UDC 621.039.6:533.951.2:519.62

論文

57-A18

核融合炉心内における高速荷電粒子に対する フォッカー・プランク方程式の数値解法

正員 桂井 誠 (東京大)

非会員 片山 弘造 (東京大)

准員 福良 昌敏 (東京大)

1. はじめに

核融合研究は大形トカマクによる零出力条件の達成が期待される段階にきている。このような核反応領域での炉心プラズマ研究においては、内部に存在する高速荷電粒子 (例えば α 粒子) の挙動を解析することが求められ⁽¹⁾, それらに対する速度分布関数の時間変化をフォッカー・プランク方程式を用いて計算しなくてはならない⁽¹⁾⁽²⁾。

従来, その近似的取り扱い法として, 一次元速度 (v) 空間のもとでの減速理論⁽³⁾や, ガウス形関数近似法⁽⁴⁾などが提案されてきたが, より厳密な解析を行なう場合, それらは不十分である。すなわち, トカマク磁界配位において高速荷電粒子の損失は非等方的であって, 速度の電流 (プラズマ電流) 方向成分を $v_{||}$, それに対する垂直成分を $v_{\perp}$ で表わすと, 分布関数は $f(v, \zeta, t)$, 閉じ込め時間は $\tau_f(v, \zeta)$ と表わされるから, 二次元速度空間上での解析が要求される。ここで v, ζ は

$$v = \sqrt{v_{||}^2 + v_{\perp}^2} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\zeta = v_{||}/v = \cos \chi \quad \dots\dots\dots (2)$$

である。フォッカー・プランク方程式を用いて $f(v, \zeta, t)$ を計算するには通常差分法が用いられるが, 一般的にいってプログラミングが大変なうえ, 計算時間も長

いという実際上の問題点を有している。

そこで, 本論文においては文献(4)で提案した手法を二次元問題に拡張し, 常微分方程式を用いてインパルス応答 (グリーン関数) を求めるという新たな手法を確立して, その有用性を示したものである。

2. フォッカー・プランク方程式⁽⁵⁾

炉心内の高速荷電粒子に対するフォッカー・プランク方程式は $f(v, \zeta, t)$ に対し

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial t} = & \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [A(v)f] + \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(v)f] \\ & + \frac{1}{\tau_s} \frac{C}{v^3} \frac{\partial}{\partial \zeta} \left[(1-\zeta^2) \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] - \nu(v, \zeta) f \\ & + S(v, \zeta, t) \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

ここで, $\nu(v, \zeta)$: $\nu \equiv 1/\tau_f$ で定義される損失率, $S(v, \zeta, t)$: 発生率, τ_s はスピツァーの減速時間

上記の $A(v)$, $B(v)$, C および τ_s は次式で与えられる (MKS 単位系)⁽⁶⁾⁽⁷⁾。

$$A(v) = v^3 + v_c^3 \dots\dots\dots (4)$$

$$B(v) = \left(\frac{m_e}{m_f} v_e^2 + \frac{m_i}{m_f} \frac{v_e^3 v_i^2}{v^3} \right) v^2 \dots\dots\dots (5)$$

$$C = \frac{m_i}{2m_f} \frac{Z_{\text{eff}}}{[Z]} v_c^3 \dots\dots\dots (6)$$

$$\tau_s = \frac{3\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_f m_e v_e^3}{n_e e^4 Z_f^2 \ln \Lambda} \dots\dots\dots (7)$$

ただし, f : 高速荷電粒子, i : イオン,
 e : 電子

v_c は次式によって定義される。

Numerical Solutions of the Fokker-Planck Equation for the Velocity-Distribution-Function of Supra-Thermal Ions in Fusion Plasmas. By Makoto Katsurai, Member, Kouzo Katayama, Non-member & Masatoshi Fukura, Associate (Faculty of Engineering, The University of Tokyo).

桂井 誠: 正員, 東京大学工学部
片山弘造: 非会員, 東京大学工学部
福良昌敏: 准員, 東京大学工学部

$$\frac{1}{2} m_f v_c^2 = \left(\frac{3\sqrt{\pi}}{4} \right)^{2/3} k T_e \left(\frac{m_f}{m_e} \right)^{1/3} \times \left(\frac{m_f}{m_i} \right)^{2/3} [Z]^{2/3} \dots\dots\dots (8)$$

Z_f は高速荷電粒子の荷電量, Z_{eff} と $[Z]$ は

$$Z_{\text{eff}} = \frac{1}{n_e} \sum_j n_j Z_j^2 \dots\dots\dots (9)$$

$$[Z] = \frac{1}{n_e} \sum_j n_j Z_j^2 \left(\frac{m_i}{m_j} \right) \dots\dots\dots (10)$$

であり, $\sum_j$ はイオンの全種に対する和である。

次に $f(v, \zeta, t)$ と $S(v, \zeta, t)$ に関してルジャンドル展開を行なう。すなわち,

$$f(v, \zeta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} f_l(v, t) P_l(\zeta) \dots\dots\dots (11)$$

$$S(v, \zeta, t) = \sum_{l=0}^{\infty} S_l(v, t) P_l(\zeta) \dots\dots\dots (12)$$

(11), (12)式を(3)式に代入すると

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_l}{\partial t} = & \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} [A(v) f_l] \\ & + \frac{1}{\tau_s} \frac{1}{2v^2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} [B(v) f_l] - \frac{C}{\tau_s} \frac{l(l+1)}{v^3} f_l \\ & - \sum_{k=0}^{\infty} E_{lk}(v) f_k + S_l(v, t) \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

を得る。ここで,

$$E_{lk}(v) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 \nu(v, \zeta) P_l(\zeta) P_k(\zeta) d\zeta \dots\dots\dots (14)$$

である。なお, 参考のために高速荷電粒子に電界が作用するような場合の公式を付録に示しておく。

3. インパルス応答に対する発展方程式

本論文の主目的は, (13)式の $f_l(v, t)$ を解くにあたって, そのインパルス応答関数として文献(4)と同様ガウス形関数を採用し, その有効性を検証することにある。すなわち, (13)式の $S_l(v, t)$ の $t=0$, $v=v_0$ でのインパルス関数を δ 関数を用いて

$$S_l(v, t) = S_{l0} \delta(v-v_0) \delta(t) \dots\dots\dots (15)$$

と表わし, その応答を

$$\begin{aligned} f_{ll}(v, t) = & \frac{1}{2\pi v^2} \frac{n_{ll}(t)}{\sqrt{2\pi} F_l(t)} \\ & \times \exp \left\{ -\frac{[v-v_{ll}(t)]^2}{2 F_l(t)} \right\} \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

で近似する。この関数は密度に相当する $n_{ll}(t)$, 中心速度に対応する $v_{ll}(t)$, そして分布の広がり $F_l(t)$ の三つの時間関数によって一意的に決定されるので, 基

本式(3)のインパルス応答を解くことは, 各 l に対するこの三者を決めることに帰着される。

ここで, 任意の物理量 $X(v, t)$ (ただし, v, t に限り滑らかな関数とする) の l 成分モーメントを次のように定義する。

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_l = & \int_0^{\infty} X(v, t) f_{ll}(v, t) 2\pi v^2 dv \\ \approx & \int_{-\infty}^{\infty} X(v, t) f_{ll}(v, t) 2\pi v^2 dv \dots\dots\dots (17) \end{aligned}$$

本来 $v>0$ であるが, (17)式においては以下の計算を楽にするため積分領域を $0 \sim \infty$ から $-\infty \sim \infty$ へと変更している。実際問題として, 本研究の対象となる減速過程において $v<0$ での(16)式の値は無視できるから, 上記のような積分領域の変更が許される。さて, (17)式のモーメントに関し次の公式が導かれる。

$$\langle 1 \rangle_l = n_{ll}(t) \dots\dots\dots (18)$$

$$\langle v \rangle_l = n_{ll}(t) v_{ll}(t) \dots\dots\dots (19)$$

$$\langle (v-v_{ll}) \rangle_l = 0 \dots\dots\dots (20)$$

$$\langle (v-v_{ll})^2 \rangle_l = n_{ll}(t) F_l(t) \dots\dots\dots (21)$$

$$\langle (v-v_{ll})^4 \rangle_l = 3 n_{ll}(t) F_l(t)^2 \dots\dots\dots (22)$$

一般に $\langle X \rangle_l$ を $v_{ll}(t)$ の周りでテーラー展開し,

$$\begin{aligned} \langle X \rangle_l \approx & X(v_{ll}(t), t) n_{ll}(t) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)_{v_{ll}(t)} n_{ll}(t) F_l(t) \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (v-v_{ll}(t)) X \rangle_l = & \left(\frac{\partial X}{\partial v} \right)_{v_{ll}(t)} n_{ll}(t) F_l(t) \\ \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle (v-v_{ll}(t))^2 X \rangle_l = & X(v_{ll}(t), t) n_{ll}(t) F_l(t) \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 X}{\partial v^2} \right)_{v_{ll}(t)} n_{ll}(t) F_l(t)^2 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

以上の公式を利用し, (13)式の 1, $(v-v_{ll}(t))$ および $(v-v_{ll}(t))^2$ に対するモーメントを計算すると, $n_{ll}(t)$, $v_{ll}(t)$, $F_l(t)$ に対する次の常微分形発展方程式を得ることができる(ここで, 時間関数を示す (t) の記号は略す)。

$$\begin{aligned} \frac{d n_{ll}}{d t} = & -\frac{C l(l+1)}{\tau_s} \frac{n_{ll}}{v_{ll}^3} - \sum_{i=0}^{\infty} E_{li}(v_{ll}) n_{li} \\ \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{d v_{ll}}{d t} = & -\frac{1}{\tau_s} \frac{A(v_{ll})}{v_{ll}^2} - \sum_{i=0}^{\infty} (v_{li} - v_{ll}) \frac{n_{li}}{n_{ll}} E_{li}(v_{li}) \\ \dots\dots\dots (27) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{dF_l}{dt} = & \frac{1}{\tau_s} \frac{B(v_{ll})}{v_{ll}^2} \\ & + \frac{1}{\tau_s} \left[\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v^2} \left(\frac{B(v)}{v^2} \right) - 2 \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{A(v)}{v^2} \right) \right] F_l \\ & - \sum_{i=0}^{\infty} \left[(v_{li} - v_{ll})^2 + (F_i - F_l) \right] \frac{n_{li}}{n_{ll}} \\ & \times E_{li}(v_{li}) \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

4. 数値計算

(26)～(28)式の連立常微分方程式を数値計算する場合の諸注意について述べる。まず問題となるのは、損失項についての $E_{li}(v)$ の積分(14)式である。いま $v(v, \zeta)$ が v と ζ に変数分離されるものと仮定し、

$$v(v, \zeta) = V(v)T(\zeta) \dots\dots\dots (29)$$

とする。実際上は図1のような損失領域を $v_{ll}-v_{\perp}$ 面上で仮定し

$$V(v) = \begin{cases} 0 & (v < v_m) \\ V_0 & (v > v_m) \end{cases} \dots\dots\dots (30)$$

$$T(\zeta) = \begin{cases} 1 & (\zeta_1 < \zeta < \zeta_2) \\ 0 & (\text{上記以外}) \end{cases} \dots\dots\dots (31)$$

とする。このとき

$$E_{li}(v) = V(v) \left\{ \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 T(\zeta) P_l(\zeta) P_l(\zeta) d\zeta \right\} \dots\dots\dots (32)$$

である。しかし、(31)式の $T(\zeta)$ に関して上式の積分

図1 高速荷電粒子に対する速度空間上の損失領域(斜線部)の設定

Fig. 1. Loss regions in velocity space for high energy charged particles.

は収束性が非常に悪い。そこで

$$T(\zeta) = \exp[-a(\zeta - \bar{\zeta})^2] \dots\dots\dots (33)$$

$$\bar{\zeta} = \frac{\zeta_1 + \zeta_2}{2}, \quad a = \frac{4}{\zeta_2 - \zeta_1} \dots\dots\dots (34)$$

という滑らかな関数を(31)式に代わって用いることにする。また i に対する和については、 $i=l$ の項が中心となるよう

$$\sum_{i=0}^{\infty} E_{li}(v_i) \rightarrow \sum_{i=-M}^M E_{l, l-i}(v_{l-i}) \dots\dots\dots (35)$$

という変形を行なう。 l に関する次数は N までとし、(35)式における $(l-i)$ については

$$0 \leq (l-i) \leq N \dots\dots\dots (36)$$

となる項のみを生かし、それ以外の項は無視する。 M, N のとり方については後章において議論される。

以上の手法を用いて以下、具体的問題に対する計算結果を示す。使用した計算機は東京大学大形計算機センター所有の HITAC M200H である。

5. 展開法と差分法の比較

以上導いた展開法を従来の差分法による計算と比較する。ここで参照のために使用した差分法は強陰法(Strong implicit method)と呼ばれ、アメリカ・オークリッジ研究所で開発された手法である⁽⁸⁾。メッシュとして 120×40 とする。

以下の計算において分布関数 f 、速度 v についてそれぞれ初期 $t=0$ にて $\int f d^3v = 1$ 、 $v/v_0 = 1$ となるよう正規化されている。また、時刻 t は τ_s を単位として計算されている。

まず最初の例として、水素プラズマ (H^+) 内にプラズマ電流と平行方向に初期エネルギー $E_0 = 500$ keV ($v_0 = 9.8 \times 10^6$ m/s) で、同種イオンをインパルス状に入射させた場合の分布関数の時間変化を図2に示す。ここで損失項は無視し ($\nu=0$)、 $T_e = T_i = 10$ keV、 $Z_{eff} = 10$ としてある。この Z_{eff} の値はピッチ角散乱

図2 水素プラズマ中の同種高速イオンの減速過程 ($Z_{eff}=10$)

Fig. 2. Retardation of ions in hydrogen plasma ($Z_{eff}=10$).

の効果で分布関数が広がっていく様子を強調するため、意識的に大きめの値が指定されている。また密度については、それは τ 内(7)式にのみ表われるので、時刻を τ 、単位で表わす場合、表には現われない。初期条件は、計算式(15)の S_{10} を求めやすくするため

$$S(v, \zeta, t=0) = \frac{\delta(v-v_0)}{2\pi v^2} \frac{N+1}{2^{N+1}} (1+\zeta)^N \quad (37)$$

を仮定し、この仮定のもとで

$$\left. \begin{aligned} n_{ll}(0) &= \frac{2l+1}{2^{N-l+1}} \\ &\times \sum_{i=0}^{2i+l \leq N} \frac{(N+1)!(i+l)!}{i!(N-2i-l)!(2i+2l+1)!} \\ v_{ll}(0) &= 1 \\ F_l(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

である。図2は $N=100$ の場合の展開法による計算例であって、(a)～(c)図と時間の経過に従ってピッチ角散乱の効果で、分布が $v_{\perp}$ 方向に広がっていく様子が良く示されている。

この結果と従来の差分法による結果とを比較したものが図3であり、これは図2の $\zeta = \cos(30^\circ)$ の断面での分布の時間変化を示している。図中、実線は展開法、破線は差分法に対応するが、減速過程中 ($0.1 \leq v_{\parallel} < 1$) での両結果の一致は非常に良い。

次に、より實際上重要な問題として図4(a)に示すような分布を有するDT炉心内で等方的に発生した α 粒子 ($E_0 = 3.52 \text{ MeV}$) の速度分布関数の時間変化の様子を示す。条件としては、実際の炉心条件に合わせ $T_e = T_i = 10 \text{ keV}$, $Z_{\text{eff}} = 3$, 更に損失領域については(34)式の $\zeta_1 = \cos(110^\circ)$, $\zeta_2 = \cos(160^\circ)$, $V_m = 1 \text{ MeV}$ と設定した。展開法において $M=20$, $N=20$ とし、差分法との比較を行なった。展開法に対する初期条件

図3 差分法(実線)と展開法(破線)の比較

Fig. 3. Comparison of results obtained by the difference method and by the expansion method.

は

$$\left. \begin{aligned} n_{ll}(0) &= \begin{cases} 0.5 & (l=0) \\ 0 & (l \geq 1) \end{cases} \\ v_{ll}(0) &= 1 \\ F_l(0) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

である。

図4(b), (c)は展開法、図5(a), (b)は差分法による時間変化の計算結果を示したもので、図6は両図の $\zeta = \cos(30^\circ)$ における分布の時間変化を並記、比較したものである。図4, 図5で損失領域近傍の分布を見比べてみると、二つの計算法の結果に多小の差異が認められる。なお、減速が十分進んだ段階において、展開法は(17)式で採用した近似が成り立たなくなるから、差分法に比べ精度が落ちてくる(この領域は本研究の対象外である)。

以上の二例に対し、二つの計算法に関する計算所要時間の比較を行なったものが図7, 図8で、それぞれ図3, 図6の結果に対応、更に図8には $N=M=10$ の場合も示されている。時間刻み Δt は 0.02τ である。両図から、本論文で提案した展開法の計算速度が差分法より5～10倍速いことが判明する。ここで注意

図4 展開法によるDTプラズマ内の α 粒子の減速計算 ($Z_{\text{eff}}=3$) [(a)図は初期分布]

Fig. 4. Retardation of alpha-particles calculated by the expansion method ($Z_{\text{eff}}=3$) [(a): initial profile].

条件と初期分布は図4と同じ。(a)図は図4(b), (b)図は図4(c)と同じ時刻である。

図5 差分法によるDTプラズマ内の α 粒子の減速計算

Fig. 5. Retardation of alpha-particles calculated by the difference method on the same condition as Fig. 4.

図6 差分法(実線)と展開法(破線)の比較

Fig. 6. Comparison of calculations by the expansion method and by the difference method.

すべき点は、展開法においては初期に損失項(32)式の係数計算を必要とする点であり、この所要時間は M に大きく依存する。図9にその様子を示すが、 $M \geq 20$ となると急激に計算時間が増加する。他方、展開次数 N については $N \leq 15$ と少ない場合、求めた分布関数には数%の波打ちが見られる一方、 N を増して $N \geq 30$ とすると計算時間が長くなる割には精度の向上は頭打ちされる。このような考察を総合すると $M \sim N \sim 20$ というような選定が、計算能率と収束性の両

図7 損失を無視した場合の計算時間の比較
Fig. 7. Computational time for a lossless case.

図8 損失を考察した場合の計算時間の比較
Fig. 8. Computational time for a lossy case.

図9 展開法における損失項の係数計算時間
Fig. 9. Computational time for the expansion coefficients of loss term in the expansion method.

面から妥当なものと結論される。しかし、分布関数そのものを求めるのではなく、次章で示すように何らかの積分計算の結果を求める場合、 $M \sim N \sim 10$ 程度であっても、上記 $M \sim N \sim 20$ の場合に比べ5%程度の差異しか現われない。

以上の計算時間についての比較は、時間刻み幅 Δt を $\Delta t \sim 0.02\tau_s$ とした場合であり、この Δt について本展開法において $\Delta t \sim 0.1\tau_s$ 程度まで長くしても

精度は落ちない。しかし差分法においては、上記 $\Delta t \sim 0.02\tau_s$ が上限であって、それ以上 Δt を長くすると数値的不安定を起こすから、実際の計算速度に関しては展開法のほうが更に有利になる。

6. 応 用

本章では、トカマク形 DT 炉心プラズマ内の α 粒子に関連した三つの問題に対する展開法の活用について議論してみる。

〈6・1〉 α 粒子速度分布関数の定常解 炉心プラズマ条件が一定の場合、展開法で求めたインパルス応答を時間積分すれば定常解を求めることができる。すなわち、発生項 $S(v, \zeta, t)$ がステップ関数の場合の応答 $f_s(v, \zeta, t)$ を

$$f_s(v, \zeta, t) = \int_0^t f_l(v, \zeta, t-\tau) d\tau \dots (40)$$

より計算し、十分時間が経過したときの $f_s(v, \zeta, t)$ を求めればそれが定常解となる。

さきの例(図4～図6)と同様のプラズマ条件に対する計算例を図10に示す。これは $\chi = \cos(30^\circ)$ における分布関数の定常解への漸近過程を示したものであり、解析的に導かれた結果⁽⁹⁾と良く一致している。

〈6・2〉 α 粒子加熱の瞬時量 DT 炉の動作条件が比較的高密度低温度領域に設定される場合、 α 粒子による内部加熱は粒子発生と同時に進められるという近似が成り立つが、逆に低密度で高温度領域に設定される場合、 α 粒子の減速過程中にプラズマ条件が変化する恐れがあるため、 α 粒子からプラズマへのエネルギー移行量を、その分布の時間変化を考慮して計算しなくてはならない⁽¹²⁾。

いま、フォッカー・プランク方程式(3)内の $A(v)$,

図 10 α 粒子の定常分布への接近の様子

Fig. 10. Approach to a steady state distribution function for alpha-particles.

$B(v)$ について、電子による項とイオンによる項をそれぞれ $A_e(v)$, $B_e(v)$ および $A_i(v)$, $B_i(v)$ とする。これらは(4), (5)式の右辺第1項および第2項に対応する。よって、 α 粒子から電子およびイオンへのエネルギー移行量 $W_e(t)$, $W_i(t)$ は、 $t=0$ でのインパルス状 α 粒子発生に対し $k=e$ (電子), i (イオン)として

$$\begin{aligned} W_{lk}(t|0) &= \int_0^t m_f \left(-\frac{2A_k(v)}{v} + \frac{B_k(v)}{v^2} \right) \frac{1}{\tau_s} \\ &\quad \times f_l(v, \zeta, t) 2\pi v^2 dv d\zeta \\ &\approx \left[-\frac{2A_k(v_{l0})}{v_{l0}} + \frac{B_k(v_{l0})}{v_{l0}^2} \right] \frac{m_f n_{l0}}{\tau_s} \dots (41) \end{aligned}$$

なる応答を示し、 $l=0$ の項のみの簡単な式となる。

ところで α 粒子は発生後、熱化時間 τ_s 程度経つと完全に熱化してしまう。ここで

$$\tau_s = \frac{\tau_s}{3} \log \left[1 + \left(\frac{v_b}{v_c} \right)^3 \right] \dots (42)$$

で、 τ_s は(7)式のスピッターの減速時間である。よって、時間 t における加熱量 $W_k(t)$ を求めるにあたっては、 $(t-\tau_s)$ から t までの間に発生した全 α 粒子に対するインパルス応答を逐次展開法で計算し、(41)式の時間積分を求めればよい。すなわち、 $t=t'$ に発生した α 粒子の加熱量を $W_{lk}(t|t')$ とし

$$W_k(t) = \int_{(t-\tau_s)}^t W_{lk}(t|\tau) d\tau \dots (43)$$

この τ_s の時間幅において

$$L = \tau_s / \Delta t \dots (44)$$

個の計算点があり、数値計算にあたっては、それと同数の α 粒子に対するインパルス応答を蓄えておく必要がある。すなわち、各時刻において $N \times L$ 組の (n_l, v_{ll}, F_l) に対する計算を必要とする (α 粒子に対しては $F_l \sim 0$ としてもよい)。よって $L \sim 10$ とすれば、計算時間は単なるインパルス応答に比べ1けた増加するので、時間刻み幅が同じなら、その計算時間は差分法並みとなる。しかし實際上、展開法では時間刻み幅を前述のようになく大きくとれるから、計算速度という点での展開法の優利性は十分確保されよう。

〈6・3〉 α 粒子による電流 トカマクにおける α 粒子の損失領域は $v_{ll} < 0$ の領域に存在する⁽⁶⁾から、その減速過程において $v_{ll} > 0$ の成分が $v_{ll} < 0$ の成分より大きくなり、プラズマ電流と同じ方向のイオン電流を生じる。これを α 粒子電流と呼び I_α で表わす。 α 粒子電流の計算は文献(10), (11)に示され

図 11 トカマク境界内での α 粒子の損失領域

Fig. 11. Loss region for alpha-particles in tokamak.

ているが、ここでは展開法を用いて計算してみる。

いま、イオン密度を $n_i (=2n_D=2n_T)$ とし、 $t=0$ においてインパルス状に発生した α 粒子の応答を $i_\alpha(t)$ とすると

$$i_\alpha(t) = \frac{n_i^2}{4} \langle \sigma v \rangle_{DT} \times 2e \int \zeta v f i(v, \zeta, t) 2\pi v^2 dv d\zeta \\ = \frac{e n_i^2}{3} \langle \sigma v \rangle_{DT} n_{H1} v_{H1} \dots \dots \dots (45)$$

となって、 $l=1$ の項のみが残るので、物理的意味が理解しやすく、かつ計算誤差が少なくてすむような式が求まる。

次に、プラズマ断面内における磁気面を同心円群で表わし、等圧力面とドリフト面もこの磁気面と一致すると考える。トカマクにおける α 粒子の損失領域は図 11 に示すように、パラメータ ζ_a , v_a , v_b によって決定されるが、それらの値は磁気面によって異なり、一般にプラズマ周囲ほど損失領域は広がる。ここでは文献(6)の結果に従って上記パラメータを決定し、更にそれを(29)式で近似するため、図 12 に示すような二つの損失領域 v_a , v_b の重ね合わせと考えた。

次に、断面内でのプラズマ電流密度 $i_p(r)$, イオン密度 $n_i(r)$, 温度分布 $T_i(r)$ をそれぞれ

$$i_p(r) = i_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{x_i} \dots \dots \dots (46)$$

$$n_i(r) = n_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{x_n} \dots \dots \dots (47)$$

$$T_i(r) = T_0 \left[1 - \left(\frac{r}{a} \right)^2 \right]^{x_T} \dots \dots \dots (48)$$

とする。また電子についても同様の密度、温度分布を仮定し、それぞれの磁気面における α 粒子電流密度のインパルス応答 $i_{I\alpha}(r, t)$ を計算すれば、(全) α 粒子電流のステップ応答は

図 12 損失領域の近似的取り扱い

Fig. 12. Approximated treatment of loss regions for alpha-particles in tokamak.

図 13 α 粒子電流の大きさ

Fig. 13. Plasma current by alpha-particles.

$$I_\alpha(t) = \int_0^t \int_0^a i_{I\alpha}(r, t-\tau) 2\pi r dr d\tau \dots \dots \dots (49)$$

によって計算できる。

図 13 はプラズマ電流 $I_p=5$ MA, $a=1.5$ m, $R/a=3.3$ の場合で、かつすべての空間分布が一樣 ($x_i=x_n=x_r=0$) の場合の結果を示したもので、 $n_0=1.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$ が仮定されている。この結果によると $T_i=T_e=20$ keV の場合、 I_p の 5 MA に及ばないものの、 I_α として定常的に 1.7 MA 程度発生することが示される。

ところで、大形トカマクにおける α 粒子の損失は主に周辺部の磁気面上において大きいから、空間分布の影響が I_α に対し強く効くものと予想される。表 1 は空間分布を考慮した場合の I_α の定常値 (ステップ応答の飽和値) であり、分布によって I_α は大きく減少し、特に実験炉 (EPR) 級⁽¹²⁾ になると $I_\alpha \sim 40$ kA のレベルにまで下がってしまう。逆にそれだけ中心部の α 粒子閉じ込めは良いということである。

このような大形トカマクにおける I_α の値は、もしも新古典理論が予言するようなブート・ストラップ電流⁽¹³⁾が励起される場合、大きな影響を炉心特性に与える。すなわち、新古典理論によるイオンの拡散によってプラズマ電流の増幅が起こり、その増幅率は 10~

表 1 α 粒子によって生ずるプラズマ電流の例
Table 1. Plasma current by alpha-particles for various temperature and density spatial profiles.

	$i_p(r)$	$n_i(r)$	$T_i(r)$	$I_\alpha(\text{kA})$ ($T_{i0} \sim 20 \text{ keV}$)
ケース A	一定	一定	一定	1,700
	一定	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$	一定	600
	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$	一定	350
ケース B ⁽¹²⁾	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]^{1/2}$	$\left[1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2\right]$	40

ケース A: $R=5.0 \text{ m}$, $a=1.5 \text{ m}$, $n_{i0}=1.6 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $I_p=5 \text{ MA}$

ケース B: $R=6.8 \text{ m}$, $a=2.3 \text{ m}$, $n_{i0}=8 \times 10^{20} \text{ m}^{-3}$, $I_p=7.2 \text{ MA}$

100 にも達すると予想される⁽¹⁰⁾。すなわち、 $I_\alpha \sim 40 \text{ kA}$ でも、ブート・ストラップ電流は MA のけたとなり、 I_α 自身は小さくとも無視できない影響をプラズマ閉じ込めに与えることになる。この理論の正当性はいまのところ不明であるが、もしこのことが実験的に確認されるようだと、 I_α に関する時間変動の計算は炉心の動特性研究に重要な地位を占めることになり、それを能率良く遂行できる本提案の計算法は威力を発揮しよう。

7. 結 言

本論文にて提案した展開法を用いることによって、非等方的損失領域を有する炉心プラズマ内の高速荷電

粒子の速度分布関数の時間応答を、常微分方程式を用いて能率良く計算できることが示された。展開法は、フォッカー・プランク方程式を直接解く差分法に比べプログラミングが単純なうえ、数式的物理的な解釈に沿って容易に定式化が可能である。また計算時間も差分法より短縮される。今後、核反応領域にある核融合炉心プラズマの特性を解析する際に有力な手段となろう。

(昭和 56 年 5 月 21 日受付, 同 56 年 9 月 16 日再受付)

文 献

- (1) Ya. I. Kalesnichenko: *Nuclear Fusion*, **20**, 6, 727 (1980)
- (2) H. Saito, et al.: Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion Research, IAEA-CN-35/19-1 (1976)
- (3) H. Saito, et al.: *Nuclear Fusion*, **17**, 5, 919 (1977)
- (4) M. Katsurai, et al.: *J. Faculty Engng., Univ. of Tokyo (B)*, **16**, 1, 67 (1981)
- (5) 中野: プラズマ工学例題演習, 第 1, 5, 6 章, (昭49) コロナ社
- (6) J. A. Rome, et al.: *Nuclear Fusion*, **16**, 1, 55 (1976)
- (7) D. L. Jassby: *Nuclear Fusion*, **17**, 2, 309 (1977)
- (8) R. H. Fowler, et al.: ORNL-TM-5487 (オークリッジ国立研究所技術メモ) (1976)
- (9) Ya. I. Kolesnichenko: Ref. [1] § 2.4
- (10) J. R. McNally: ORNL-TM-6492 (1978)
- (11) Ya. L. Kalesnichenko, et al.: *Nuclear Fusion*, **20**, 1041 (1980)
- (12) N. Uckan, et al.: Proc. 6th Symp. on Engineering Problems of Fusion Research, p. 1105 (1975)
- (13) 宮本: 核融合のためのプラズマ物理, 8.7 節, (昭51) 岩波書店

付 録

電界項がある場合の発展方程式 プラズマ電流方向の外部電界 E_{ext} が高速荷電粒子に作用し、 $q_f E_{\text{ext}}$ の力が働く場合

$$\frac{\partial f}{\partial t} = (3) \text{式右辺} - D \left[\zeta \frac{\partial f}{\partial v} + \frac{1 - \zeta^2}{v^2} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \right] \dots\dots\dots (\text{付 1})$$

$$D = \frac{q_f}{m_f} \left(1 - \frac{\langle Z \rangle}{Z_{\text{eff}}} \right) E_{\text{ext}} \dots\dots\dots (\text{付 2})$$

発展方程式は次のように変形される。

$$\frac{d n_{ll}}{dt} = (26) \text{式右辺} - D \left[\frac{l(l+1)}{2l+3} \frac{n_{ll+1}}{v_{ll+1}} - \frac{l(l+1)}{2l-1} \frac{n_{ll-1}}{v_{ll-1}} \right]$$

$$\frac{d v_{ll}}{dt} = (27) \text{式右辺} - D \left[\frac{l+1}{2l+3} \left(l-1-l \frac{v_{ll}}{v_{ll+1}} \right) \frac{n_{ll+1}}{n_{ll}} - \frac{l}{2l-1} \left(l+2-(l+1) \frac{v_{ll}}{v_{ll-1}} \right) \frac{n_{ll-1}}{n_{ll}} \right]$$

$$\begin{aligned} \frac{d F_l}{dt} = (28) \text{式右辺} - D \left[\frac{l+1}{2l+3} \left\{ l \frac{(v_{ll+1}-v_{ll})^2}{v_{ll+1}} - 2(v_{ll+1}-v_{ll}) + l \left(2 F_{l+1} \frac{v_{ll}^2}{v_{ll+1}^3} - F_l \frac{1}{v_{ll+1}} \right) \right\} \frac{n_{ll+1}}{n_{ll}} \right. \\ \left. - \frac{l}{2l-1} \left\{ (l+1) \frac{(v_{ll-1}-v_{ll})^2}{v_{ll-1}} - 2(v_{ll-1}-v_{ll}) + (l+1) \left(2 F_{l-1} \frac{v_{ll}^2}{v_{ll-1}^3} - F_l \frac{1}{v_{ll-1}} \right) \right\} \frac{n_{ll-1}}{n_{ll}} \right] \end{aligned}$$