うず電流を含む三次元磁界解析の定式化

—損失がある領域でのエネルギー汎関数について—

正 員 長谷部 信 也 (農工大)

正 員 鹿 野 快 男 (農工大)

1. はじめに

有限要素法(以下、FEM と記す)による磁界解析は既に多くの成果を得ており、この手法に関する本もかなり刊行されている⁽¹⁾。FEM は〔エネルギー汎関数の値(関数)が停留点で最小となり、この関数が物理現象の支配方程式となる〕変分原理に基づいている。そして、この手法は〔汎関数の変分より Euler 方程式へ変換するのではない〕直接法(Ritz 法)の一つで、局所関数を用いた近似解法である。

さて、支配方程式を導く汎関数の存在は既に知られており、電磁界での汎関数は Lagrange 密度関数の積分形である⁽²⁾。磁界解析へ FEM が適用できるのはこの汎関数が存在するからである。しかし、応用範囲の広いうず電流を含む磁界系ではジュール損があるので(保存形で定義された)、この Lagrange 密度関数を用いることはできない。

そこで、汎関数の存在を前提としない重み付き残差法(Galerkin 法)を用いた報告もある⁽³⁾⁽⁴⁾が、Lagrange 密度関数にジュール損に類似した項を加えた汎関数による解析例もある⁽⁵⁾⁻⁽⁷⁾。しかし、この付加された項の性質は不明であり、変分より導かれた式がうず電流を含む支配方程式と一致するといった説明にとどまっている。つまり、損失がある磁界系において FEM 適用の基盤となる変分原理が存在するかどうか明らかになっていない。

本論文は新たな汎関数の導出方法を示し、損失系で

の変分原理の存在について検討し、明確にすることを目的としている。

まず、変分法の概念では損失項は Euler 方程式への付加項として扱われているが、この扱いは磁界系でも成立することを示す。次に、集中定数系での例を参照し、ジュール損のある領域でのエネルギー保存則より新しい汎関数を定義する。また、従来ふれられていない汎関数の第2変分の概念⁽⁸⁾を導入し、変分原理が成立する条件(本論文では Legendre の条件のみを扱う)を示している。そして、まず保存系での汎関数がこの条件を満たすための手続きを明らかにしている。次に損失領域で新たに定義した汎関数は〔時間的平均(〈5・2〉節で示す)操作より〕保存系と同様 Legendre の条件が成立することを示している。更に、うず電流がある場合に生ずるスカラーポテンシャル ϕ の意味、および従来提案されている汎関数に変分原理を満足しないことを明らかにしている。

2. 磁界系の Lagrange 密度関数の変分について

〈2・1〉 Euler 方程式について 磁界系の汎関数 χ は

$$\chi(A) = \int_V L(A) dV \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ただし、 $L(A)$ は

$$L(A) = (V \times A)^2 / 2\mu - J_s \cdot A \dots\dots\dots (2)$$

ただし、 A : ベクトルポテンシャル、 μ : 透磁率 (H/m)、 J_s : 励磁電流密度 (A/m²)

なる Lagrange 密度関数⁽²⁾(第4章での極小条件を満たすため文献とは符号が異なる)である。

そして、上式の $\chi(A)$ の変分が0のとき関数 A は

Analysis of Three-Dimensional Magnetic Field Including Eddy Currents—About Energy Functional of Dissipated Domain—. By Sinya Hasebe, Member & Yoshio Kano, Member (Faculty of Engineering, Tokyo University of Agriculture and Technology).
長谷部信也: 正員, 東京農工大学工学部
鹿野 快男: 正員, 東京農工大学工学部

$$\frac{\partial L}{\partial A_i} - \sum_{j=1}^3 \left\{ \frac{\partial}{\partial x_j} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_i}{\partial x_j} \right)} \right\} = 0 \quad (i=1, 2, 3)$$

.....(3)

なる Euler 方程式を満足する。なお、上式は保存系の準静的磁界系方程式

$$\nabla \times \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) = \mathbf{J}_s \quad \text{.....(4)}$$

と一致することは既に知られている⁽⁹⁾。

〈2・2〉 直接法と FEM Lagrange 密度関数の変分より Euler 方程式なる微分方程式にもちこまない手法として直接法がある。これは(1)式を満たすベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の最小化関数列 $\{\mathbf{A}_n\}$ を作り、その極限の関数が(4)式を満足するという考え方である。

この関数列の作り方に Ritz の方法がある。この方法は、まず関数列 $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$ の線形結合 $\mathbf{A}_n = \sum c_i \varphi_i$ で(4)式を満たす $\mathbf{A}_n$ とする。そして、この係数 c_i を

$$\chi(\mathbf{A}_n) = \chi(\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n) \quad \text{.....(5)}$$

なる汎関数 χ が最小となる条件より定める⁽¹⁰⁾。 n を増加することで $\{\mathbf{A}_n\}$ の最小化列ができる。

しかし、この関数列が境界条件や媒質の異なる領域で方程式を満たすのは困難である場合が多い。そこで、解析領域を分割して各々の領域で局所関数を定義する方法がある。これが FEM であり、分割数を増すことで $\{\mathbf{A}_n\}$ なる最小化列を構成できる。

3. ジュール損項を含む汎関数について

前章では保存系に限定したが、この章で損失がある系の検討を行なう。

〈3・1〉 集中定数系での損失関数の扱い方 まず、簡単のため R - L 回路の回路方程式の導出方法を調べる。

(1) 損失項の Euler 方程式への組入れ方 一般化座標を q (電荷) とすれば、回路の Lagrange 関数 $\mathcal{L}(q)$ は次式で与えられる。

$$\mathcal{L}(q) = \frac{1}{2} L \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 + Vq \quad \text{.....(6)}$$

そして、損失関数 (消散関数) $g(q)$ は

$$g(q) = \frac{1}{2} R \left(\frac{dq}{dt} \right)^2 \quad \text{.....(7)}$$

となる⁽¹¹⁾。損失項を含む Euler 方程式は

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \frac{\partial g}{\partial \dot{q}} = 0 \quad \text{.....(8)}$$

であり⁽¹²⁾、損失関数の微分項が左辺第3項に加えら

れている。上式より

$$L \frac{d^2 q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} = V \quad \text{.....(9)}$$

なる回路方程式を得る。

(2) エネルギー保存則による導出 また、この方程式はエネルギー保存則

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} L \dot{q}^2 \right) + R \dot{q}^2 = V \dot{q} \quad \text{.....(10)}$$

より導くことができる⁽¹³⁾。左辺第1項は $d/dt(1/2 \cdot L \dot{q}^2) = L \dot{q}(d/dt) \dot{q}$ となり、各項共通の $\dot{q}$ を除けば(9)式になる。

〈3・2〉 磁界系での Euler 方程式と損失関数

前節の論理をジュール損のある磁界系へ拡張する。ジュール損はうず電流が存在する領域 (本論文ではこの領域を二次導体領域と呼び、 $\mathbf{J}_s$ の領域と区別する) で生じる。そして、うず電流 $\mathbf{J}$ は電磁ポテンシャル $\mathbf{A}$, ϕ を用い

$$\mathbf{J} = -\sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \phi) \quad \text{.....(11)}$$

ただし、 σ : 導電率 (S/m)

で示される。よって、損失密度関数 G は集中定数系での(7)式を拡張し

$$G(\mathbf{A}, \phi) = \sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \phi)^2 / 2 \quad \text{.....(12)}$$

で表わされる。従って、損失項を含めた磁界系の Euler 方程式は(2), (12)式を用いて次式となる。

$$\sum_{i=1}^3 \left[- \left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial L}{\partial \left(\frac{\partial A_j}{\partial x_i} \right)} \right\} + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial A_j}{\partial t}} \right] + \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} = 0$$

.....(13)

上式は一般化座標 $\mathbf{A}$, ϕ について独立に成立する。まず、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ については[(4)式の $\mathbf{J}_s$ の代わりに]、左辺第2項より $\sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \phi)$ が加わる[(15)式参照]。次に、 ϕ については(12)式に ϕ の時間微分項はないが、 $\phi \rightarrow (\partial / \partial t) \phi$ なるポテンシャル ϕ へ変換すれば、(13)式左辺第3項より

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \frac{\partial \phi}{\partial t}} &= \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left\{ \frac{\partial G}{\partial \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right)} \right\} \\ &= \sigma \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial A_i}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{.....(14)} \end{aligned}$$

を得る。上式で $\partial \phi / \partial t \rightarrow \phi$ の逆変換すれば、 $\mathbf{A}$, ϕ に関し

$$\nabla \times (1/\mu \nabla \times \mathbf{A}) = -\sigma(\partial \mathbf{A} / \partial t + \nabla \phi) \quad \text{.....(15)}$$

$$\nabla \cdot (-\partial \mathbf{A} / \partial t - \nabla \phi) = 0 \quad \text{.....(16)}$$

と、うず電流がある場合の磁界方程式と一致した結果を得る。

このように Euler 方程式に損失関数の微分項を加

えて支配方程式が導けることがわかる。

〈3・3〉 エネルギー保存則による汎関数の導出

(1) 磁界系でのエネルギー保存則 〈3・1〉節(2)項に示す集中定数系での概念を拡張した磁界系のエネルギー保存則を次式に表わす⁽¹⁴⁾。

$$-\int_{\Gamma} (\mathbf{S} \cdot \mathbf{n}) d\Gamma \\ = \int_V \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu} + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)^2 \right\} dV \quad (17)$$

ただし、 $\mathbf{n}$ は境界面 Γ の単位ベクトルであり、また $\mathbf{S}$ はポインティングベクトルで

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad (18)$$

で定義する。(17)式は領域 V での磁気エネルギー $B^2/2\mu$ の時間微分と J^2/σ なるジュール損の和が境界面 Γ に垂直に加えられたエネルギー $\mathbf{S}$ ($S_{\perp}$ と記す) に等しいことを示している。そして、この $S_{\perp}$ は〔(18)式の定義式より〕面 Γ に平行な $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ ($\mathbf{E}_{\parallel}$, $\mathbf{H}_{\parallel}$ と記す) 成分よりなる。一方、物理的境界条件より、境界に接する領域間で媒質が異なっても $\mathbf{H}_{\parallel}$, $\mathbf{E}_{\parallel}$ 成分は面 Γ で連続なので、 $S_{\perp}$ も Γ で連続した値となる。

ここで比較のため、図1に集中定数系〔(10)式〕、図2に磁界系〔(17)式〕のそれぞれのエネルギー保存関係を示す。図1は、集中定数系では内部エネルギーが端子 a - b で外部エネルギー ($V\dot{q}$) と等しいことを示している。これに対し、磁界系は図2に示すように連続的な広がりをもつ場である。従って、〔(17)式か

図1 R-C回路のエネルギー保存関係

Fig. 1. Relation of energy conservation on R-C circuit.

図2 磁界系のエネルギー保存関係

Fig. 2. Relation of energy conservation on magnetic field.

らも明らかなように)、内部エネルギーの単位と加えられる外部エネルギー ($S_{\perp}$) の単位は異なっている。

(2) 損失項を含むエネルギー汎関数 前項の結果より、損失領域でのエネルギー密度関数 F を次式で定義する。

$$F(\mathbf{A}, \phi) = \frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A})^2 / 2\mu + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right)^2 \quad (19)$$

上式は(17)式右辺項であり、集中定数系で(10)式の両辺を用いた扱いとは異なる。そして

$$\chi(\mathbf{A}, \phi) = \int_V F(\mathbf{A}, \phi) dV \quad (20)$$

なる単位時間でのエネルギー汎関数 $\chi(\mathbf{A}, \phi)$ (煩雑なのでエネルギー汎関数と呼ぶ) を定義する。

次に、上式の変分演算をすれば $\mathbf{A}$ の変分 $\delta\chi_{\mathbf{A}}$ は

$$\delta\chi_{\mathbf{A}}(\mathbf{A}, \phi) = 2 \int_V \left\{ \left[\frac{1}{\mu} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \right] \delta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right\} dV \\ + 2 \int_S \delta \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \left(\frac{1}{\mu} \nabla \times \mathbf{A} \right) \cdot d\mathbf{S} \quad (21)$$

となる。また、 ϕ の変分 $\delta\chi_{\phi}$ は次式で示される。

$$\delta\chi_{\phi}(\mathbf{A}, \phi) = 2 \int_V \left\{ \left[\nabla \cdot \sigma \left(\nabla \phi + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \right] \delta \phi \right\} dV \\ + 2 \int_S \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \delta \phi \cdot d\mathbf{S} \quad (22)$$

上の二つの式で面積分項はそれぞれ磁界およびうず電流の境界条件を満足しているので、変分が0となるには体積分項が0となる必要がある。つまり、(15)、(16)両式が導かれる。

よって、損失を考慮した磁界系でも変分原理に基づく Euler 方程式と (エネルギー保存則より導入された) 汎関数の変分による方程式が一致する。

〈3・4〉 FEM 定式化のための検討 前節より、支配方程式導出には二つの手法があることがわかった。

次に、FEM による定式化の立場で二つの手法を比較する。(12)式の損失関数 $G(\mathbf{A}, \phi)$ の単位は W/m^3 と(2)式の Lagrange 密度関数 $L(\mathbf{A})$ の単位 J/m^3 と異なる。従って、関数 G を密度関数 L に加えることはできず、この関数 L に FEM を適用しても損失項は無視される。

他方、(19)式の汎関数の単位は W/m^3 と(2)式の単位と異なるが、この関数の変分が支配方程式と一致

するので FEM が適用可能である。

4. Lagrange 密度関数の第 2 変分と Legendre の条件

前章までは汎関数の変分が 0 となる停留性に注目し、この停留点で磁界方程式が導かれることを示した。次に、この停留点で汎関数が極小となる点(変分原理)について検討を加える。

まず、汎関数 χ が極小となる条件を明確にする。

〈4.1〉 汎関数の第 2 変分と Legendre の条件

(1) χ が 1 変数、スカラー値関数の場合 簡単のため、次式のように χ が 1 変数でスカラー値関数の場合を考える。

$$\chi(u) = \int_a^b F(x, u, u') dx \quad (23)$$

さて、 $\chi(u)$ の増分 $\Delta\chi(u)$ は関数 $u(x)$ に $h(a)=h(b)=0$ を満足する増分 $h(x)$ を加え

$$\Delta\chi(u) = \chi(u+h) - \chi(u) = \delta\chi(u) + \delta^2\chi(u) \quad (24)$$

で示される。ただし、

$$\delta\chi(u) = \int_a^b (F_u h + F_{u'} h') dx \quad (25)$$

$$\delta^2\chi(u) = \frac{1}{2} \int_a^b (F_{uu} h^2 + 2F_{uu'} h h' + F_{u'u'} h'^2) dx \quad (26)$$

ここで、 $F_u, F_{u'}$ などの記号は、 $F_u: \partial F / \partial u$, $F_{u'u'} = \partial^2 F / \partial u \partial u'$ を示す。

である。

(25) 式は第 1 変分を示し、 $\delta\chi(u)=0$ が停留の条件である。そして、停留となる u の値を $\bar{u}$ とすれば、この $\bar{u}$ で χ が最小となるには

$$\Delta\chi(\bar{u}) > 0 \quad (27)$$

なる条件を満たす必要がある。この条件は (26) 式に示す第 2 変分 $\delta^2\chi(\bar{u})$ が正値となる条件

$$\delta^2\chi(\bar{u}) > 0 \quad (28)$$

と等価である。

(2) 二次関数との類似性 こうした最小条件を二次関数 $f(x): ax^2+bx+c$ で考えてみる。 x の増分を h とすれば $f(x)$ の増分 Δf は次式で示される。

$$\Delta f = a(x+h)^2 + b(x+h) + c - (ax^2 + bx + c) = (2ax+b)h + ah^2 \quad (29)$$

上式より $\bar{x} = -b/2a$ (右辺第 1 項が 0) で極値となる。そして、第 2 項が正値

$$ah^2 > 0 \quad (30)$$

の条件で $x=\bar{x}$ で f が最小となることがわかる。従って、(29) 式で右辺第 1 項が (25) 式、第 2 項が (26) 式

に、また (30) 式は (28) 式に対応していることになる。

(3) 第 2 変分正値の条件 第 2 変分正値の条件は二次関数では (30) 式より $a>0$ となる。これに対し、(23) 式の汎関数では (28) 式に示す正値の条件は次の二つの条件が同時に成り立つことに帰着できる⁽¹⁵⁾。

一つは、(26) 式の (右辺 3 項のうちで値が大きく変動する) 第 3 項が正値という Legendre の条件で次式で示される。

$$F_{u'u'} h^2 > 0 \quad (31)$$

この条件は、また次式でも表現できる。

$$F_{u'u'} > 0 \quad (32)$$

他の一つは

$$\left(F_{uu} - \frac{d}{dx} F_{uu'} \right) u - \frac{d}{dx} (F_{u'u'} u') = 0 \quad (33)$$

なる方程式を満たす解 u が $a < x < b$ の範囲で存在するという Jacobi の条件である。

従って、2 次関数の条件と比較すると (31) 式は (30) 式を拡張したものといえなが、汎関数ではこのほかに (33) 式に示す Jacobi の条件も必要となる。しかし、Jacobi の条件は難解なのでこの論文ではふれず、Legendre の条件のみを検討する。

〈4.2〉 Lagrange 密度関数への適用

(1) Legendre の条件の表現 磁界の汎関数は (1) 式に示すように多変数 (x_1, x_2, x_3) のベクトル $\mathbf{A}$ (成分は A_1, A_2, A_3) の関数である。このため〈4.1〉節 (1) 項での関数 u の増分の微分 h' に対し、関数 $\mathbf{A}$ の増分の微分 $\mathbf{h}'$ は

$$\mathbf{h}' = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \right]^t \quad (34)$$

ただし、 t : 転地操作

なる 9 成分である。また、前節の汎関数の微分項 $F_{u'u'}$ に対し、ここでは次式のように九次元の微分行列 M で表わされる。

$$M = \begin{matrix} & D_1^1 & D_2^1 & D_3^1 & D_1^2 & D_2^2 & D_3^2 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 \\ \begin{matrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_1^3 \\ D_2^3 \\ D_3^3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ & 1 & & -1 & & & & & \\ & & 1 & & & & -1 & & \\ -1 & & & 1 & & & & & \\ 1 & & & & 1 & & & & 1 \\ & & & & & 1 & & -1 & \\ -1 & & & & & & 1 & & \\ & & & & & -1 & & 1 & \\ 1 & & & & & & 1 & & 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

$$\times \frac{1}{\mu} \dots\dots\dots (35)$$

ただし, $D_{ji} \equiv \partial A_i / \partial x_j$, 空白要素は 0 を示す

なお, 上式は直角座標系を仮定し, $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ のゲージ条件を考慮し汎関数に $(\nabla \cdot \mathbf{A})^2 / 2\mu$ 項を加えている⁽⁴⁾。

従って, (31) 式の条件は $Fu'u'h^{1/2}$ に対する項の値を $f(\mathbf{h}')$ とすれば,

$$f(\mathbf{h}') = \mathbf{h}'^t M \mathbf{h}' > 0 \dots\dots\dots (36)$$

と二次形式で表わされる⁽¹⁶⁾。そして, 任意の $\mathbf{h}'$ の増分に対し上式が成立するには

$$|M| > 0 \dots\dots\dots (37)$$

なる M の行列式が正值となればよい⁽¹⁷⁾。これは 1 変数関数での (32) 式が拡張した Legendre の条件である。

(2) 微分行列の固有値と退化次数 そこで, $|M|$ を求めると μ の値によらず $|M| = 0$ となり, (37) 式の条件は成立しない。

さて, 一般に対称行列で 0 値の固有値の数を退化次数と言⁽¹⁸⁾, この退化次数が 0 でない場合この行列の行列式は 0 となる。(35) 式に示す微分行列 M の固有値は (μ の値, 直交座標系によらず) 0 値が 5 個, 正值が 4 個であり, 微分行列 M の退化次数は 5 となる。このため Legendre の条件が成立しない。

〈4.3〉 磁界系での Legendre の条件 微分行列 M の退化次数は 5 であるから, この行列 M および関数 $\mathbf{A}$ の増分の微分 $\mathbf{h}'$ [(34) 式] はいずれも四次元空間で表わされることを示している。これはベクトル関数 $\mathbf{A}$ において, $\nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{B}$ なる回転量と $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ (ゲージ条件) の発散量を規定するのに 9 個の微分演算成分でなく, 4 個の式で表現可能である⁽¹⁹⁾ ことに対応している。

そこで, 九次元から四次元への空間の変換について以下述べることにする。

(1) 二次形式の変換 (34) 式の増分の微分項 $\mathbf{h}'$ について, 次式に示すアフィン変換を行なう [以降の展開は主として文献(20)による]。

$$\mathbf{h}' = T \mathbf{k}' + \mathbf{q} \dots\dots\dots (38)$$

ただし, T : 行列 M の固有ベクトルを列ベクトルとする直交行列, $\mathbf{k}'$: 変換された空間での増分の微分, $\mathbf{q}$: 任意の定数ベクトル

上式右辺第 1 項は線形変換, 第 2 項は定数項である。この変換は定数ベクトル $\mathbf{q}$ により空間座標の原点が移動し, 直交行列 T により空間の次元が九次元から四次元になることを示している。二次元から一次元への変換の例を図 3 に示す。

図 3 二次元アフィン変換の例

Fig. 3. Example of 2 dimensional Affin transformation.

このアフィン変換により(36)式の $f(\mathbf{h}')$ は

$$f(\mathbf{h}') = \mathbf{k}'^t (T^t M T) \mathbf{k}' + 2 \mathbf{b}^t \mathbf{k}' + c \dots\dots\dots (39)$$

となる。ただし, $\mathbf{b}$, c は次のように定義している。

$$\mathbf{b} = T^t M \mathbf{q} \dots\dots\dots (40)$$

$$c = \mathbf{q}^t M \mathbf{q} \dots\dots\dots (41)$$

ここで,

$$\mathbf{b} = 0 \dots\dots\dots (42)$$

を仮定すると, (39) 式右辺第 1 項は固有値を要素とする対角行列なので

$$f(\mathbf{h}') = \sum_{i=1}^4 a_i k_i'^2 + c \dots\dots\dots (43)$$

ただし, a_i : 固有値

となるが, a_i は正值なので $f(\mathbf{h}') > c$ が成立する。

(2) Legendre の条件の成立 (42) 式が成立するには (40) 式より

$$K \mathbf{q} = 0, \quad K \equiv T^t M \dots\dots\dots (44)$$

を満たす $\mathbf{q}$ を求めればよいことになる。従って, (38) 式の空間の原点移動の定数ベクトル $\mathbf{q}$ は (42) 式の条件より決定される。

さて, (44) 式は同次方程式なので $\mathbf{q}$ の成分値で 5 個は任意の数でよい。例えば, $\mu = \mu_0$, $q_5 = 1$, $q_6 \sim q_9 = 0$ とした場合 $\mathbf{q} = [0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 0]^t$ なる解を得る。この $\mathbf{q}$ の値を (41) 式に代入すれば, (43) 式に示す c の値が決定される。この例では

$$c = 0 \dots\dots\dots (45)$$

となる。 $\mathbf{q}$ の別の解でも成立を確認しており, 上式の関係は (42) 式と共に成り立つと言える。

よって, (45) 式の c の値より (43) 式の $f(\mathbf{h}')$ は

$$f(\mathbf{h}') = \sum_{i=1}^4 a_i k_i'^2 > 0 \dots\dots\dots (46)$$

となる。すなわち, アフィン変換により $f(\mathbf{h}')$ は正值となる。さて, 磁界系での Legendre の条件は (36) 式であるから, 結局 (46) 式がこの条件を満足している

図 4 二次元での $f(h')$ の変換例

Fig. 4. Example of transformed $f(h')$ at 2 dimension.

ことになる。

ここで、アフィン変換により Legendre の条件が成立することの直観的説明のため、二次曲面の例を図

$$M = \begin{matrix} & D_1^1 & D_2^1 & D_3^1 & D_1^2 & D_2^2 & D_3^2 & D_1^3 & D_2^3 & D_3^3 & \phi_1 & \phi_2 & \phi_3 \\ \begin{matrix} D_1^1 \\ D_2^1 \\ D_3^1 \\ D_1^2 \\ D_2^2 \\ D_3^2 \\ D_1^3 \\ D_2^3 \\ D_3^3 \\ \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{matrix} & \left[\begin{array}{cccccccccccc} C & & & & & & & & & & & \\ & C & -C & & & & & & & & & \\ & & C & & & & -C & & & & & \\ & -C & & C & & & & & & & & \\ C & & & & C & & & & & C & & \\ D_3^2 & & & & & C & -C & & & & & \\ D_1^3 & & -C & & & & C & & & & & \\ D_2^3 & & & & & & -C & C & & & & \\ D_3^3 & C & & & C & & & & C & & & \\ \phi_1 & & & & & & & & & 2\sigma & & \\ \phi_2 & & & & & & & & & & 2\sigma & \\ \phi_3 & & & & & & & & & & & 2\sigma \end{array} \right] \end{matrix} \dots\dots\dots (48)$$

$$C \equiv j 2 \omega / \mu, D_j^i \equiv \partial A_i / \partial x_j, \phi_j \equiv \partial \phi / \partial x_j$$

なる対称行列となる。上式は Lorentz ゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} + \mu \sigma \phi = 0$) および Coulomb ゲージ ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) による付加項の相違⁽⁴⁾があっても同一成分をもつ。

そして、 $|M|=0$ であるが、 M の固有値は複素数なので(4.2)節の論理は適用できない(4.2)節では固有値はすべて実数)。そこで汎関数の性質を調べると、(19)式の右辺第1項は磁気エネルギーの時間微分項である。この項は境界面で他の領域との磁気エネルギーを交換しており、図5のように時間的に正、負値をとる。従って、(20)式の汎関数 χ は変動し、極小条件が成立しないと考えられる。

このように、(20)式の汎関数は(変分により支配方程式を導けるが)第2変分が極値をとらない特異な性質をもつ。

4に示す。図において、二次元空間 $h_1'-h_2'$ では $f(h')$ は直線 l 上で一定値なので極小条件を満たさない。そこで、一次元の h_1' 空間にアフィン変換すると二次曲線となり極小条件を満たすことになる。

5. ジュール損領域での汎関数の Legendre の条件

〈5.1〉 汎関数の特殊性 次に、(20)式で新たに定義した損失領域での汎関数 $\chi(\mathbf{A}, \phi)$ の Legendre の条件を調べる。関数は A_1, A_2, A_3, ϕ と4成分なので、関数の増分の微分 h' は

$$h' = \left[\frac{\partial h_1}{\partial x_1} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \frac{\partial h_2}{\partial x_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_3} \right] * \left[\frac{\partial h_4}{\partial x_1} \frac{\partial h_4}{\partial x_2} \frac{\partial h_4}{\partial x_3} \right]^t \dots\dots\dots (47)$$

と12成分となる。そして、(35)式に対応した微分行列 M は

〈5.2〉 時間平均による Legendre の条件の成立 さて、電磁ポテンシャル $\mathbf{A}, \phi$ の時間項を $\exp(j\omega t)$ とすれば、複素共役 $\tilde{\mathbf{A}}, \tilde{\phi}$ の時間項は $\exp(-j\omega t)$ である。

ここで、(20)式の汎関数の時間平均 $\bar{\chi}$ を $\mathbf{A}, \phi$ の関数の複素共役との積と定義する。(20)式第1項は

$$d/dt \{ (\nabla \times \mathbf{A}) \cdot (\nabla \times \tilde{\mathbf{A}}) \} = 0 \dots\dots\dots (49)$$

となり、従って $\bar{\chi}$ は

$$\bar{\chi} = \int_V \sigma \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \nabla \phi \right) \cdot \left(\frac{\partial \tilde{\mathbf{A}}}{\partial t} + \nabla \tilde{\phi} \right) dV \dots (50)$$

となる。つまり、境界面に加えられたエネルギー S はすべてジュール熱になることを意味している。

さて、 $\bar{\chi}$ の微分行列 M は(48)式の複素数成分を0とした行列となり、対角成分のみをもつ。0以外の固

図 5 磁気エネルギーの時間微分

Fig. 5. Time differentiation of magnetic energy.

有値は 3 個で 2σ となるので、〈4・3〉節(1)項の論理を適用できる。

(44)式に示す行列 T の要素は $t_{10,10}, t_{11,11}, t_{12,12} = 2\sigma$ 以外は 0 なので、この同次方程式より

$$\mathbf{q} = [\times \times \times \times \times \times \times \times 0 \ 0 \ 0]^T \dots (51)$$

ただし、 $\times$: 任意の実数

なる解が得られる。そして、この $\mathbf{q}$ を(41)式に代入し(45)式を得る。よって、(46)式に対応し

$$f(\mathbf{h}') = 2\sigma \sum_{i=1}^3 k_i'^2 > 0 \dots (52)$$

となり、時間平均した汎関数は Legendre の条件を満足する。従って、損失領域での汎関数は(時間平均操作により)ジュール損が極小となることを意味する。

6. 検 討

〈6・1〉 ϕ の位置づけ

(1) ϕ の作用 時間平均した汎関数 χ の微分行列 M の要素は $\phi_i (= \nabla \phi)$ 項だけである。よって、ジュール損が極小となるのは ϕ の作用と言える。うず電流問題での ϕ の意味づけに関しては Lorentz ゲージを用いることで説明可能であるとの著者らの報告がある⁽⁴⁾。しかし、このジュール損極小作用はゲージに無関係であり、 ϕ の作用として基本的な概念であると言える。

(2) ϕ の源泉について 次に、 ϕ の源泉が導体と絶縁層との境界で生じる電荷密度 ρ とする報告⁽²¹⁾⁽²²⁾〔文献(4)で言及しているが〕に関して述べておく。もし、この ρ が実在するなら(2)式の Lagrange 密度関数に $\rho\phi$ なる項を加える必要がある⁽²⁾。しかし、この項を付加した汎関数の変分からは磁界系の支配方程式は得られず(磁界系では ρ を含む式は存在しない)、 ρ が実在する仮定に誤りがあることを示している。

〈6・2〉 二次元問題と ϕ の関係 二次元問題(励磁電流 $\mathbf{J}$ が閉ループの解析モデルを対象とする)で

は $\mathbf{A}$ の成分は一つで $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ が成立するので ϕ を導入する必要はない⁽²³⁾。よって、(50)式の χ の微分行列 M は 0 要素なので Legendre の条件は成立せず、ジュール損の極小値は存在しない。これは、ジュール損が $\sigma(j\omega \mathbf{A})^2$ と一定値であることに対応している。

〈6・3〉 定電流場での ϕ について 次に、定電流場でのジュール損について調べてみよう。汎関数 $\chi(\mathbf{j})$ は $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ なる付帯条件の下で

$$\chi(\mathbf{j}) = \int_V (\mathbf{j}^2/\sigma - 2\phi \nabla \cdot \mathbf{j}) dV \dots (53)$$

で与えられる (2ϕ は Lagrange 乗数)⁽²⁴⁾。この汎関数の増分 $\Delta\chi(\mathbf{j})$ は

$$\Delta\chi(\mathbf{j}) = \delta\chi(\mathbf{j}) + \delta^2\chi(\mathbf{j}) \dots (54)$$

$$\delta\chi(\mathbf{j}) = 2 \int_V (\mathbf{j}/\sigma - \nabla\phi) \delta\mathbf{j} dV \dots (55)$$

$$\delta^2\chi(\mathbf{j}) = 2 \int_V (\delta\mathbf{j})^2/\sigma dV \dots (56)$$

であり、停留点 $\delta\chi = 0$ より

$$\mathbf{j} = -\sigma \nabla\phi \dots (57)$$

が導かれ、しかも(56)式より $\Delta\chi > 0$ が成立する。

つまり、ジュール損が極小となるには定電流 $\mathbf{j}$ は ϕ のこう配として表わされ、この ϕ で $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ なる付帯条件も満足する。これについて準定常磁界系では、〈5・3〉節で ϕ によるジュール損極小作用を示し $\nabla \cdot \mathbf{j} = 0$ を満たすため、 ϕ が存在することは Lorentz ゲージを用いて著者らが報告している⁽⁴⁾。このように定電流場での ϕ の概念が準定常磁界系へ拡張されている。

〈6・4〉 従来の汎関数との比較 従来報告されている汎関数 $\chi(\mathbf{A}, \phi)$ は

$$\chi(\mathbf{A}, \phi) = \int_V \left[\frac{(\nabla \times \mathbf{A})^2}{2\mu} + \frac{(\nabla \cdot \mathbf{A})^2}{2\mu} + \frac{j\omega\sigma}{2} (\mathbf{A} + \nabla\phi)^2 \right] dV \dots (58)$$

で示される(文献では右辺第2項が省略してある例も含む)⁽⁶⁾⁽⁷⁾。右辺第1, 2項の意味が明らかなのに対し、第3項は損失項に類似しているが物理的意味づけは不明である〔損失項ならば(12)式である〕。しかも、Legendre の条件より導かれる微分行列 M は、(48)式の行列と異なり複素数の要素が D_{ji} 項ではなく ϕ_i 項にある。そして、 $|M| = 0$ で M の固有値は複素数である。また、〈5・2〉節と同じ時間平均操作でも M の要素は変わらない。従って、従来提案されている(58)式の汎関数は(この汎関数による有限要素法解に妥当性があるにしても) Legendre の条件を満足せず、損失に類似した項の意味および ϕ の作用について説明が困難な関数である。

7. あとがき

以上の結果, 次の点が明らかになった。

(1) ジュール損による項は (Euler 方程式には加えられるが), 汎関数に組入れることができず, 有限要素法ではその損失項の影響を含めることができない。

(2) エネルギー保存則より定義した新たな汎関数の変分より支配方程式が導ける。

(3) この新しい汎関数は時間平均操作により Legendre の条件を満足する。つまり, 損失系では「拡張された」変分原理が成立すると言える。

(4) スカラポテンシャル ϕ には, ゲージによらずジュール損を極小とする作用があると説明できる。

(5) 従来の汎関数は (有限要素法解は妥当であるが) Legendre の条件を満足せず, 損失項の意味, ϕ の作用について説明ができない。

なお, 他の分野でも (損失を含む系の変分原理を明確にする際) ここに述べた手法は有効であると考え

(昭和58年10月26日受付, 同59年4月3日再受付)

文 献

- (1) 例えば, 中田, 他: 電気工学の有限要素法 (昭 57) 森北出版
- (2) ゴールドスタイン: 古典力学, p. 428 (昭 43) 吉岡書店
- (3) C. S. Biddlecombe, et al.: "Methods for eddy current computation in three dimensions", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-18**, 492 (1982)
- (4) 長谷部, 他: 「うず電流を含む三次元磁界解析の定式化—スカラーポテンシャル ϕ の性質—」, 電学論 A, **103**, 659 (昭 58-12)
- (5) M. V. K. Chari, et al.: "Finite Element Analysis of The Skin Effect in Current Carrying Conductors", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-13**, 1125 (1977)
- (6) 奥田: 「有限要素法による進行波磁界およびうず電流解析」, 電学論 B, **96**, 377 (昭 51-8)
- (7) K. Ito, et al.: "Simulation for Design Purposes of Magnetic Fields in Turbine-Driven Generator End Region", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, **PAS-99**, 1586 (1980)
- (8) ゲリファント: 変分法, p. 120 (昭 49) 総合図書
- (9) ゲリファント: 同上, p. 203 (昭 49) 総合図書
- (10) ゲリファント: 同上, p. 211 (昭 49) 総合図書
- (11) ゴールドスタイン: 古典力学, p. 52 (昭 43) 吉岡書店
- (12) ゴールドスタイン: 古典力学, p. 26 (昭 43) 吉岡書店
- (13) ランダウ: 電磁気学 1, p. 245 (昭 48) 東京図書
- (14) ストラットン: 電磁理論, p. 112 (昭 50) 生産技術センター
- (15) L. E. Elsgolc: 科学者・技術者のための変分法, p. 117 (昭 47) ブレイン図書
- (16) ゲリファント: 変分法, p. 122 (昭 49) 総合図書
- (17) 寺沢: 自然数学者のための数学概論 応用篇, p. 413 (昭 42) 岩波
- (18) 赤: 微分学+積分学, p. 93 (昭 48) 日本評論社
- (19) ニッカーソン: 現代ベクトル解析, p. 130 (昭 45) 岩波
- (20) 田坂: 「2 次形式 I」, 講座基礎数学, p. 32 (昭 51) 岩波
- (21) M. L. Brown: "Calculation of 3-Dimensional Eddy Currents at Power Frequencies", *IEE Proc.*, **129**, Pt. A, 46 (1982)
- (22) James H. McWhirter: "Computation of Three-Dimensional Eddy Currents in Thin Conductors", *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-18**, 456 (1982)
- (23) 長谷部・鹿野: 「円筒形単相誘導電磁ポンプのうず電流・体積力解析」, 電学論 B, **102**, 177 (昭 57-3)
- (24) ランダウ: 電磁気学 1, p. 124 (昭 48) 東京図書