度 ρ の電荷分布を有し、媒質は無限領域全体にわたって一様で、 $\epsilon_{11}=9\epsilon_0$, $\epsilon_{12}=\epsilon_0$, $\gamma=30^\circ$ を持つ場を仮想上の問題として取上げる。これは x, y 座標系に対しては誘電率テンソル

$$\epsilon_z = \begin{pmatrix} 7 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \epsilon_0$$

を持つことにあたる。文献(7)の(21)式または(23)式[本論文(2)式]において、 $\alpha=\beta=\delta=\pi/2$ とすると次の写像行列を得る。

図3 等角写像の一例

Fig. 3. An example of isotropic mapping.

$$M^t = \begin{pmatrix} 3/7 & 0 \\ -2\sqrt{3}/7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$(M^{-1})^t = \begin{pmatrix} 7/3 & 0 \\ 2/\sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

これは斜交変換座標系の基底が、同図に示すように

$$\begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7/3 & 2/\sqrt{3} \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \end{pmatrix}$$

であることにあたる。この写像によって $x=\pm 1$ の直線は $u=\pm 3/7$ に、また等方化された誘電率は(21)式より $\epsilon=(9/7)\epsilon_0$ となり、図3(b)を得る。同図では容易に次の計算ができる(方向はすべて u 軸に平行である)。

$$\mathbf{E}_{w1} = \frac{7\rho u}{9\epsilon_0}, \quad \mathbf{E}_{w2} = \frac{\rho}{3\epsilon_0}$$

$$\mathbf{D}_{w1} = \rho u, \quad \mathbf{D}_{w2} = (3/7)\rho$$

これらを、(17), (18)式により変換して、求める(a)図の電界は次のようになる。

$$\mathbf{E}_{z1} = \begin{pmatrix} \rho x/7\epsilon_0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_{z2} = \begin{pmatrix} \rho/7\epsilon_0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{z1} = \begin{pmatrix} \rho x \\ (2\sqrt{3}/7)\rho x \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{D}_{z2} = \begin{pmatrix} \rho \\ (2\sqrt{3}/7)\rho \end{pmatrix}$$

6. むすび

等方化写像法を、電荷分布を有する二次元異方性媒質場にも適用できるものにまで拡張した。具体的にその写像行列を求める手法は、従来のものと全く同様であり、電束密度その他の変換式にスカラー係数の有無の相違があるだけである。もちろん、新写像法は電荷分布のない場に対しても適用可能であり、静電容量の計算なども従来同様容易に行ない得る。そのような意味で、新写像法は従来の写像法を包含したより完成されたものであると考えている。

この写像法の活用にあたっての重要な関係式は、諸量の変換関係を与える(13)~(19)式、等方化された誘電率を示す(21)式、そしてエネルギー、電荷、静電容量の関係を明らかにした(25), (28), (29)式である。基本となる写像行列は、文献(7)の(21)式または(23)式[本論文(2)式]をそのまま用いれば良い。

ここに述べた考え方は、電流密度分布を有する磁気異方性媒質場にも適用可能であると考えられる。その場合には、電流密度分布の表現に工夫を要することになるので、今後その研究を進めるつもりである。

(昭和57年2月25日受付, 同57年7月23日再受付)

文 献

- (1) E. Yamashita, et al.: "Application of MIC Formulas to a Class of Integrated-Optics Modulator Analyses: A Simple Transformation", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-25**, 146 (1977)
- (2) B. T. Szentkuti: "The Isotropy Transformation and Its Application to Strip-like Transmission Lines Using Anisotropic Dielectrics", Eidgenössische Technische Hochschule Report, **77**, 9, 1 (1977)
- (3) S. Kusase & R. Terakado: "Mapping Theory of Two-Dimensional Anisotropic Regions", *Proc. IEEE (Lett.)*, **67**, 171 (1979)
- (4) 寺門・草瀬: 「二次元異方性複合領域の等方化写像理論」, 電学論A, **99**, 465 (昭 54-10)
- (5) 小林・寺門: 「異方性媒質を有するマイクロストリップ伝送線の Effective Filling Fraction の一般式」, 電気学会電磁界理論研究 EMT-77, 46 (昭 52-10)
- (6) M. Kobayashi & R. Terakado: "Method for Equalizing Phase Velocities of Coupled Microstrip Lines by Using Anisotropic Substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-28**, 719 (1980)
- (7) 寺門・小林: 「距離係数の概念を導入した二次元異方性媒質の等方化写像」, 電学論A, **101**, 137 (昭 56-3)
- (8) 岩堀: ベクトル解析, p. 150 (昭 36) 裳華房
- (9) 矢野・石原: 同上, p. 316 (昭 39) 裳華房

付 録

利用するテンソル解析の手法⁽⁸⁾⁽⁹⁾ 付図1の斜交座標系 Ox_1x_2 において, $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ を基底とすると任意のベクトル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A} = A^1 \mathbf{r}_1 + A^2 \mathbf{r}_2 \dots\dots\dots (\text{付 } 1)$$

と表われ, (A^1, A^2) は $\mathbf{A}$ の反変成分である。また,

$$A_1 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_1, \quad A_2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{r}_2 \dots\dots\dots (\text{付 } 2)$$

の (A_1, A_2) は $\mathbf{A}$ の共変成分である。これは $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ に対し(付3)式を満たすように定められた逆基底 $\mathbf{r}^1, \mathbf{r}^2$ に対応するものであり, ベクトル $\mathbf{A}$ は共変成分により(付4)式で表わされる。

$$\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}^j = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \dots\dots\dots (\text{付 } 3)$$

$$\mathbf{A} = A_1 \mathbf{r}^1 + A_2 \mathbf{r}^2 \dots\dots\dots (\text{付 } 4)$$

基本テンソルは

$$g_{ij} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j \dots\dots\dots (\text{付 } 5)$$

で表われ, この行列 (g_{ij}) の逆行列を (g^{ij}) とし, Σ を省略した表記法により表わすものとする, 次の関係がある。

$$A_i = g_{ij} A^j, \quad A^i = g^{ij} A_j \dots\dots\dots (\text{付 } 6)$$

そして, 単位ベクトルを基底とする直交座標系においては次の関係となる。

付図 1 斜交座標系

app. Fig. 1. An oblique coordinate system.

$$A^i = A_i, \quad g^{ij} = g_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \dots\dots\dots (\text{付 } 7)$$

同一平面上に原点 O を共有する二つの斜交座標系 Ox_1x_2 と $Ox_1'x_2'$ をとり, 基底を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ および $\mathbf{r}_1', \mathbf{r}_2'$ とする。これらは単位ベクトルである必要はない。いま基底相互間に

$$\mathbf{r}_i = M_i^{i'} \mathbf{r}_{i'} \dots\dots\dots (\text{付 } 8)$$

の関係があれば, これを行列の形に書いて

$$M = \begin{bmatrix} M_1^{1'} & M_1^{2'} \\ M_2^{1'} & M_2^{2'} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (\text{付 } 9)$$

と置くことにより, 次の変換関係を得る。

$$\text{基底} \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1' \\ \mathbf{r}_2' \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1' \\ \mathbf{r}_2' \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1 \\ \mathbf{r}_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (\text{付 } 10)$$

$$\text{座標} \quad \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} = (M^{-1})^t \begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} x^{1'} \\ x^{2'} \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (\text{付 } 11)$$

ベクトル

$$\text{反変} \quad \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} = (M^{-1})^t \begin{bmatrix} A^{1'} \\ A^{2'} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A^{1'} \\ A^{2'} \end{bmatrix} = M^t \begin{bmatrix} A^1 \\ A^2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (\text{付 } 12)$$

$$\text{共変} \quad \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} = M \begin{bmatrix} A_{1'} \\ A_{2'} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A_{1'} \\ A_{2'} \end{bmatrix} = M^{-1} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix} \dots\dots\dots (\text{付 } 13)$$

テンソル

$$\text{反変} \quad \left. \begin{aligned} [T^{ij}] &= (M^{-1})^t [T^{i'j'}] M^{-1} \\ [T^{i'j'}] &= M^t [T^{ij}] M \end{aligned} \right\} \dots\dots (\text{付 } 14)$$

$$\text{共変} \quad \left. \begin{aligned} [T_{ij}] &= M [T_{i'j'}] M^t \\ [T_{i'j'}] &= M^{-1} [T_{ij}] (M^{-1})^t \end{aligned} \right\} \dots\dots (\text{付 } 15)$$

$$\text{混合} \quad \left. \begin{aligned} [T_j^i] &= (M^{-1})^t [T_{j'}^{i'}] M^t \\ [T_{j'}^{i'}] &= M^t [T_j^i] (M^{-1})^t \end{aligned} \right\} \dots\dots (\text{付 } 16)$$