Dyadic表現による三次元磁界解析の定式化

正 員 長谷部 信 也 (農工大)

正 員 鹿 野 快 男 (農工大)

正 員 青 海 弘 志 (農工大)

1. はじめに

有限要素法の工学的分野への適用の広がりにより、エネルギー変分原理に基づく Raylay-Ritz の方法よりは、この原理を必要としないかつ適用範囲の広い、重み付き残差法——特に Galerkin 法——を出発点とする定式化が多くなってきている⁽¹⁾。しかし、Galerkin 法では Ritz の方法に比べ高次の微分項が存在するので、一般に Green の定理などを用い積分の次数を下げる⁽²⁾、いわゆる“弱形式化”の操作⁽³⁾を行なうのが普通である。ただし、この Green の定理はスカラーポテンシャルで表わされた方程式に対し適用されるものであり、ベクトルポテンシャルによって表現された基礎方程式に Galerkin 法を使用した場合、“弱形式化”の操作が明りょうでないのが現状である。

さて、ベクトルポテンシャルによって記述される現象に磁界解析問題があり、もっぱら Ritz の方法が用いられている⁽⁴⁾。しかし、最近三次元磁界解析に Galerkin 法を適用した例が報告されている⁽⁵⁾。三次元磁界解析における定式化において、(i)透磁率の異方性、および(ii)二次元問題では自動的に満足していた⁽⁶⁾ Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ の処理が問題となってくる。従来、Ritz の方法を用いて解いた報告において Guancial 氏⁽⁷⁾、奥田氏⁽⁸⁾らは(ii)については考慮しておらず、伊藤氏ら⁽⁹⁾は(i)、(ii)とも考慮した定式化をしているが、その導入法が明確でない。他方、Galerkin 法による解法を報告している Chari 氏らは、ベクトル公式より“弱定式化”を操作したもので、直角座標以外の直交座標系(円筒、球)では使用で

きない。また、(i)については定式化が困難であり、(ii)については定式化の過程に疑問がある。以上のように、三次元磁界解析問題の定式化はいまだ十分であるとは言えない状態にある。

そこで本論文では、透磁率 μ が線形の場合の磁界解析問題において、まずベクトルラプラスアン of Dyadic を含む恒等式を示している。次いで Galerkin 法での“弱形式化”の際用いるスカラーポテンシャルに対する“Green の定理”に類似したベクトルポテンシャルに対する公式を示している。

また、前記条件(i)の点は、Dyadic 演算により異方性を考慮した変更点について明確にし、(ii)については変分法におけるラグランジュ乗数法を Galerkin 法に応用して定式化を図っている。次いで、Ritz の方法と Galerkin 法での定式化および境界条件の相違について比較、検討を加え、実際のモデルにおける両者による計算値を比較し、Galerkin 法における定式化の検討の妥当性を明らかにしている。

2. Dyadic 表現による Galerkin 法での定式化

うず電流を考慮しない準静的磁界系方程式は

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{B} = [\mu] \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\mathbf{H}$: 磁界の強さ ($\text{A} \cdot \text{m}^{-1}$)、 $\mathbf{B}$: 磁束密度 (T)、 $\mathbf{J}_s$: 励磁電流密度 ($\text{A} \cdot \text{m}^{-2}$)、 $[\mu]$: 直交異方性をもつ透磁率 ($\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$)

で示される。(2)式より

$$\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B} \quad \dots\dots\dots (4)$$

なるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ が存在し、(1)式に代入すれば、(3)式の関係より

$$\nabla \times ([\mu]^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_s \quad \dots\dots\dots (5)$$

となる。

Analysis of Three-Dimensional Magnetic Field by Dyadic Operator. By Shinya Hasebe, Member, Yoshio Kano, Member & Hiroshi Seikai, Member (Faculty of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology).

長谷部信也: 正員, 東京農工大学工学部

鹿野快男: 正員, 東京農工大学工学部

青海弘志: 正員, 東京農工大学工学部

さて、一般にベクトル場はその回転量と発散量を与えられることで一意に定まる⁽¹⁰⁾。(5)式の方程式で記述されるベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は、(4)式による回転量が定義されているだけで、発散量が与えられず不定である。そこで

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

なる Lorentz ゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \sigma \phi = 0$ なる磁界系での Lorentz ゲージは導電率 $\sigma = 0$ の場合クーロンゲージと一致する) を付加することで、 $\mathbf{A}$ は一意的に定まる。よって、(1)～(3)式を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ は、(6)式の条件の下に(5)式によって表わされていることがわかる。

〈2.1〉 透磁率 μ の異方性がない場合 (3)式の $[\mu]$ は一つの値 μ のみで表わせるので、(5)式の $[\mu]^{-1}$ は $1/\mu$ となり、同式の左辺を変形すれば

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \left\{ \nabla \left(\frac{1}{\mu} \right) \right\} \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) \quad \dots\dots\dots (7)$$

であり、 μ は線形と仮定しているので、右辺第1項は0となり

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \frac{1}{\mu} \{ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \} \quad \dots\dots\dots (8)$$

となる。ここで、上式右辺第2項のベクトルラプラシアンに対し、ベクトルのこう配を表現できる Dyadic 形式を用いると、

$$\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) = \nabla \cdot \hat{T} \quad \dots\dots\dots (9)$$

なる等式が成立する。上式はスカラー関数 ϕ における $\nabla^2 \phi = \nabla \cdot (\nabla \phi)$ に対応するものであり、 $\nabla \mathbf{A}$ はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ のこう配で、Dyadic⁽¹¹⁾である。なお直角、円筒、球座標系における Dyadic $\hat{T}$ の成分は付録〔II〕において各透磁率の直交成分を等しくすることより導かれる。

よって、 μ に異方性がない場合、(8)式に Lorentz ゲージ(6)式および Dyadic 等式(9)を代入すれば

$$-\frac{1}{\mu} \nabla^2 \mathbf{A} = \mathbf{J}_s \quad \dots\dots\dots (10a)$$

あるいは

$$-\nabla \cdot \hat{T} = \mathbf{J}_s \quad \dots\dots\dots (10b)$$

なる方程式を解くことに帰着する。

さて、Galerkin 法は重み付き関数として試験関数を用いる重み付き残差法の特別な場合である。すなわち、 $\mathcal{L}(u) - P = 0$ なる方程式が与えられたとし、

$u = \sum_{k=1}^N \alpha_k \phi_k$ なる近似関数を考える。残差 ε は $\varepsilon =$

$\mathcal{L}(\sum \alpha_k \phi_k) - P$ で求められ

$$\int_V \{ \mathcal{L}(\sum \alpha_k \phi_k) - P \} \phi_i dV = 0 \quad (i=1, 2, \dots, N) \quad \dots\dots\dots (11)$$

のように残差は試験関数と直交化される。

ここで、 δu を $\delta u = \delta \alpha_1 \phi_1 + \delta \alpha_2 \phi_2 + \dots + \delta \alpha_N \phi_N$ で定義する ($\delta \alpha_i$ は任意増分) と、(11)式の直交化の式は

$$\int_V \{ \mathcal{L}(u) - P \} \delta u dV = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

と表現できる⁽¹²⁾。

以上の考え方は、ベクトルポテンシャルで記述された方程式にも適用することができ、(12)式は Ritz 法におけるエネルギー汎関数の変分が0となる式と似ている。従って、Galerkin 法における定式化に際し、汎関数の変分に類似した記号 δF を用いれば(5)式の Galerkin 法による定式化は次式により示される。

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) - \mathbf{J}_s \right\} dV \\ &= \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \{ \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) \} - \mathbf{J}_s \right\} dV \\ &\quad \dots\dots\dots (13) \end{aligned}$$

上式右辺第2項は、Dyadic 公式(付7)式と $\hat{T} \mathbf{u} = \mathbf{u} \hat{T}$ ($\hat{T}$: dyadic, $\mathbf{u}$: ベクトル, $\sim$: 転地)を使用すれば、次のように変形できる。

$$\begin{aligned} &\int_V \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla \cdot (\nabla \mathbf{A}) \right\} dV \\ &= \int_S \frac{\delta \mathbf{A}}{\mu} \cdot (\widetilde{\nabla \mathbf{A} n}) dS - \int_V \left(\nabla \mathbf{A} : \frac{\nabla \delta \mathbf{A}}{\mu} \right) dV \\ &\quad \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

上式はスカラーポテンシャル u, v に対する Green の定理⁽¹³⁾

$$\begin{aligned} &\int_V u \nabla \cdot (\nabla v) dV \\ &= \int_S u \frac{dv}{dn} dS - \int_V (\nabla u \cdot \nabla v) dV \quad \dots\dots\dots (15) \end{aligned}$$

に対応したベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$, $\delta \mathbf{A}$ に対する“弱形式化”の定理と呼ぶべきものである。

(14)式の関係を(13)式右辺第2項に代入し

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_V \left\{ \left(\nabla \mathbf{A} : \frac{1}{\mu} \nabla \delta \mathbf{A} \right) \right. \\ &\quad \left. + \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{J}_s \right\} \right\} dV \\ &\quad - \int_S \frac{\delta \mathbf{A}}{\mu} \cdot (\widetilde{\nabla \mathbf{A} n}) dS \quad \dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

なる“弱形式化”の誘導結果を得る。

〈2.2〉 μ に異方性がある場合 (5)式の $[\mu]^{-1}$ の成分は

$$[\mu]^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\mu_a} & & \\ & \frac{1}{\mu_b} & \\ & & \frac{1}{\mu_c} \end{pmatrix} \dots\dots\dots (17)$$

なる Dyadic 形式で表現される。従って、(5)式の展開は(付8)式を用い

$$\begin{aligned} \nabla \times ([\mu]^{-1} \nabla \times \mathbf{A}) \\ = (\nabla \times [\mu]^{-1}) (\nabla \times \mathbf{A}) - [\mu]^{-1} \nabla (\nabla \times \mathbf{A}) \\ \dots\dots\dots (18) \end{aligned}$$

となる。上式は μ の異方性を考慮しない場合の(7)式と大幅に異なっており、(7)~(9)式のような展開は不可能であり、(8)式に対応した

$$\begin{aligned} \nabla \times \{[\mu]^{-1} (\nabla \times \mathbf{A})\} = \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} \\ \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

なる Dyadic $\dot{\mathbf{T}}$ を導出することになる。ここで、 $\bar{\mu}$ は(17)式での $\mu_a \sim \mu_c$ の任意の成分を表わしている。すなわち、 μ の異方性のため Dyadic $\dot{\mathbf{T}}$ は $\mathbf{A}$ のこの配では表現できないのである。 $\bar{\mu}$ を任意の成分とした場合、各直交座標系での $\dot{\mathbf{T}}$ の成分を付録(II)に示す。

(19)式に Lorentz ゲージ(6)式を代入すれば、解くべき方程式は(10b)式と同じ形

$$-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} = \mathbf{J}_s \dots\dots\dots (10b')$$

で表わせることがわかる(ただし、Dyadic $\dot{\mathbf{T}}$ の成分は異なる)。

よって、異方性を考慮した場合の“弱形式化”の公式は(14)式と異なり

$$\begin{aligned} \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}}) dV \\ = \int_S \delta \mathbf{A} \cdot (\dot{\mathbf{T}} \mathbf{n}) dS - \int_V (\dot{\mathbf{T}} : \delta \nabla \mathbf{A}) dV \\ \dots\dots\dots (20) \end{aligned}$$

となる。つまり、上式を用いれば(16)式に対し異方性を考慮した一般性のある Galerkin 法での“弱形式化”は

$$\delta F = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s \right\} dV \dots\dots\dots (21a)$$

$$\begin{aligned} = \int_V \left\{ (\dot{\mathbf{T}} : \nabla \delta \mathbf{A}) \right. \\ \left. + \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \mathbf{J}_s \right\} \right\} dV \\ - \int_S \delta \mathbf{A} \cdot (\dot{\mathbf{T}} \mathbf{n}) dS \dots\dots\dots (21b) \end{aligned}$$

となる。

3. Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ の扱い方

〈3.1〉 Ritz の方法での扱い方 μ の異方性を考慮した場合での(5)式のエネルギー汎関数 $\chi(\mathbf{A})$ は

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{A}) = \int_V \left\{ (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \left\{ \frac{[\mu]^{-1}}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \right\} \right. \\ \left. - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s \right\} dV \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

で示されるが、(6)式なる Lorentz ゲージの付帯条件が存在している。この条件を考慮した汎関数 χ はラグランジュ乗数 λ を用い

$$\begin{aligned} \chi(\mathbf{A}, \lambda) = \int_V \left\{ (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \left\{ \frac{[\mu]^{-1}}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \right\} \right. \\ \left. - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s + \lambda \nabla \cdot \mathbf{A} \right\} dV \dots\dots\dots (23a) \end{aligned}$$

となる⁽¹⁴⁾。上式の変分は $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ より $\delta \lambda \nabla \cdot \mathbf{A}$ の項は常に0であることを考慮し

$$\begin{aligned} \delta \chi = \int_V \left\{ \delta \left\{ (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \frac{[\mu]^{-1}}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s \right\} \right. \\ \left. + \lambda \delta (\nabla \cdot \mathbf{A}) \right\} dV \dots\dots\dots (23b) \end{aligned}$$

なる式を導くことができる。ここで、Dyadic 公式 $\mathbf{a} \cdot (\dot{\mathbf{T}} \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \dot{\mathbf{T}}) \cdot \mathbf{b}$ を用い上式の変分操作を行ない、(18)式の関係を使用すれば、変分 $\delta \chi$ は

$$\begin{aligned} \delta \chi = \int_V \left\{ \delta \mathbf{A} \cdot (-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s) \right. \\ \left. + \left\{ \lambda - \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\mu}} \mathbf{A} \right) \right\} \delta \nabla \cdot \mathbf{A} \right\} dV \\ + \int_S \left\{ \delta \mathbf{A} \times \{[\mu]^{-1} (\nabla \times \mathbf{A})\} \cdot \mathbf{n} \right. \\ \left. + \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} \right\} \right\} dS \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{n}$: 曲面 S の法線ベクトル

と変形することができる。

従って、ラグランジュ乗数 λ の値は

$$\lambda = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\bar{\mu}} \mathbf{A} \right) \dots\dots\dots (25)$$

となる。よって、変分 $\delta \chi$ は

$$\begin{aligned} \delta \chi = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s) dV \\ + \int_S \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\bar{\mu}} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} - \mathbf{n} \right. \\ \left. \times \{[\mu]^{-1} (\nabla \times \mathbf{A})\} \right\} dS \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

となり、(25)式の λ を(23a)式に代入し変形すれば、

エネルギー関数 χ は次式となる。

$$\chi(\mathbf{A}) = \int_V \left[(\nabla \times \mathbf{A}) \cdot \left\{ \frac{[\mu]^{-1}}{2} (\nabla \times \mathbf{A}) \right\} + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})^2}{2\mu} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s \right] dV \quad \dots\dots\dots (27)$$

以上、ラグランジュ乗数法により導出された汎関数 χ は、(22)式と比較右辺第2項が新たに加わったものになっている。この理由は次のように説明できる。すなわち、(5)式に示す方程式の汎関数が(22)式であるが、Lorentz ゲージにより解くべき方程式は(5)式ではなく(10b')式に変わる。この変化が汎関数空間においては(27)式における付加項として現われている。なお、(27)式は伊藤氏の報告⁽⁹⁾と一致するが、この報告においては求めるべき方程式が(10b')のように示されず、汎関数における付加項の導出手続き、および説明が明らかになっていない。

〈3.2〉 Galerkin 法での扱い方 Galerkin 法では汎関数の変分なる概念は本来存在しないが、(12)式および(21a)式が Ritz 法における変分操作と類似しているので、(24)式を参照し

$$\delta F(\lambda) = \int_V \left[\delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s \right\} + \lambda \delta (\nabla \cdot \mathbf{A}) \right] dV \quad \dots\dots\dots (28)$$

なる $\delta F(\lambda)$ を考えることができる。

上式を変形すれば λ は

$$\lambda = \nabla \cdot \left(\frac{1}{\mu} \mathbf{A} \right) \quad \dots\dots\dots (29)$$

となる。この λ を(28)式に代入すれば δF は

$$\delta F = \int_V [\delta \mathbf{A} \cdot (-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s)] dV + \int_S \delta \mathbf{A} \cdot \left(\frac{1}{\mu} \nabla \cdot \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad \dots\dots\dots (30)$$

となる。上式を(20)式の公式を用い“弱形式化”すれば

$$\delta F = \int_V [(\dot{\mathbf{T}} : \nabla \delta \mathbf{A}) - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s] dV + \int_S \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} - (\tilde{\mathbf{T}} \mathbf{n}) \right\} dS \quad \dots\dots\dots (31)$$

なる Lorentz ゲージを考慮した Galerkin 法での定式化が導出できる。

なお、こうした Lorentz ゲージの扱い方について、Chari 氏ら⁽⁵⁾はラグランジュ乗数 λ を導入せず、(21a)式右辺第1項をベクトル公式を用いて変形し定式化を得ている。しかし、定式化の途中でクーロンゲ

ージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) を用いているというので $(\nabla \cdot \mathbf{A})^2$ なる体積分項を消去している。この論理からすれば、(27)式右辺第2項も不用ということになり、こうした処理は疑問のあるところである。また各座標成分値で(16)式右辺第1項に相当する項を導出しているが、この手法はあくまで異方性を考慮しない直角座標系でのみ有効であるのは、付録[I]で示されているベクトルのこの配の成分、および(31)式右辺第1項、付録[II]での Dyadic $\dot{\mathbf{T}}$ の成分値より明らかである。

また、一般に二次元解析においては、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{A}$ の成分は解析平面と直交する成分となり、Lorentz ゲージ $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ が自動的に満足されるので、このような乗数 λ を考慮する必要はない。この意味は次のように説明できる。すなわち、(19)式において $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ が自動的に満たされるので、 $\nabla \times \{[\mu]^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})\} = -\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}}$ が成り立つ。従って、求めるべき方程式(5)と(10b')式は一致することになり、〈3.1〉節後半で考察したような汎関数の変更はないのである。

4. Galerkin 法での物理的境界条件について

μ の異なる領域 a, b の境界 Γ における磁界の強さ $\mathbf{H}$ の条件は、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を用いれば

$$\mathbf{n} \times \{[\mu]^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})\}^a - \{[\mu]^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})\}^b = 0 \quad \dots\dots\dots (32)$$

で表わされる。(27)式で示される Ritz の方法でのエネルギー関数 $\chi(\mathbf{A})$ の変分は(26)式である。

さて、(26)式の右辺境界項の第1項は Lorentz ゲージ、第2項は(32)式で示される磁界の境界条件そのもので、いずれも0であるので、(26)式は結局

$$\delta \chi = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot \{-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s\} dV \quad \dots\dots\dots (33)$$

となり、 $\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s = 0$ [(10b')式と一致する] なる支配方程式を解くことになる。従って、Ritz の方法では(27)式の変分をとる際、物理的境界条件は自動的に満足されていることになる。

他方、Galerkin 法における定式化は(31)式に示されるが、(26)式と比べると磁界の境界条件項が欠けていることがわかる。よって、Ritz の方法と同様に考えれば、Galerkin 法において次のような $\delta F'$ を導入することができる。

$$\delta F' = \int_V \delta \mathbf{A} \cdot (-\nabla \cdot \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{J}_s) dV + \int_S \delta \mathbf{A} \cdot \left\{ \frac{1}{\mu} (\nabla \cdot \mathbf{A}) \mathbf{n} - \mathbf{n} \times \{[\mu]^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})\} \right\} dS \quad \dots\dots\dots (34)$$

(34)式を“弱形式化”し、境界での Lorentz ゲージ項は0であるので無視すれば、物理的境界条件を考慮した Galerkin 法での定式化は、最終的に次のようになる。

$$\delta F = \int_V [(\dot{T} : \nabla \delta \mathbf{A}) - \delta \mathbf{A} \cdot \mathbf{J}_s] dV - \int_S \delta \mathbf{A} \cdot \{\hat{\mathbf{K}} \mathbf{n}\} dS \quad (35)$$

ただし、 $\hat{\mathbf{K}}$: Dyadic,

$$\hat{\mathbf{K}} \mathbf{n} = \hat{\mathbf{T}} \mathbf{n} + \mathbf{n} \times \{[\mu]^{-1}(\nabla \times \mathbf{A})\}$$

上式を(27)式で示される汎関数 χ と比べると、体積分での付加項は存在しないが、新たに境界項が加わっていることがわかる。この意味は次のように考えることができる。つまり、エネルギー汎関数は変分原理という物理学の基本則に基づいた概念であるので、物理的境界条件を満足するのは当然であるのに対し、Galerkin 法の出発点は、(11)式に示すように近似関数と残差を直交化するということであり、物理的意味はなく、(35)式のように境界条件を満たすための境界積分項を加える必要がある。

5. 数値解析例

以上、検討を加えた Galerkin 法での定式化(35)式と Ritz の方法でのエネルギー汎関数(27)式との比較のため解析例を示す。

遠心力形電磁ポンプ⁽¹⁵⁾において、二次導体が存在しない場合の解析モデルを図1に示す。励磁鉄心は巻鉄心を使用しているため、 μ の異方性を考慮する必要がある。三相励磁巻線は12個のスロットに埋め込んでいるので無限個の極対数 P が存在するが、カーター係数により鉄心を平滑にし、 $P_1=2, P_2=10, P_3=14, P_4=22, P_5=26$ の5個の成分で近似し、軸対称として扱う。更に、鉄心の内、外径端部での励磁巻線の戻り線

図1 解析モデル

Fig. 1. Analysis model.

の存在より、周方向の電流を考慮し、 $\nabla \cdot \mathbf{J}_s = 0$ を満足するようにしている。

$P=2$ での J_r, J_θ の分布を図2に示す。鉄心での μ の異方性よりベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の成分は

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(r, \theta, z, t) &= \sum_{n=1}^5 \{A_r^n(r, z) \mathbf{r} + j A_\theta^n(r, z) \boldsymbol{\theta} \\ &\quad + A_z^n(r, z) \mathbf{z}\} e^{j(\omega t + P_n \theta)} \quad (36) \end{aligned}$$

としている。比透磁率はそれぞれ $\mu_r=25, \mu_\theta=650, \mu_z=550$ とし、1相あたりの励磁電流は $100 \text{ A} \cdot \text{Turn}$ である。こうした条件の下に(36)式のベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ を(27), (35)両式に代入し解くことになる。Galerkin 法と Ritz 法による $\mathbf{A}$ の計算値は4けた目まで一致した結果を得、(27)式の変分と(35)式は等価な方程式であることがわかった。

$z=0$ における B_z の計算値と実測値(ティースとスロットの真下 $z=0$ での実測値の平均値)を図3に示す。両者は良く一致し、定式化の妥当性を示してい

図2 励磁電流の分布

Fig. 2. Distribution of exciting currents.

図3 磁束密度 B_z の分布

Fig. 3. Distribution of flux density B_z .

図 4 $|F \cdot A|$ の比較Fig. 4. Comparison of $|F \cdot A|$.

る。

また、Lorentz ゲージの扱い方の検証のため、このゲージを考慮しない汎関数(22)式との $F \cdot A$ の分布比較 ($z=1.4\text{mm}$) を図4に示す。図より、励磁鉄心下の部分において、Lorentz ゲージを考慮しない汎関数による $|F \cdot A|$ の値は1けた以上大きくなっており、第3章での論旨の正当性を裏付けている。

6. む す び

以上、三次元磁界解析問題を Galerkin 法により定式化することについて検討を加え、次の点が明らかになった。

(1) Dyadic 演算の適用について

(i) ベクトルポテンシャルのラプラシアンが Dyadic のこう配と等価である。

(ii) Galerkin 法における“弱形式化”で用いられるスカラーポテンシャルでの Green の定理に類似したベクトルポテンシャルでの公式を Dyadic 演算により示した。

(iii) 透磁率 μ に異方性がある場合、ベクトル演算による式の展開は不可能であるが、Dyadic を用いた展開を示し、またこの場合の“弱形式化”の定理の変更点も明らかにした。

(2) Lorentz ゲージの処理について 変分法におけるラグランジュ乗数法を適用し扱い方を明確にした。Ritz 法ではこのゲージにより支配方程式が変形し、これに応じて汎関数に新たな項が加わる。他方、Galerkin 法では定式化の際、このゲージの影響はな

く、物理的境界条件を満足するよう新たな境界項が必要である。

以上、Galerkin 法の磁界解析への適用について検討を加えたが、うず電流問題への適用については次回に報告したい。なお、(14)、(20)両式で明らかにした“弱形式化”の定理は、今後ベクトルポテンシャルで記述された方程式への Galerkin 法の適用を一層広げるものとする。

最後に、数値計算には東京大学大型計算機を使用したことを付記する。

(昭和57年2月24日受付、同57年9月21日再受付)

文 献

- (1) B.A. Finlayson (鷺津, 他訳): 重みつき残差法と変分原理, $\bar{v}$ (昭52) 培風館
- (2) O.C. Zienkiewicz (吉識, 他監訳): 基礎工学におけるマトリクス有限要素法, p. 42 (昭52) 培風館
- (3) 菊地: 有限要素法概説, p. 15 (昭55) 培風館
- (4) 電気学会技術報告: 有限要素法による電力機器の電磁界解析の現状, II部, 118号 (昭56)
- (5) M.V.K. Chari, et al.: “Three-Dimensional Magnetostatic Field Analysis of Electrical Machinery by The Finite-Element Method”, *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-100, 4007 (1981)
- (6) 長谷部, 他: 「単相電磁ポンプの磁界解析」, 電学論B, 101, 295 (昭56-5)
- (7) E. Guancial, et al.: “Three-Dimensional Finite Element Program for Magnetic Field Problems”, *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-13, 1012 (1977)
- (8) 奥田: 「有限要素法による進行波磁界及びうず電流解析」, 電学論B, 96, 377 (昭51-8)
- (9) K. Ito, et al.: “Simulation for Design Purposes of Magnetic Fields in Turbine-Driven Generator End Region”, *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-99, 1586 (1980)
- (10) K.H. Panofsky (林 訳): 電磁気学(上), p. 2 (昭49) 吉岡書店
- (11) Van Bladel: *Electromagnetic Fields*, p. 506 (1964) McGraw-Hill
- (12) J.J. Connor & C.A. Brebbia (奥村 監訳): 流体力学への有限要素法の応用, p. 11 (昭55) サイエンス社
- (13) 岩堀: ベクトル解析, p. 210 (昭45) 裳華房
- (14) 林: 変分法, p. 37 (昭40) コロナ社
- (15) 長谷部, 他: 「遠心力形電磁ポンプにおけるうず電流・体積力解析」, 電学論B, 101, 237 (昭56-4)

付 録

〔I〕 Dyadic について 二つのベクトル a, b より作られる積には次の3種類

$a \cdot b$: スカラー積

$a \times b$: ベクトル積

ab : dyad 積

があり、この ab を二つのベクトルから作られる dyad と言い、dyad の一次結合 T

$$\dot{T} = \sum \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n$$

を Dyadic と論う。

例えば、ベクトル $\mathbf{a} = a_x \mathbf{x}, \mathbf{b} = b_y \mathbf{y}$ の dyad 積 $\mathbf{ab}$ は $\mathbf{ab} = a_x b_y \mathbf{xy}$ である。従って、一般に Dyadic $\dot{T}$ は

$$\begin{aligned} \dot{T} = & T_{xx} \mathbf{xx} + T_{yx} \mathbf{yx} + T_{zx} \mathbf{zx} \\ & + T_{xy} \mathbf{xy} + T_{yy} \mathbf{yy} + T_{zy} \mathbf{zy} \\ & + T_{xz} \mathbf{xz} + T_{yz} \mathbf{yz} + T_{zz} \mathbf{zz} \dots (\text{付1}) \end{aligned}$$

と表わされるが、また

$$\dot{T} = T_x \mathbf{x} + T_y \mathbf{y} + T_z \mathbf{z} \dots (\text{付2})$$

ただし、

$$T_x = T_{xx} \mathbf{x} + T_{yx} \mathbf{y} + T_{zx} \mathbf{z}$$

$$T_y = T_{xy} \mathbf{x} + T_{yy} \mathbf{y} + T_{zy} \mathbf{z}$$

$$T_z = T_{xz} \mathbf{x} + T_{yz} \mathbf{y} + T_{zz} \mathbf{z}$$

なる形で表わすこともできる。

Dyadic には次に示す4種類の二重乗積が定義される。ただし、 $\dot{T} = \sum \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n$, $\dot{S} = \sum \mathbf{c}_n \mathbf{d}_n$

$$\dot{T} : \dot{S} = \sum (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{c}_n) (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{d}_n) \quad \text{スカラー}$$

$$\dot{T} \times \dot{S} = \sum (\mathbf{a}_n \cdot \mathbf{c}_n) (\mathbf{b}_n \times \mathbf{d}_n) \quad \text{ベクトル}$$

$$\dot{T} \cdot \dot{S} = \sum (\mathbf{a}_n \times \mathbf{c}_n) (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{d}_n) \quad \text{ベクトル}$$

$$\dot{T} \otimes \dot{S} = \sum (\mathbf{a}_n \times \mathbf{c}_n) (\mathbf{b}_n \times \mathbf{d}_n) \quad \text{ダイアデック}$$

また、 $\dot{T} = \sum \mathbf{a}_n \mathbf{b}_n$ とベクトル $\mathbf{c}$ の内積は

$$\dot{T} \mathbf{c} = \sum \mathbf{a}_n (\mathbf{b}_n \cdot \mathbf{c}) \dots (\text{付3})$$

と定義される。ベクトルのこう配、Dyadic の発散、回転は各直交座標で次のようになる。

直角座標系:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & a_x \mathbf{x} + a_y \mathbf{y} + a_z \mathbf{z}, \quad \dot{T} = T_x \mathbf{x} + T_y \mathbf{y} + T_z \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{a} = & (\nabla a_x) \mathbf{x} + (\nabla a_y) \mathbf{y} + (\nabla a_z) \mathbf{z} \\ \nabla \cdot \dot{T} = & (\nabla \cdot T_x) \mathbf{x} + (\nabla \cdot T_y) \mathbf{y} + (\nabla \cdot T_z) \mathbf{z} \\ \nabla \times \dot{T} = & (\nabla \times T_x) \mathbf{x} + (\nabla \times T_y) \mathbf{y} \\ & + (\nabla \times T_z) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (\text{付4})$$

円柱座標系:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & a_r \mathbf{r} + a_\theta \boldsymbol{\theta} + a_z \mathbf{z}, \quad \dot{T} = T_r \mathbf{r} + T_\theta \boldsymbol{\theta} + T_z \mathbf{z} \\ \nabla \mathbf{a} = & \left(\nabla a_r - \frac{a_\theta \boldsymbol{\theta}}{r} \right) \mathbf{r} + \left(\nabla a_\theta + \frac{a_r \boldsymbol{\theta}}{r} \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + (\nabla a_z) \mathbf{z} \\ \nabla \cdot \dot{T} = & \left(\nabla \cdot T_r - \frac{T_{\theta\theta}}{r} \right) \mathbf{r} + \left(\nabla \cdot T_\theta + \frac{T_{r\theta}}{r} \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + (\nabla \cdot T_z) \mathbf{z} \\ \nabla \times \dot{T} = & \left(\nabla \times T_r + \frac{T_\theta \times \boldsymbol{\theta}}{r} \right) \mathbf{r} \\ & + \left(\nabla \times T_\theta - \frac{T_r \times \boldsymbol{\theta}}{r} \right) \boldsymbol{\theta} + (\nabla \times T_z) \mathbf{z} \end{aligned} \quad (\text{付5})$$

球座標系:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & a_r \mathbf{r} + a_\theta \boldsymbol{\theta} + a_\varphi \boldsymbol{\varphi}, \quad \dot{T} = T_r \mathbf{r} + T_\theta \boldsymbol{\theta} + T_\varphi \boldsymbol{\varphi} \\ \nabla \mathbf{a} = & \left(\nabla a_r - \frac{a_\theta \boldsymbol{\theta}}{r} - \frac{a_\varphi \boldsymbol{\varphi}}{r \sin \theta} \right) \mathbf{r} \\ & + \left(\nabla a_\theta + \frac{a_r \boldsymbol{\theta}}{r} - \frac{a_\varphi \boldsymbol{\varphi}}{r \tan \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + \left(\nabla a_\varphi + \frac{a_r}{r} \boldsymbol{\varphi} + \frac{a_\theta}{r \tan \theta} \boldsymbol{\varphi} \right) \boldsymbol{\varphi} \\ \nabla \cdot \dot{T} = & \left(\nabla \cdot T_r - \frac{T_{\theta\theta} + T_{\varphi\varphi}}{r} \right) \mathbf{r} \\ & + \left(\nabla \cdot T_\theta + \frac{T_{r\theta}}{r} - \frac{T_{\varphi\theta}}{r \tan \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + \left(\nabla \cdot T_\varphi + \frac{T_{r\varphi}}{r} - \frac{T_{\theta\varphi}}{r \tan \theta} \right) \boldsymbol{\varphi} \\ \nabla \times \dot{T} = & \left(\nabla \times T_r + \frac{T_\theta \times \boldsymbol{\theta}}{r} + \frac{T_\varphi \times \boldsymbol{\varphi}}{r} \right) \mathbf{r} \\ & + \left(\nabla \times T_\theta - \frac{T_r \times \boldsymbol{\theta}}{r} + \frac{T_\varphi \times \boldsymbol{\varphi}}{r \tan \theta} \right) \boldsymbol{\theta} \\ & + \left(\nabla \times T_\varphi - \frac{T_r \times \boldsymbol{\varphi}}{r} - \frac{T_\theta \times \boldsymbol{\theta}}{r \tan \theta} \right) \boldsymbol{\varphi} \end{aligned} \quad (\text{付7})$$

更に、次のような公式が成立する。

$$\nabla \cdot (\dot{T} \mathbf{u}) = (\nabla \cdot \dot{T}) \cdot \mathbf{u} + (\dot{T} : \nabla) \mathbf{u} \dots (\text{付7})$$

$$\nabla \times (\dot{T} \mathbf{u}) = (\nabla \times \dot{T}) \mathbf{u} - \dot{T} \times \nabla \mathbf{u} \dots (\text{付8})$$

(II) 各直交座標系での(19)式における $\dot{T}$ の成分
直角座標系: ($\bar{\mu} = \mu_x$ の場合)

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_x}{\partial x} + \left(\frac{1}{\mu_x} - \frac{1}{\mu_z} \right) \frac{\partial A_y}{\partial y} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\mu_x} - \frac{1}{\mu_y} \right) \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_x}{\partial y} \mathbf{y} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A_x}{\partial z} \mathbf{z} \right\} \mathbf{x} + \left\{ \left(\frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_y}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\mu_x} - \frac{1}{\mu_z} \right) \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \mathbf{x} + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_y}{\partial y} \mathbf{y} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial A_y}{\partial z} \mathbf{z} \right\} \mathbf{y} + \left\{ \left(\frac{1}{\mu_y} \frac{\partial A_x}{\partial x} \right. \right. \\ \left. \left. + \left(\frac{1}{\mu_x} - \frac{1}{\mu_y} \right) \frac{\partial A_x}{\partial z} \right) \mathbf{x} + \frac{1}{\mu_x} \frac{\partial A_z}{\partial y} \mathbf{y} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_z} \frac{\partial A_z}{\partial z} \mathbf{z} \right\} \mathbf{z} \dots (\text{付9}) \end{aligned}$$

円柱座標系: ($\bar{\mu} = \mu_\theta$ の場合)

$$\begin{aligned} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_\theta} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_\theta} - \frac{1}{\mu_z} \right) \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} \right. \\ \left. + \frac{1}{\mu_z r} \left(\frac{\partial A_r}{\partial \theta} - A_\theta \right) \boldsymbol{\theta} + \frac{1}{\mu_\theta} \frac{\partial A_r}{\partial z} \mathbf{z} \right\} \mathbf{r} \\ \left. + \left\{ \left(\frac{1}{\mu_z} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_\theta} - \frac{1}{\mu_z} \right) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right) \mathbf{r} \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{\mu_\theta} \frac{1}{r} \left(\frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + A_r \right) \theta + \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A_\theta}{\partial z} \right. \\
& + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_\theta} - \frac{1}{\mu_r} \right) A_z \left. \right] z \theta + \left[\frac{1}{\mu_\theta} \frac{\partial A_z}{\partial r} r \right. \\
& + \frac{1}{\mu_r} \frac{1}{r} \frac{\partial A_z}{\partial \theta} \theta + \left. \frac{1}{\mu_\theta} \frac{\partial A_z}{\partial z} \right. \\
& + \left. \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{\mu_\theta} - \frac{1}{\mu_r} \right) A_\theta \right] z \left. \right] z \dots\dots\dots (\text{付10})
\end{aligned}$$

球座標系: ($\mu = \mu_r$ の場合)

$$\begin{aligned}
& \left[\left[\frac{1}{\mu_r} \frac{\partial A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{1}{\sin \theta} \left\{ \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\varphi} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta A_\theta) \right. \right. \right. \\
& \left. \left. + \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\theta} \right) \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right\} \right] r + \left[\frac{1}{\mu_\varphi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_r}{\partial \theta} - \frac{A_\theta}{r} \right) \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\varphi} \right) A_\theta \right] \theta + \left[\frac{1}{\mu_\theta} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right. \right. \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. - \frac{A_\varphi}{r} \right) - \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\theta} \right) A_\varphi \right] \varphi \right] r \\
& + \left[\left[\frac{1}{\mu_\varphi} \frac{\partial A_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\varphi} \right) \frac{\partial A_r}{\partial \theta} \right] r \right. \\
& + \left. \frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{A_r}{r} \right) \right] \theta \\
& + \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\theta}{\partial \varphi} - \frac{A_\varphi}{r} \cot \theta \right) \right] \varphi \left. \right] \theta \\
& + \left[\left[\frac{1}{\mu_\theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial r} + \left(\frac{1}{\mu_r} - \frac{1}{\mu_\theta} \right) \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_r}{\partial \varphi} \right] r \right. \\
& + \left[\frac{1}{\mu_r} \frac{1}{r} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \theta} \right] \theta + \left[\frac{1}{\mu_r} \left(\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial A_\varphi}{\partial \varphi} \right. \right. \\
& \left. \left. + \frac{A_\theta}{r} \cot \theta + \frac{A_r}{r} \right) \right] \varphi \left. \right] \varphi
\end{aligned}$$