板状電荷重畳法による外円筒同軸系の電位分布および静電容量計算

正 員 鶴 田 浩 一 (茨城大)

正 員 寺 門 龍 一 (茨城大)

1. ま え が き

高電圧機器の絶縁設計や放電現象の解析など電気工学の広い分野で、電界計算は重要な役割を果たしている。電界計算に関する最近の進歩は目覚ましく、実用面への応用の広い回転対称場、一般三次元場を中心に多数の研究結果が発表されている。

一方、二次元場の重要性は今なお高く、その中には外部電極が円筒となる同軸系を扱う場合も多く見られる。本論文では、このような同軸系を解析する手法として、外円筒に関して影像をもつ板状電荷を用いた板状電荷重畳法を提案する。この解析法の基本的な考え方は一般の電荷重畳法と同じであるが、板状電荷を内部電極内に放射状に配置するところと、影像を考えるため外円筒の電位が誤差なく定まるところに特徴がある。

板状電荷重畳法を適用する例として、ここでは内部正多角形筒対外円筒同軸系および、その変形である内部正多角形筒の頂部が丸みをもつ場合を取上げる。一般にこのような電界を解析的に求めることは困難であるため、理論的な興味からばかりではなく、この同軸系の特性インピーダンスを求めるという観点からも、既に幾つかの近似解析法が報告されている^{(1)~(4)}。しかし、正多角形の任意の角数に対し、内外両電極が接近した場合も含めて高い精度で電位分布、静電容量および特性インピーダンスを求める手法はまだ開発されていないようである。この論文はその有力な手段を提供するものでもある。

2. 外円に関して影像をもつ板状電荷の電位係数

単位円に関して互いに影像の関係にある無限板状導体の断面が図1(a)のように複素 z 平面上にあるものとし、内導体の電位を $V=V_0$ 、外導体を $V=-V_0$ とする。任意の点 $P(x, y)$ の電位 V_P は次のような等角写像によって求められる。対称であるから z 上半面のみを考える。

まず、写像関数

$$w = \frac{(1-a)(1+z)}{(1+a)(1-z)} \quad \dots\dots\dots (1)$$

により、(b)図の w 平面上に写像すると、 P 点の座標は

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{(1-a)\{1-x^2-y^2\}}{(1+a)\{(1-x)^2+y^2\}} \\ v &= \frac{2(1-a)y}{(1+a)\{(1-x)^2+y^2\}} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (2)$$

となり、 k は次の値になる。

$$k = \frac{(1+a)(1-b)}{(1-a)(1+b)} \quad \dots\dots\dots (3)$$

次いで、Jacobi のだ円関数⁽⁵⁾

$$w = sn(Z, k) \quad \dots\dots\dots (4)$$

により、(c)図の Z 平面上の長方形に写像する。このとき、次の関係がある⁽⁶⁾。

$$sn(X, k) = (R' - R)/(r' + r) \quad \dots\dots\dots (5)$$

あるいは逆関数の形に書いて次式となる。

$$X = F\left(\frac{R' - R}{r' + r}, k\right) \quad \dots\dots\dots (6)$$

従って、求める電位は

$$V_P = (X/K)V_0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

であり、導体単位長さあたりの電荷は誘電率を ϵ_0 とすれば

Calculation of the Potential Distribution and the Capacitance of the Coaxial System with an Outer Cylinder by the Charge Simulation Method using Plane Sheet Charges. By Koichi Tsuruta, Member & Ryuiti Terakado, Member (Faculty of Engineering, Ibaraki University).

鶴田浩一: 正員, 茨城大学工学部

寺門龍一: 正員, 茨城大学工学部

図 1 外部単位円に関して映像をもつ板状電荷による電位計算のための変換

Fig. 1. Transformation used to calculate the potential due to plane sheet charge with its image for an outer unit circle.

$$q' = 2\varepsilon_0(K'/K)V_0 \quad (8)$$

と表わされる。ここで、

$$K = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$K' = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k'^2x^2)}}$$

$$k^2 + k'^2 = 1$$

$$F(x, k) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}$$

$$R = \sqrt{(u-1/k)^2 + v^2}$$

$$R' = \sqrt{(u+1/k)^2 + v^2}$$

$$r = \sqrt{(u-1)^2 + v^2}$$

$$r' = \sqrt{(u+1)^2 + v^2}$$

である。

以下の計算においては、導体上の電荷分布は固定され、他の電荷が近くに配置されてもその影響は受けないと考える。

3. 板状電荷重畳法の電荷配置に関する基本的検討

(3.1) 内部電極が正多角形筒の場合 板状電荷重畳法では内部電極内に板状電荷を放射状に配置し、その電位を重畳して内部電極を模擬する。ここではその最も基本的な応用例として、内部正多角形筒の各頂点と中心間に板状電荷をただ1枚ずつ配置したとき、内部電極をどの程度模擬できるかを調べる。

図2に、例として内部電極が正四角形筒の場合の板状電荷とその映像の配置を示す。外円筒零電位の境界

図 2 正四角形に対する板状電荷とその映像の配置

Fig. 2. Disposition of plane sheet charges and their images for the system of inner square.

図 3 正四角形辺上の電位

Fig. 3. The potential at the side of the square.

条件は完全に満足されているから、ある電荷配置に対して内部正多角形筒が等電位になれば、この電荷配置によって定まる両電極間の電位分布の正しさが保証される。なお、同軸系はその断面を考えればよいので、以下、正多角形筒は正多角形、円筒は円と呼ぶ。また正多角形の角数を S で表わす。更に両電極間の電位分布は、 S および外円の半径 R と正多角形の外接円の半径 r との比 R/r で定まるので、以下、前章の電位係数に対応して外円は単位円 ($R=1$) とし、両電極の大小関係は R/r で表わす。

図3は、 $S=4$, $R/r=1.2$ の電極配置に対し、板状電荷を頂点 P_2 と中心 O 間にすき間なく配置したときの辺の中点 P_1 と P_2 間の電位分布を示す。このとき各板状電荷の電位は $1V$ としている。特異点である P_2 付近の電位を下げるためには、電荷幅を頂点側で縮小すればよいと考えられるが、この影響は P_2 のごく近傍だけに強く現われるため、 P_2 付近の電位の変動が大きくなり⁽⁷⁾、効果的とは言えない。

表1に $S=4$, $R/r=1.2$ および2に対して、板状電荷を OP_2 間にすき間なく配置 (電荷幅 100%) したときの辺上の平均電位および最大の電位の変動を示す。ここで、平均電位は P_1P_2 間を100等分する101点の電位の平均値、最大の電位変動は辺上の電位と平

表 1 板状電荷の幅と正四角形辺上の最大の電位変動

Table 1. The maximum potential deviations at the side of the square for width of plane sheet charges.

R/r	1.2		2	
電 荷 幅 (%)	100	120	100	94
平均電位 (V)	1.090	1.199	1.745	1.698
最大の電位変動 (%)	11.9	6.0	2.4	1.9

図 4 頂部が丸みをもつ正四角形に対する板状電荷の配置

Fig. 4. Disposition of plane sheet charges for the square whose apexes are rounded by arcs.

均電位との最大差を平均電位に対する % で示したものである。また電荷幅を中心側で調整し、最大の電位変動を最小にしたときの各値も併せて示す。いずれにしても、板状電荷を各頂点と中心間にただ 1 枚ずつ配置しただけでは、辺上の電位を十分等電位に近づけることは困難であることがわかる。

〈3.2〉 内部正多角形の頂部が丸みをもつ場合

内部正多角形の頂部が丸みをもっていて特異点のない場合には、板状電荷重畳法が無理なく適用できると考えられる。図 4 にこのような正四角形に対して前節と同様に、ただ 1 組の板状電荷を配置する場合の配置例を示す。電荷の両端をどのように定めるかが問題になるが、正四角形の場合の頂点側の端は円弧と直線部の接点 P_3 から対角線 OP_2 に下した垂線の足 P_4 とした。中心側の端は r の 1% 刻みで調整し、辺 $P_1P_3P_2'$ 上の最大の電位変動を最小にする r_1/r を求めた。

表 2 に $P_2P_3/P_2P_1=0.2$, $R/r=1.2$ および 2 の電極配置に対し、最大の電位変動を最小にする電荷幅 (r_1/r を % で示す) と、そのときの平均電位および最大の電位変動を示す。このときも各板状電荷の電位は 1V としている。

図 5 には表 2 の $R/r=1.2$, $r_1/r=38\%$ のときの辺 $P_1P_3P_2'$ 上の電位分布を示す。頂部に丸みがない場合と比較すると、電位の変動はかなり小さくなっていることがわかる。

表 2 頂部に丸みをもつ正四角形辺上の最大の電位変動 ($P_2P_3/P_2P_1=0.2$)

Table 2. The maximum potential deviations at the side of the square whose apexes are rounded by arcs ($P_2P_3/P_2P_1=0.2$).

R/r	1.2	2
電 荷 幅 r_1/r (%)	38	39
平均電位 (V)	0.8083	1.3493
最大の電位変動 (%)	1.80	0.84

図 5 正四角形の頂部が円弧であるときの辺上の電位

Fig. 5. The potential at the side of the square whose apexes are rounded by arcs.

図 6 同軸円筒に対する板状電荷の配置

Fig. 6. Disposition of plane sheet charges for the system of coaxial cylinder.

〈3.3〉 同軸円筒の場合 内部正多角形の角数 S を無限大とすると同軸円筒になる。ここでは本解析法の検証の意味で、同軸円筒系への適用について検討する。

図 6 に示すように N 枚の板状電荷を内部円筒に接するように配置し、 P_2 点の電位を求めて、これを内部円筒の電位と近似する。このとき、この同軸系の静電容量 C は、内部電極内に配置された z 方向単位長さあたりの総電荷量 Q と両電極間の電位差 V から

$$C=Q/V \text{ (F/m)} \quad \dots\dots\dots (9)$$

で与えられる。ここで、 Q は (8) 式から容易に求まる。また特性インピーダンス Z は

$$Z=1/c \cdot C, \quad c=2.997925 \times 10^8 \text{ (m/s)} \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。

表 3 に $R/r=1.2$ の場合について、 $N=4, 16, \dots$ と

表 3 同軸円筒の内部円筒内に配置された
板状電荷の数と特性インピーダンス
の計算値およびその誤差
($R/r=1.2$)

Table 3. Calculated values of the characteristic impedance and its errors as a function of the number of plane sheet charges which are disposed in the inner cylinder of the coaxial cylinders ($R/r=1.2$).

N_s	$Z (\Omega)$	Z の誤差 (%)
4	23.867	118.32
16	12.791	17.00
64	11.168	2.16
256	10.961	0.27
1,024	10.935	0.03
(真 値)	10.932	0

図 7 正四角形に対する仮想電荷と輪郭点の配置

Fig. 7. Disposition of fictitious charges and contour points for the system of inner square.

して求めた Z の値および真値に対する誤差を示す。 N_s の増加と共に Z の値は限りなく真値に近づいており、本解析法は $S=\infty$ なる極限の場合についても矛盾なく適用できることがわかる。

4. 板状電荷重畳法による外円同軸系の電界計算

(4.1) 内部電極が正多角形の場合 ここでは、板状電荷を仮想電荷とする板状電荷重畳法を適用してこの同軸系の電位分布、静電容量および特性インピーダンスを求める。図 7 に $S=4$, 仮想電荷数 $N=3$ のときの板状電荷と輪郭点の配置を示す。板状電荷は OP_2 間を分割する形で配置される。 S 枚の板状電荷を 1 組として対称の位置に配置し、一つの仮想電荷とする。各仮想電荷の電位 V_{0i} が未知数になる。対称であるから輪郭点の一つの辺の P_1P_2 上だけに配置すればよい。

(3.1) 節で述べたように、板状電荷を正多角形内に放射状に配置すると、頂点 P_2 付近の電位の変動が特

図 8 正四角形辺上の輪郭点の配置と電位の誤差

Fig. 8. Disposition of contour points and error of the potential on the side of the square.

図 9 正四角形内に配置された仮想電荷の電位

Fig. 9. Potentials of the fictitious charges which are disposed in the square.

に大きくなる。そこで第 l 番目の電荷幅 $\textcircled{l}$ を

$$\textcircled{l} = r(N-l+1)^m / \sum_{i=1}^N i^m \quad \dots\dots\dots (11)$$

とし、輪郭点は P_1 および電荷幅 $\textcircled{2}, \textcircled{3}, \dots, \textcircled{N}$ の中点から P_1P_2 に下した垂線の足として頂点付近に密に配置した。また (11) 式の m の値については、 $S=3\sim 6$ の幾つかの電極配置について $m=1\sim 4$ として計算した結果、全体として $m=3$ のとき最も良い結果が得られたので、以下 $m=3$ として計算した。

図 8 に、例として $S=4, R/r=1.1$ の電極配置に対し、 $N=7$ として板状電荷重畳法を適用したときの P_1P_2 上の電位の誤差 (輪郭点の電位との差) を輪郭点の電位に対する % で示す。輪郭点の位置は矢印で示す。また図 9 には、同一条件で輪郭点の電位を 1V としたときの各仮想電荷の電位 V_{0i} を示す。両図では P_2 付近 10% の範囲を 10 倍に拡大している。このように輪郭点を P_2 付近に密に配置しても、なお P_2 付近の電位の誤差が大きくなる。以下、辺上の電位の誤差の最大値を最大誤差と呼ぶ。

図 10 は $S=4$ のときの仮想電荷数 N と、辺上の

図 10 仮想電荷数と正四角形の边上電位の最大誤差

Fig. 10. The maximum error of the potential at the side of the square for different number of fictitious charges.

図 11 正多角形の角数と边上電位の最大誤差

Fig. 11. The maximum error of the potential at the side of the regular polygon with various number of apexes.

電位を P_1P_2 の 0.02% 刻みで計算して求めた電位の最大誤差との関係を示す。最大誤差は R/r が 1 に近づくときと急増する。

図 11 は $N=10$ としたときの S と最大誤差との関係を示す。 S が小さくなるほど誤差は大きくなる。しかし、全体として最大誤差はほぼ 0.1% 以下になっており、電位の数値計算としてはこの程度で十分と思われる。

図 12 に、例として $S=3, R/r=1.4$ の電極配置に対して $N=10$ とした求めた電位分布を示す。第 5 番目までの仮想電荷と輪郭点の配置も示す。

図 13 は $N=10$ とし輪郭点の電位を内部正 S 角形の電位として求めた、外円同軸系の静電容量 C と特性インピーダンス Z を示す。 C と Z は (9), (10) 式で与えられる。また $R/r \leq 2$ の範囲の C と Z の値は表 4 に示す。板状電荷重畳法で求めた C と Z の値の精度は边上の電位の誤差に依存するが、図 11 より実用的にこの程度で十分と思われる。このような同軸系の任意の角数に対し、 C と Z の値を $R/r=1.05$ の

図 12 正三角形に対する仮想電荷と輪郭点の配置 (No. 6~No. 10 省略) および両電極間の電位分布

Fig. 12. Disposition of fictitious charges and contour points (from No. 6 to No. 10 are omitted) and potential distribution between both electrodes for the system of inner triangle.

図 13 板状電荷重畳法で求めた静電容量と特性インピーダンス

Fig. 13. Capacitance and characteristic impedance obtained from plane sheet charge simulation method.

ような範囲まで精度良く計算した例はほかには見あたらないようである。

〈4・2〉 内部正多角形の頂部が丸みをもつ場合

この場合は、仮想電荷と輪郭点の配置法が多様になる。例として、図 14 に $S=4, R/r=1.2, P_2P_3/P_2P_1$

表 4 板状電荷重畳法で求めた静電容量と特性インピーダンスの値 ($R/r \leq 2$)Table 4. Values of capacitance and characteristic impedance obtained from plane sheet charge simulation method ($R/r \leq 2$).

R/r	3		4		5		6	
	C (pF/m)	Z (Ω)	C	Z	C	Z	C	Z
1.05	186.2	17.91	277.5	12.02	367.1	9.086	451.3	7.391
1.1	150.8	22.13	214.2	15.57	270.8	12.32	319.0	10.46
1.2	116.9	28.54	156.2	21.35	187.1	17.83	210.6	15.84
1.4	86.48	38.57	107.9	30.90	122.6	27.21	132.7	25.14
1.6	71.24	46.82	85.57	38.98	94.66	35.24	100.6	33.15
1.8	61.80	53.98	72.41	46.07	78.85	42.30	82.94	40.22
2.0	55.28	60.34	63.67	52.39	68.60	48.62	71.68	46.54

図 14 正四角形の頂部が円弧であるときの輪郭点の配置と電位の誤差

Fig. 14. Disposition of contour points and error of the potential on the side of the square whose apexes are rounded by arcs.

$=0.2$ の電極配置に対して、 $N=10$ 組の仮想電荷を図 4 の OP_4 間に (11) 式の m を $m=2$ として配置したときの $P_1P_3P_2'$ 間の電位の誤差を示す。輪郭点の位置は矢印で示す。角がある正多角形の場合と比較すると、頂部の誤差を小さくすることは容易になったが、 N を同数としたときの電位の最大誤差はむしろ大きくなった。複数の仮想電荷を配置するときは、 P_1P_2 間が直線となる角のある場合のほうが輪郭点の配置は単純になり、電位の誤差も小さくなるようである。しかし、頂部が丸みをもつ場合でも、仮想電荷の数を増すことにより十分高い精度でその電界を解析することができる。

5. む す び

外部電極が円筒である同軸系の電界を解析する手法として、円筒に関して影像をもつ板状電荷を用いた板状電荷重畳法を提案した。

本解析法では板状電荷を内部電極内に放射状に配置

する。従って、内部電極が角をもつ場合およびその角が丸みをもつような電界の解析に適している。

具体例として、本解析法を用いて内部正多角形筒対外円筒同軸系の電界を解析した。その結果、内外両電極が接近した場合も含めて高い精度でこの同軸系の電位分布、静電容量および特性インピーダンスを求めることができた。

終りに、本研究の計算に対する本学卒研究生 渡辺和弘 (現、日本原子力研究所)、小口幹夫 (現、パイオニア精密(株)) 両君の協力に感謝します。

(昭和 55 年 9 月 24 日受付、同 56 年 11 月 6 日再受付)

文 献

- (1) H. J. Riblet: "An Accurate Determination of the Characteristic Impedance of the Coaxial System Consisting of a Square Concentric with a Circle", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-23**, 714 (1975)
- (2) P. A. A. Laura & L. E. Luisoni: "Approximate Determination of the Characteristic Impedance of the Coaxial System Consisting of a Regular Polygon Concentric with a Circle", *ibid.*, **MTT-25**, 160 (1977)
- (3) P. A. A. Laura & L. E. Luisoni: "An Application of Conformal Mapping to the Determination of the Characteristic Impedance of a Class of Coaxial Systems", *ibid.*, **MTT-25**, 162 (1977)
- (4) K. Tsuruta & R. Terakado: "Easy Determination of the Characteristic Impedance of the Coaxial System Consisting of an Inner Regular Polygon Concentric with an Outer Circle", *ibid.*, **MTT-28**, 147 (1980)
- (5) 竹内: 楕円関数論, P.54 (昭 11) 岩波書店
- (6) F. Bowman: Introduction to Elliptic Functions with Applications, P.46 (1961) Dover Publications, Inc.
- (7) 鶴田・渡辺・寺門・荒川: 「円に関して影像を持つ板状電荷を用いた電荷重畳法による二次元電界計算」, 電気学会情報処理研究 IP-80-8 (昭 55)