UDC 532.517.4:537.222

論文

58-A9

代用うず法の検討

正員 村島 定行 (鹿児島大)

正員 小野 記久雄 (宮崎大)

正員 贅田 寛 (宮崎大)

1. ま え が き

代用電荷法は高電圧工学の分野では、不可欠の手段として種々利用されているが、ノイマン形の境界値問題はほとんど扱われていない。ただ増田氏⁽¹⁾による代用うず法の提案があるだけである。

増田氏らが提案した方法は、流れ場の問題を解くのに、求める解と直交する関数を解とする問題（双対な問題と言う）を解いて、複素関数の実部と虚部の直交性を利用して原問題の解を求めるものである。ノイマン問題を解く代わりにディリクレ問題を解くので、法線方向の微係数がいらぬという利点がある。ところで、ノイマン問題は通常の代用電荷法を自然に拡張した方法でも解けることはいうまでもない。増田氏らは代用うず法によりノイマン問題を解き得ることを示しただけで、通常の代用電荷法との比較をしていない。更に、原問題と双対な問題との関係を与えていないので、原問題が与えられたとき、双対な問題を見つけられない場合は代用うず法を適用できない。そのほか代用うず法を実際に使うためには、複素グリーン関数の虚数部の不連続線をどうするかという問題がある。

ここでは、代用うず法の基礎として双対原理を示し、それに基づく形で代用うず法を説明する。更に、不連続線の処理法、不定性についての考え方を説明する。幾つかの例題を通して、代用うず法と通常の代用電荷法を比較し、得失を調べた。

2. 代用うず法の一般化

〈2・1〉 増田氏らの代用うず法 流れ場の問題は速度ポテンシャル ϕ に関するノイマン問題として定式

図1 流れ場の問題

Fig. 1. Problem of flow field.

化される(図1)。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \frac{\partial}{\partial n} \phi(x, y) \Big|_{\Gamma_1 + \Gamma_2} &= 0, (x, y) \in \Gamma \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 Γ : 境界で $\Gamma_1 + \Gamma_2$ と等しい、 D :

Γ_1 と Γ_2 に挟まれた領域

代用うず法では、(1)式を解くのに $\phi(x, y)$ に直交する流れ関数 $\psi(x, y)$ に関する次のディリクレ問題を解く。

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \psi(x, y) &= \begin{cases} C_1, & (x, y) \in \Gamma_1 \\ C_2, & (x, y) \in \Gamma_2 \end{cases} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

(2)式は一般解を

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \dots (3)$$

と仮定し、代用電荷法で解くことができる。ここで、 (x_i, y_i) は電荷の位置である。

(3)式中で決定した電荷量 Q_i を利用して、速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ は次のように求められる。

$$\phi(x, y) = \sum_{i=1}^n \frac{Q_i}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y-y_i}{x-x_i} \right) \dots (4)$$

今後、(1)式を原問題、(2)式を(1)式的双対な問題と言うことにする。代用うず法とは原問題(1)式を

A Study of the Vortex Simulation Method. By Sadayuki Murashima, Member (Kagoshima University), Kikuo Ono, Member & Hiroshi Niida, Member (Miyazaki University).

村島定行: 正員, 鹿児島大学

小野記久雄: 正員, 宮崎大学〔現、(株)日立製作所〕

贅田 寛: 正員, 宮崎大学

解く代わりに双対な問題(2)式を解き、複素グリーン関数の虚数部を重ね合わせて原問題の解とするものである。 Q_i は双対な問題を解く場合には代用電荷量であるが、原問題に戻したときには代用うず度となる。

〈2・2〉 双対原理について 代用うず法の基礎として次の定理を示しておく。図2に示す領域に関する二つの境界値問題

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \frac{\partial \phi(x, y)}{\partial n} \Big|_r &= f(s), s \in \Gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \psi(x, y)_r &= g(s), s \in \Gamma \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

の境界条件 $f(s)$ と $g(s)$ の間に

$$f(s) = \partial g(s) / \partial s \dots\dots\dots (7)$$

の関係があれば、二つの境界値問題の解は直交する。ここで、 s は境界に沿って測った長さである。

(証明) $\phi(x, y)$ を原問題(5)式の解とする。領域 D 内の基点 p_0 から D 内の任意の点 $p(x, y)$ までの線積分で表現される次の関数

$$v(x, y) = \int_{p_0}^{p(x, y)} \frac{\partial \phi}{\partial n} ds \dots\dots\dots (8)$$

は積分路によらず、調和関数で $\phi(x, y)$ と直交することが文献(7)に示してある。ここで、 n は p_0 から p までの積分路に直交する単位ベクトルである。

いま p_0 を境界 Γ 上にとり、 $p(x, y)$ を Γ 上を動かすとする。つまり、積分路を境界 Γ と等しくすると

$$v(x, y) = \int_{p_0}^p \frac{\partial \phi}{\partial n} ds = \int_{p_0}^p f(s) ds$$

図2 ノイマン問題

Fig. 2. Neumann problem.

$$= \int_{p_0}^p \frac{\partial g(s)}{\partial s} ds = \left[g(s) \right]_{p_0}^p = g(s) - g(s_0) \dots\dots\dots (9)$$

s, s_0 は p, p_0 が Γ 上にきた場合の表示である。従って、 $v(x, y) + g(s_0)$ は境界 Γ 上で $g(s)$ に一致し、調和関数でもあるので、(6)式の解 $\psi(x, y)$ にほかならない。 $v(x, y)$ は $\phi(x, y)$ と直交するので、これに定数を加えた $\psi(x, y)$ も $\phi(x, y)$ と直交する。

(証明終り)

二次元代用電荷法における解は、一般に

$$\begin{aligned} \phi(x, y) &= h(x, y) + \sum_{i=1}^n Q_i \\ &\quad \times \frac{1}{2\pi} \log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2} \end{aligned} \dots\dots\dots (10)$$

で表現するが、これに直交する関数は(10)式中と同じ Q_i を使って

$$\psi(x, y) = h_i(x, y) + \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{2\pi} \tan^{-1} \left(\frac{y-y_i}{x-x_i} \right) \dots\dots\dots (11)$$

と表現できる。ここで、 $h_i(x, y)$ は特解 $h(x, y)$ に直交する関数である。つまり、二次元の代用電荷法では、互いに他の双対な関係にある境界値問題の一方を解けば、他方の問題の解は直ちに書き下すことができる。(5)、(6)式のように、解が直交する二つの境界値問題を互いに他の双対な問題と言うことにする。互いに双対な関係にある問題の一方を解けば、他方の問題の解は直ちに求めることができる。従って、ノイマン問題が原問題のとき、双対な問題を解いて原問題の解が得られる。

表1に、この論文で考察する幾つかの方法を一覧表に示した。No.1で示した方法が増田氏らの代用うず法である。双対な問題を対数関数で展開して解き、最終的な形は $\tan^{-1} \{(y-y_i)/(x-x_i)\}$ によって表わされる。原問題が境界の一部でディリクレ形、残りの境界上でノイマン形の条件が与えられる混合形であれば、双対な問題も混合形の問題になる。これを対数関数で展開して解けば代用うず法(表1 No.3)となる。通常

表1 双対性を利用した代用電荷法

Table 1. Charge simulation method using the duality principle.

No.	原問題	双対な問題	展開形	最終的な形	備考
1	ノイマン問題	ディリクレ問題	$\log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$	$\tan^{-1} \{(y-y_i)/(x-x_i)\}$	代用うず法
2	同上	同上	$\tan^{-1} \{(y-y_i)/(x-x_i)\}$	$\log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$	
3	混合問題	混合問題	$\log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$	$\tan^{-1} \{(y-y_i)/(x-x_i)\}$	代用うず法
4	ノイマン問題			$\log \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2}$	代用電荷法

の代用電荷法を表1の最下欄に示す。双対な問題は考えずに、原問題を対数関数で展開して解く。後に、しばしば No.1 と No.4 の方法の比較を行なう。No.2 には双対な問題を $\tan^{-1}\{(y-y_i)/(x-x_i)\}$ で展開する方法を示す。最終的な解は $\log V(x-x_i)^2+(y-y_i)^2$ で表現されることになる。原理的には代用うず法と同様であるが、双対な問題を解く段階で不連続関数の重ね合せ法を使う点で、かなりプログラムなどがめんどろになる。双対性を利用する方法はほかにも考えられる。例えば、ディリクレ問題の解を求めるときにノイマン問題を解いて、それに直交する関数を求める方法も形式的には考えられるが、利点はないと思われる。

〈2・3〉 代用うず法における問題点

(1) 不連続線について 代用うず法では速度ポテンシャルは $\theta = \tan^{-1}\{(y-yy)/(x-xx)\}$ を重ね合せて得られるが、 $\theta = \tan^{-1}(A)$ は A の無限多価関数である。通常、計算機の中では任意の A に対し基本領域 $-\pi/2 < \theta < \pi/2$ の値を返すよう設計されている。点 (x, y) と点 (xx, yy) とを結ぶ線分が水平線となす角度が必要な我々には多少、不都合である。この関数を計算するために、Fortran の組み込み関数

$$T = \text{ATAN}((Y-YY)/(X-XX)) \dots\dots (12)$$

を計算してみると、図3(a)に見られるように点 (X, Y) が $X=XX$ の線を横切るとき $\pm\pi$ だけの不連続が生じる。上下に不連続線が伸びるのは不便なので $X \leq XX$ の領域で、計算された角度に π を加えると、図3(b)に示すように、点 (XX, YY) より下向きに大きさ 2π の不連続線が生じる。

つまり、点 (X, Y) が点 (XX, YY) の周囲を1周するとき $-\pi/2$ からスタートし、 $(3/2)\pi$ で1周し、不連続線にぶつかる。更に、 $X \leq XX, Y \geq YY$ で π を加え、 $X \leq XX, Y < YY$ で π を減ずれば、不連続線は点 (XX, YY) から左へ向かう。

複素グリーン関数の虚数部には 2π の不連続線があり、これをなくすことはできない。ただポテンシャル解析の邪魔にならない方向にもっていくことができるだけである。

(2) 不連続線の閉じ込め 不連続線の方を变えるだけでは不十分な場合がある。例えば、流れ場の中に物体がある場合には、物体の内部に配置した極から出た不連続線が境界の外へ出ないように閉じ込める必要がある。流れ場中の物体における境界条件は $\partial\phi/\partial n = 0$ であるので、このときには閉じた領域の内部に配置した電荷量 Q_i の和については、ガウスの定理より

図3 不連続線

Fig. 3. Discontinuity line.

図4 不連続線の閉じ込め

Fig. 4. Confinement of discontinuity lines.

$$\sum_i Q_i = 0 \dots\dots\dots (13)$$

が成り立つ。ここで、 i は閉じた領域内の電荷のみの和をとることを意味する。(13)式が成り立てば閉じ込める方法がある。図4(a)は領域内に $+Q_1, -Q_1$ の2個の電荷がある場合で、不連続線を $+Q_1$ と $-Q_1$ とを結ぶ線の方で同じ向きに取ればよい。 $+Q_1$ と $-Q_1$ の間だけで不連続線が残る、その外では不連続の大きさが等しく、符号が反対なので打消されてしまう。図4(b)は多数の電荷を配置した場合で、ある電荷の方向へ不連続線に向け、打消されなかった分を他の電荷の方向へ向けるというように、順次打消していく。通常は(13)式が成り立つので、このやり方で不連続線を閉じ込めてしまうことができる。

(3) 不定性の問題について 一般にノイマン問題には定数だけの不定性がある。更に、双対原理に基づく代用電荷法でも必ず不定性の問題が起こる。これは、ある関数に直交する関数は一意的に決まらない(得られた関数に定数を加えたものも直交する)ことに起因する。

従って、通常の方法や双対原理に基づく方法でノイマン問題を解いたとき、通常、ある定数が加わった解が得られる。この定数は電荷の位置や電荷数の変化に

よって変化し、一見、解析の度に違った結果が得られているように見える。これを取除くためには領域内の一点でディリクレ条件を課せばよい。つまり、領域内の適当な一点の $\phi(x, y)$ の値を決め、この条件を満たすように定数を全体から引けばよい。この定数を引く操作は、解析を新しく行なう度に行なわなければならない。

3. 数値計算例

〈3.1〉 例題 1 双対原理に基づいた方法の例として、図 5(a) に示す問題を考える。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \phi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \frac{\partial \phi}{\partial n} \Big|_r &= -3 \sin s (3 \cos^2 s - \sin^2 s) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

これに対する双対な問題は

$$\left. \begin{aligned} \nabla^2 \psi(x, y) &= 0, (x, y) \in D \\ \psi(x, y) \Big|_r &= \cos s (\cos^2 s - 3 \sin^2 s) \end{aligned} \right\} \dots (15)$$

$(x, y) \in \Gamma$

である。この問題の解 $\phi(x, y)$ と $\psi(x, y)$ は解析関数 $(x+iy)^3$ の虚数部と実数部であり、正解は

$$\left. \begin{aligned} \phi(x, y) &= 3x^2y - y^3 \\ \psi(x, y) &= x^3 - 3xy^2 \end{aligned} \right\} \dots (16)$$

である。図 5(a) の問題を通常の代用電荷法と代用うず法とで解いて比較した。言うまでもないが、代用うず法では原問題はそのままにし、双対な問題のほうを解き、得られた Q_i に複素グリーン関数の虚数部を乗じて重ね合わせることになる。

代用電荷、拘束点の配置を図 6 に示す。通常の代用電荷法も代用うず法も同じ電荷配置を採用した。代用電荷から右へ直線が出ているのは虚数部の不連続線を意味する。 R は代用電荷の位置を表すパラメータで拡大率⁽³⁾の逆数である。図 7 には二つの解法における解 $\phi(x, y)$ の境界上の誤差 F を比較している。こ

で、 F は M 個の検査点(拘束点間に 1 個とっている)における誤差 E_i の 2 乗和の平均の平方根で、次式与えられる。

$$F = \sqrt{\frac{1}{M} \sum_{i=1}^M E_i^2} \dots (17)$$

図 7 から代用うず法が 10 倍ほど精度が良いことがわかる。図 8 には電荷数 $N=8$, $R=0.2$ の場合の境界上の誤差分布を示している。(a) 図は通常の代用電荷法で、実線 $(\partial \phi / \partial n)$ は拘束点で 0 になっているが、 ϕ は破線で示すように、なだらかに変化する。(b) 図

図 6 代用電荷と拘束点の配置

Fig. 6. Arrangement of charge and contour points.

図 7 境界上の誤差の比較

Fig. 7. Comparison of errors on the boundary.

図 5 例題 1

Fig. 5. Problem 1.

は代用うず法で、 ψ (実線)は拘束点で0になっているが、 ϕ (破線)は拘束点の近くで最大の誤差になる(位相が90度ずれている)傾向がある。 ψ と ϕ の誤差はほぼ同じ程度である。

図9(a)および(b)は代用うず法で求めた流れ関数 $\psi(x, y)$ および速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ の誤差分布である。図の中で+9, -10とはそれぞれ $+10^{-9}$ と -10^{-10} の等高線であることを意味する。どちらも誤差は境界上で最大になっており⁽⁴⁾、中心近くでは誤差が非常に小さいことがわかる。もちろん、図9(a)と(b)

は重ねてみれば直交していることがわかる。

この問題での不定性をなくすため、原点0におけるポテンシャルの値に0という条件を課している。

〈3.2〉 例題2 増田氏らが扱った境界条件が $\partial\phi/\partial n=0$ の問題を考えてみよう。図10は $-1 \leq x \leq 1$ の帯状領域の問題で、図に示すとおり半円状の突起が千鳥形に置かれている。この問題は、直線平行境界の外側に電荷を配置すると無限個必要になる。有限個で打切れば、打切ったところから先は非常に大きな誤差がでる。これでは代用うず法と代用電荷法の比較がで

きないので、直線平行境界上の条件を解析的に満足している有限領域のグリーン関数⁽⁵⁾を重ね合わせることにする。こうすると、半円状の突起の内部にだけグリーン関数の極を配置すればよい。この手法は幸いにして、代用うず法にも使える。

双対な問題における境界条件は、境界 Γ_1 上で $\psi=-1$ 、 Γ_2 上で $\psi=+1$ とする。図10に示すとおり、半円状の突起の内部に電荷点をとっている。拘束点も半円上にとっている。この問題は境界の形が点0に関して点対称になっている。この対称性も利用しているので非常に少ない電荷数で済んでいる。

双対な問題の解を次のように仮定する。

図8 境界上の誤差分布曲線例

Fig. 8. Curves of error on the boundary.

図9 流れ関数と速度ポテンシャルの誤差分布

Fig. 9. Error distributions of flow function and velocity potential.

図 10 例題 2 と電荷配置

Fig. 10. Problem 2 and arrangement of charges.

$$\phi(x, y) = x + \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{2\pi} \times \log \sqrt{\frac{(u-u_i)^2 + (v+v_i)^2}{(u-u_i)^2 + (v-v_i)^2}} \quad \dots\dots\dots (18)$$

ここで, u, u_i, v, v_i は次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$\left. \begin{aligned} u(x, y) &= f_1(x, y) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}y\right) \sin\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ v(x, y) &= f_2(x, y) \\ &= \exp\left(-\frac{\pi}{2}y\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}x\right) \\ u_i(x, y) &= f_1(x_i, y_i) \\ v_i(x, y) &= f_2(x_i, y_i) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

である。(18)式の右辺の第2項は平行境界上で0になるので, $\phi(x, y)$ は ± 1 の値をとり境界条件を満たしている。半円上で境界条件を満たすように Q_i を決定すると, 速度ポテンシャルは

$$\phi(x, y) = y + \sum_{i=1}^n Q_i \frac{1}{2\pi} \times \left\{ \tan^{-1}\left(\frac{v+v_i}{u-u_i}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{v-v_i}{u-u_i}\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (20)$$

で与えられる。

図 11 境界上の誤差の比較

Fig. 11. Comparisons of errors on the boundary.

図 11 に境界上の誤差分布を示す。例題 1 の場合のように正解が不明なので, $\partial\phi/\partial n=0$ の条件がどの程度満足されているかを調べた。同図の実線と一点鎖線を比較すると, 少しだけ代用電荷法が精度が悪い。

図 12 は $N=8, R=0.2$ の場合の境界上の誤差分布である。通常の代用電荷法では, 拘束点で境界条件は完全に満たされている。誤差は拘束点間で正負に振れている。代用うず法では拘束点で誤差が最大になる(位相が 90 度ずれている)傾向がはっきり表われている。 ϕ を求めるときの精度は良いが, $\partial\phi/\partial n$ の精度に直すと一けた以上精度が落ちている。この事実が代用うず法と通常の代用電荷法の差を少なくしている。

図 13 は代用うず法で求めた流れ関数 $\phi(x, y)$ を等高線で示したもので, 図 14 は速度ポテンシャル $\phi(x, y)$ を表わす。ともに平行境界上の条件は完全に満たされている。両者は完全に直交している。

〈3.3〉 例題 3 図 15 に示すように, 一様な流れの中に円形の物体がある問題を考えよう。原問題の境界条件は, 流れ場内の物体 Γ_3 上ではノイマン条件 $\partial\phi/\partial n=0$ である。これに対応する双対な問題の条件は $\phi=c$ となるが, c の値は未知で, いわゆるフリーポテンシャルの問題⁽⁵⁾⁽⁶⁾になる。

更に, 代用うず法を適用するとき, 不連続線を領域内に閉じ込めるための特別な工夫が必要である。

図 12 境界上の誤差分布曲線例

Fig. 12. Curves of error on the boundary.

図 13 流れ関数分布

Fig. 13. Distribution of flow function.

図 14 速度ポテンシャル分布

Fig. 14. Distribution of potential function.

図 15 例題3と電荷配置

Fig. 15. Problem 3 and arrangement of charges.

図 16 境界上の誤差の比較

Fig. 16. Comparisons of errors on the boundary.

図 16 に境界上の誤差を示す。有限領域のグリーン関数を重ね合せているので、平行境界 Γ_1, Γ_2 上では誤差 0 である。同図の誤差は Γ_3 上のものである。通常の代用電荷法（実線）では明らかに電荷位置 R に最適値がある。代用うず法（一点鎖線）では R にあまり影響を受けず、 N に大きく影響される。この例題では通常の代用電荷法のほうが精度が良い。

図 17 は $N=16, R=0.5$ で代用うず法により求め

図 17 等 ϕ 線と等 ψ 線Fig. 17. Equi- ϕ lines and equi- ψ lines.

た $\phi(x, y), \psi(x, y)$ 分布である。 $\phi(x, y)$ と $\psi(x, y)$ は直交しており、 $\phi(x, y)$ の一つは壁面に一致している。浮動電位 $\phi=c$ の値は $c=0.24804$ であった。

4. む す び

流れ場の解析法として、増田氏らが提案した代用うず法の検討を行なった。代用うず法の基礎になる原問題と双対な問題との関係を一般的な形で示したので、代用うず法がわかりやすく、適用範囲が広がったと考える。更に、代用うず法で必ず問題になる虚数部の不連続線の処理法、および不定性の問題についても触れている。

更に、幾つかの例題で通常の代用電荷法と代用うず法の精度の比較を行なった。一般的には同じ電荷配置の場合に、代用うず法が一けた程度精度が良いと言える。そうであるが、そうでない例もある。一けた程度の精度の悪さは電荷数を増して補えるので、不連続線の問題などがある代用うず法より通常の代用電荷法のほうがわかりやすく、使いやすいと言える。ただし、法線方向の微係数が計算できない場合や、計算に時間がかかる場合は代用うず法が適している。

(昭和 57 年 2 月 17 日受付, 同 57 年 8 月 20 日再受付)

文 献

- (1) 増田・松本: 電学論 A, 96, 1 (昭 51-1)
- (2) 村島・小野・賛田: 電気学会電磁界理論研究 EMT 81-81 (昭 56)
- (3) 村島・近藤・横井・賛田: 電学論 A, 102, 1 (昭 57-1)
- (4) 村島・加藤・宮近: 同上 A, 98, 39 (昭 53-1)
- (5) 村島: 静電気学会誌, 6, 248 (昭 57)
- (6) 河野・宅間: 数値電界計算法 (昭 55) コロナ社
- (7) 宇野・洪: ポテンシャル (昭 32) 培風館