有限・境界要素併用法による三次元開領域 磁界解析

正 員 横 井 利 彰 (早稲田大)

准 員 熊 谷 努 (早稲田大)

正 員 小 貫 天 (早稲田大)

1. ま え が き

最近の数値解析手法の進歩は目覚ましく、多岐にわたる分野で多大なる成果を収めている。現在、最も汎用性の高い手法には有限要素法があり、多媒質有限空間内問題に対して特に威力を発揮している。他方、単媒質の Laplace 場に対する解析手法には、電荷重畳法、表面電荷法、境界要素法などがある。電荷重畳法は計算プログラムが簡便で処理時間が短い特徴をもつが、仮想電荷の設定には経験的な知識を要する。また、表面電荷法は離散化 Fredholm 方程式に基づいた境界解法であり、電界解析に対して特に有力である。

これらの手法と共に、近年特に注目されている境界要素法は境界積分方程式法的一种である。境界条件はポテンシャルまたは流束のいずれかを与え、他方を未知とする。流束を電界・磁界などの物理量に対応させることにより、所望する量を直接得ることができる。更に、ポテンシャル値を扱うため、有限要素法との結合⁽¹⁾が容易なことも大きな利点である。著者らは先に、二次元境界要素法における 0-1 次混合離散化法を提案し⁽²⁾、その本質的妥当性を示すと共に、他の離散化手法との比較を行なった。そして、この方法は有限要素法との結合が容易であることを示した。更に、境界要素法の三次元化に伴う境界条件の処理の問題および考察点の扱い方などについて検討し、0 次要素、1 次要素、0-1 次混合要素の各離散化手法による計算結果の比較検討を行なった⁽³⁾。また、三次元境界要素法を静電界問題⁽⁴⁾、空心コイルの磁気シールド問題⁽⁵⁾

に対して応用している。

現在までのところ、磁界の三次元数値解析に関する論文は次のものがある。三次元有限要素法を単独で用いた例は数多く、ダブルスカラーポテンシャルによる静磁界解析⁽⁶⁾(材料の非線形性を考慮)、磁気ベクトルポテンシャルによるうず電流解析⁽⁷⁾などがある。他方、積分方程式法によるものには薄板うず電流近似によって解析した例があり⁽⁸⁾、境界要素法において、磁束密度で定式化した例もある⁽⁹⁾。また、有限要素法と Fredholm 積分方程式法とを結合した解析例もある⁽¹⁰⁾。しかし、著者らの知る限りでは三次元解析において有限要素法と境界要素法とを結合した例はいまだ見受けられない。

本論文は、三次元無限空間内の磁界解析手法としての有限要素 (1 次)・境界要素 (0-1 次) 結合解法の定式化について述べるものである。特に、ベクトルポテンシャルを用いる三次元有限要素法の境界積分項の取扱い方に対し、ダイアディック量を導入して境界要素法との接合を一般化する方法を提案する。三次元有限・境界要素併用法の計算精度は、理論解のある例題を取上げて検討する。更に、応用例として磁気シールドされた空心コイルの磁界解析を行ない、三次元境界要素法による計算結果との比較検討を行なうものとした。

2. 有限・境界要素併用法の概要

〈2・1〉 特 質 有限要素法と境界要素法との結合解法は、以下に示す各手法の特徴を生かしたものである。

(1) 有限要素法は電流入力や材質の混在、うず電流を比較的容易に扱うことができる。その反面、無限空間を扱うためには様々な近似が必要である。例えば、外部領域法⁽¹¹⁾、半無限要素法⁽¹²⁾、ハイブリッド有限要素法⁽¹³⁾などがある。ただし、これらの手法は外

Three-Dimensional Analysis of Magnetic Field with Opened-Space using Hybrid Finite-Element and Boundary-Element Method. By Toshiaki Yokoi, Member, Tsutomu Kumagai, Associate & Takashi Onuki, Member (Department of Electric Engineering, Waseda University)

横井利彰: 正員, 早稲田大学大学院理工学研究科
熊谷 努: 准員, 早稲田大学大学院理工学研究科
小貫 天: 正員, 早稲田大学理工学部電気工学科

部領域のポテンシャルを低次式で近似するため、その微分値である磁束密度の計算精度は必ずしも高くない。

(2) 境界要素法は、均質中の Laplace 場に関して領域における解析問題をその境界値問題に帰着させることができる。このため本質的に無限空間に及ぶ磁界問題に対しては特に有用な手法である。境界要素法の性質として、解析領域内でのポテンシャルおよびその微分量の計算精度が高いことがあげられる⁽⁵⁾。このため、境界要素法を外部領域の解析手法として採用する場合には、漏れ磁界を高い精度で算出できることになる。また、発散源を考慮すれば Poisson 問題に対しても適用できる。

これら二手法を結合する有限・境界要素併用法 (Hybrid FE・BE method) は、三次元無限空間に及ぶうず電流問題や非線形・ヒステリシス問題にも容易に対応できることになる。これは、今までの他の手法にはない重要な特徴であり、これからの解析手法の主幹を成すものと期待される。

以下の説明では、図1に示すように有限要素法 (FEM) が担う領域を Ω_F 、境界要素法 (BEM) が担う領域を Ω_B 、両者の共通境界を Γ と呼ぶことにする。

〈2.2〉 解析変数の選択 各領域の場を表わす量は解析の目的および解析対象の構成によって適切なものを選ぶことが必要である。磁界解析の場合、例えば次のものが考えられる。

(a) 磁気ベクトルポテンシャル (両領域とも)

FEM, BEM 各領域ともに同一量を扱う。このため両手法の接合条件は、磁気ベクトルポテンシャルとその法線方向微分値の連続性であり、処理が容易となる (二次元解析例では文献⁽¹⁴⁾)。

(b) 磁気ベクトルポテンシャルと磁気スカラーポ

テンシャル 電流が存在しない外部領域の磁界をスカラーポテンシャルで表わす。境界上の流束は磁界に対応する⁽¹⁵⁾。

(c) ダブルスカラーポテンシャル 全領域を磁気スカラーポテンシャルにより表わす。非線形・ヒステリシス特性のある領域は有限要素法を適用する。ただし、うず電流問題への対応は容易ではない。

(d) 電流ベクトルポテンシャルと磁気スカラーポテンシャル うず電流問題に関して有効である。導体領域中のうず電流をベクトルポテンシャルによって表現し、外部磁界はスカラーポテンシャルで表わす。電流入力値は磁界条件によって表現する。電流ベクトルポテンシャルは磁界と同次元であり、磁気ベクトルポテンシャルによる解析と同次数の離散化を行なう場合には、より詳細な表現が可能となる。

本論文の三次元有限・境界要素併用法では説明のために接合条件が簡潔である (a) 項を採用するものとした。そして接合処理を一般化するために、ダイアディック量の導入を提案する。

3. 三次元有限・境界要素法

〈3.1〉 三次元有限要素法の定式化 本論文における三次元有限要素法の定式化方法としては、重み付き残差法の一つである Galerkin 法を用いるものとした。以下にその過程を示す。

(a) 支配方程式の導出 良く知られるように、Maxwell の方程式より導かれる静磁界の方程式は磁気ベクトルポテンシャルを用いて次式のように表わされる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = \mathbf{J}_0 \quad (\mathbf{J}_0: \text{強制電流}) \dots\dots (1)$$

ここで、もし磁性材の磁化特性に異方性がある場合を考えるならば、(1)式の ν はテンソル量となる。

磁性材の性質が等方性である場合には(1)式を変形して次式を得る。

$$\nabla \nu \times (\nabla \times \mathbf{A}) + \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_0 \dots\dots\dots (2)$$

第1項は、有限要素法における離散化過程において、要素内で透磁率を一定と設定する場合には無視できる項である。よって次式となる。

$$\nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = \mathbf{J}_0 \dots\dots\dots (3)$$

磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の一意性を保証するためには、ゲージ条件を与えねばならない。二次元解析の場合には、自動的に Coulomb gauge ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) が満たされたが、三次元解析においてはゲージ条件を定式化の過程で考慮する必要がある。静磁界、準定常磁界解析において適当なゲージ条件は、Coulomb gauge である。そこで、離散化後の線形方程式に対し

図1 有限・境界要素併用法の領域分担

Fig. 1. Model domains and common boundary of hybrid finite-element and boundary-element method.

て、要素ごとの拘束条件 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) を与える方法を適用する必要がある。これに関しては(項)節で述べる。

以上の操作を行なうことで、支配方程式を根幹とした定式化における磁気ベクトルポテンシャルの一意性の問題は解決される。一方、著者らは別の定式化として磁界のエネルギー汎関数の停留化による方法も行なっている。この場合の磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の一意性の問題は、Lagrange 乗数法または Penalty 法を用いて、拘束条件 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) を汎関数に組み込むことで解決され、Galerkin 法と同じ結果となる。

(b) Galerkin 法による定式化 いま、領域 Ω_F において、次の偏微分方程式を満たすベクトル関数 $\mathbf{A}$ を求めることを考える。

$$L(\mathbf{A}) - \mathbf{J}_0 = 0 \quad (L: \text{線形演算子}) \quad \dots\dots (4)$$

$\mathbf{A}$ として、近似関数 $\tilde{\mathbf{A}}$ を採用した場合の上式の残差 R_e を次式で定義する。

$$R_e = L(\tilde{\mathbf{A}}) - \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots (5)$$

以下の展開では、 $\mathbf{A}$ は近似関数であるとする。ここで、境界 Γ 上の境界条件を完全に満たす近似関数を適用することにすれば、次の重み付き残差表示を得る。

$$\langle N \cdot R_e \rangle^{(e)} = 0 \quad \dots\dots (6)$$

ただし、 N : 補間関数、 $\langle \rangle^{(e)}$: 領域 Ω_F

要素 (e) 内の領域積分

いま L として、等方性媒質中の線形偏微分演算子を考える。

$$L(\mathbf{A}) = \nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} \quad \dots\dots (7)$$

これを用いて(6)式を書き改めると次式を得る。

$$\langle N(\nu \nabla \times \nabla \times \mathbf{A} - \mathbf{J}_0) \rangle^{(e)} = 0 \quad \dots\dots (8)$$

これに、弱形式化の操作を施せば(9)式となる (付録(I)参照)。

$$\begin{aligned} & [\nu N \{ \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \}]^{(e)} - \langle N \mathbf{J}_0 \rangle^{(e)} \\ & + \langle \nabla(\nu N) \cdot \nabla \mathbf{A} - \nabla_A \{ \nabla(\nu N) \cdot \mathbf{A} \} \rangle^{(e)} \\ & = 0 \quad \dots\dots (9) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{n}$: 領域外向き単位法線ベクトル、

$[\]^{(e)}$: 要素 (e) の境界上積分

∇_A は $\mathbf{A}$ に関してのみ ∇ が作用することを意味する。 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ は直交座標系における共変導関数を表わす ($\mathbf{A} \cdot \mathbf{n} = \partial \mathbf{A} / \partial n$)。

(c) 境界要素法との接合に適した境界積分形式 境界要素法では、ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ とその法線方向微分量 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ とを区別して扱う。このことから、有限要素法と境界要素法との接合を一般化するためには、有限要素法の境界積分項を $\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}$ とその他の量とに分離することが必要となる。ここで(9)式第1項に対して、新たにダイアディック量 Φ の導入を提

案する (付録(II)参照)。

$$\begin{aligned} & [\nu N \{ \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \}]^{(e)} \\ & = [\nu N \{ \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \Phi \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \}]^{(e)} \\ & + [\nu N (\Phi - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{n}]^{(e)} \quad \dots\dots (10) \end{aligned}$$

ただし、 $\mathbf{I}$: 単位ダイアディック

この場合の Φ の成分は、「(10)式第1項が常に $\mathbf{A}$ の法線方向微分項を含まない」との要請により、例えば次の成分を考えることができる。

$$\begin{aligned} \Phi &= i i n_x^4 + j j n_x^3 n_y + i k n_x^3 n_z \\ &+ j i n_x n_y^3 + j j n_y^4 + j k n_y^3 n_z \\ &+ k i n_x n_z^3 + k j n_y n_z^3 + k k n_z^4 \\ &\quad \dots\dots (11) \end{aligned}$$

ただし、 n_x, n_y, n_z : 三次元境界要素の単位

法線ベクトルの x, y, z 成分

以上のように、ダイアディック量 Φ の導入によって有限要素法の境界積分項における $\mathbf{A}$ の法線方向微分項の分離を行なうことができる。これによって、三次元空間において任意の部分空間を成す境界要素における有限要素法と境界要素法の接合が可能となる。つまり、接合面が座標面と平行でなければならないといった拘束を受けることがない。従って、例えば材質境界に沿った境界要素の設定ができるため、有限要素領域の削減に貢献し、そのぶん更に詳細な解析ができることになる。

(d) 有限要素領域の離散化 有限要素法による解析対象の離散化過程において、磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の各成分を一次式で表わすものとする。このとき、 $\mathbf{A}$ の一成分 A_m は次式で示される ($m = x, y, z$)。

$$A_m \triangleq [N] \{ A_m \} \quad \dots\dots (12)$$

ただし、 $\{ A_m \}$: 各節点上のベクトルポテンシャルの列ベクトル、 $[N]$: 各節点の補間関数の行ベクトル

また、境界面上の流束 $A_{m,n}$ に関しては、一定要素を採用し、境界上の流束の列ベクトル $\{ A_{m,n} \}$ を用いて表わす。

$$A_{m,n} = \{ A_{m,n} \}_F \quad \dots\dots (13)$$

(10), (12)式, (13)式を(9)式に代入すれば、次の離散化方程式が得られる。

$$\begin{aligned} & \left[\nu [N]^T \sum_m \left\{ m \left(\sum_p n_p \left[\frac{\partial N}{\partial m} \right] \{ A_p \} \right. \right. \right. \\ & \quad \left. \left. \left. - \left[\sum_p \left\{ \Phi_{mp} \sum_q \left(n_q \left[\frac{\partial N}{\partial q} \right] \right] \{ A_m \} \right] \right\} \right) \right\} \right]^{(e)} \\ & + \left[\sum_m (i_m [\alpha] \{ A_m \}) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \sum_m \left\{ \nu i_m \sum_p \left(\left[\frac{\partial N}{\partial p} \right]^T \left[\frac{\partial N}{\partial m} \right] \{A_p\} \right) \right\}^{(e)} \\
& - \langle [N] J_0 \rangle^{(e)} \\
& + \left[\sum_m \left\{ i_m \sum_p (\Phi_{mp} - I_{mp}) \{A_p\} \right\} \right]^{(e)}
\end{aligned} \quad (14)$$

ただし、 i_m : m 方向単位ベクトル, n_p : n の p 方向成分, Φ_{mp} , I_{mp} : Φ , I の mp 成分。

$m=x, y, z$, $p=x, y, z$, $q=x, y, z$

(14)式を、行列形式に書き改めると次の線形連立方程式を得る。

$$[K]\{A\} + [L]\{A, n\}_F = \{F\} \quad (15)$$

各行列の次元は以下のとおりである。

$$K(3N_F, 3N_F), L(3N_F, 3L_B), F(3N_F)$$

L_F : 有限要素領域 Ω_F 内の要素数

L_B : 境界要素との共通境界 Γ 上の要素数

N_F : 有限要素領域 Ω_F 内の節点数

N_B : 境界要素との共通境界 Γ 上の節点数

(e) 離散化方程式における Coulomb gauge 条件
さきに述べたように、静磁界、準定常状態での磁界解析において適当なゲージ条件は、Coulomb gauge 条件 ($\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$) である。しかし、離散化過程における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は $\mathbf{A}$ の近似関数であるため、零になるとは限らず、一般にある残差 R_q をもつ。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = R_q \quad (16)$$

このため、さき先の重み付き残差表示における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ の項は無視できないことになる。つまり、離散化により支配方程式の残差 R_q および Coulomb gauge の残差 R_q が生じ、これらを同水準で扱うことが必要となる。もしも、 $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$ を代入し支配方程式を成分別の Poisson 方程式とすると、 $\mathbf{A}$ に対して拘束過多状態を生ずることになる⁽¹⁶⁾。実際の計算過程において、Coulomb gauge の拘束を与える方法としては Penalty 法⁽²⁰⁾を採用する。離散化要素における $\nabla \cdot \mathbf{A}$ は次式で与えられる。

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \sum_m \left[\frac{\partial N}{\partial m} \right] \{A_m\} \triangleq [D]\{A\} \quad (17)$$

ただし、 $m=x, y, z$, 行列 D の次元は $D(L_F, 3N_F)$ である。

離散化要素に対する Penalty 法は、拘束条件より導かれる次式を、主方程式(15)に重畳することにより達成される。

$$\lambda [D]^T [D] \{A\} = 0 \quad (18)$$

上式および(15)式の行列 K を用いて、新たに行列 K' を定義する。

$$[K'] \triangleq [K] + \lambda [D]^T [D] \quad (19)$$

ここで λ はPenalty 乗数であり、 $\lambda = \nu_0$ とする場合には Lagrange 乗数法による拘束と一致する⁽¹⁹⁾。有限要素法の最終的な方程式は次式となる。

$$[K']\{A\} + [L]\{A, n\}_F = \{F\} \quad (20)$$

〈3.2〉 三次元境界要素法の定式化 三次元境界要素法の定式化方法には、Green の第2公式に基づく方法、重み付き残差法の一つである Galerkin 法による方法、相互間エネルギーの見地から導出する方法などがある。本論文では Green の第2公式に基づく方法を採用した。以下にその定式化の過程を示す。

(a) 支配方程式の導出 境界要素法の担う領域 Ω_B は、材質が一様で電流のない無限空間である (図1)。

場の支配方程式は次式で表わされる。

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) = 0 \quad (21)$$

境界要素法では、近似解は領域 Ω_B 内で上記の偏微分方程式を満たすものとし、誤差をすべて境界上の諸量に受持させる。そのため領域 Ω_B 内では計算精度が高いが、境界付近での精度はあまり高くない。いま、領域 Ω_B 内で Coulomb gauge を完全に満たすものと定めれば、最終的な支配方程式は Laplace の偏微分方程式となる。

$$\nu \Delta \mathbf{A} = 0 \text{ in } \Omega_B \quad (22)$$

(b) Green の定理による定式化 場の支配方程式として、考察領域 Ω_B に対し次式の三次元 Laplace 方程式を満足するポテンシャル関数 u を考える。

$$\Delta u = 0 \text{ in } \Omega_B \quad (23)$$

u の法線方向微分値として q を定義する。

$$q \triangleq u, n \quad (u, n = \partial u / \partial n) \quad (24)$$

(23)式に対して、Green の第2公式を用いて次式を得る。

$$(\theta/4\pi)u + [uq^*] = [qu^*] \quad (25)$$

ただし、

$$u^* = 1/4\pi r \quad (26)$$

$$q^* = -\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} / 4\pi r^3 = u^*, n \quad (27)$$

ここで u^* : 三次元 Laplace 方程式の基本解, r : 考察点 (Source) から積分を実行する観測点までの距離, n : 観測点における法線ベクトル, θ : 考察点から内部領域 Ω_B をのぞむ立体角 ($0 \leq \theta \leq 4\pi$)。

(22)式を満たす磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ の各成分 AX, AY, AZ を u に対応させれば次式を得る。

$$(\theta/4\pi)A_m + [A_m q^*] = [A_m, n u^*] \quad (28)$$

($m=x, y, z$)

(c) 境界要素領域の離散化 境界要素法による解析対象の離散化過程においては、図3に示す三次元平面0-1次混合要素を採用する。この要素内において、磁気ベクトルポテンシャルの各成分は一次式、その流束は定数で表わすものとする。この0-1次混合要素を用いれば、(28)式から次の線形連立方程式を得る。

$$[H_m]\{A_m\}=[G_m]\{A_{m,n}\}_B \quad (29)$$

ただし、

$$H_m(i, j)=\sum [N_j q^*]^{(e)} \quad (30)$$

$$G_m(i, j)=[u^*]_j \quad (31)$$

ここで、 i : 考察点、 $[]^{(e)}$: 節点 j を取り囲む境界要素上の積分、 N_j : 節点 j の補間関数、 $[]_j$: 境界要素 j 上の積分

これを三成分についてまとめ、次式を得る。

$$[H]\{A\}=[G]\{A_n\}_B \quad (32)$$

〈3.3〉有限要素法と境界要素法の接合 前節までに導いた有限要素法、境界要素法の各連立方程式を以下に再掲する。

$$[K']\{A\}+[L]\{A_n\}_B=\{F\} \quad (20)$$

$$[H]\{A\}=[G]\{A_n\}_B \quad (32)$$

一般に有限要素領域の磁気ベクトルポテンシャルが求まれば解析の目的が達せられる場合が多いため、次の関係を用いて $\{A_n\}$ を消去し、 $\{A\}$ のみの方程式を導くものとする。

ここで、法線方向は各領域で外向きに扱ったので次の関係がある。

$$[A_n, n]_F=-[A_n, n]_B \quad (33)$$

$$[\nu(\nabla \times A) \times n]_F=-[\nu(\nabla \times A) \times n]_B \quad (34)$$

これらの式から、 $[G]$ は正則行列であることが要求され、境界要素法の方程式(32)を作成する際に境界要素数分の考察点を設ける必要のあることがわかる。つまり、境界要素はすべて図2に示す第2種要素(流束が未知)と同じ扱いとなる。

図2 0-1次境界要素とその境界条件

Fig. 2. Mixed 0-1st order boundary elements and its boundary conditions

4. 例題による精度検討

三次元有限・境界要素併用法による計算精度を検討するための例題として、無限空間において方形コイル電流の作る磁束分布を取り上げる(図3)。有限・境界要素併用法を適用するにあたり、解析対象の対称性を利用して有限要素領域の削減を図るものとした。具体的な要素分割は図4(a)、(b)に示すとおりである。算定によって得られた磁束分布図を図5(a)(y - z 平面図)、図5(b)(立面図)に示す。また、計算結果の精度は表1のとおりである。本論文の有限・境界要素併用法では、磁気ベクトルポテンシャル A の一次式近似を行なっている。この解析例のように、要素分割が

図3 解析対象(無限空間中の方形コイル)

Fig. 3. Analytical model (a square-shaped coil in infinite empty space).

図4 三次元要素分割図

Fig. 4. An 3-D element subdivision of analytical domain.

表1 有限・境界要素併用法の計算精度
(方形一巻きコイル)

Table 1. Results of calculation
(Square-Shaped coil).

$z(m)$	磁束密度 z 成分 $B_z[\times 10^{-4}(T)]$ (z 軸上)		
	理論解	3D FE-BE 法	誤差
0.0	3.77	4.10	8.80%
1.0	3.30	3.39	2.66%
2.0	2.36	2.36	0.00%

磁気ベクトルポテンシャル (A_x, A_y 有限要素領域内)
最大誤差 13.16%, 平均誤差 2.43%

図 5 磁束分布 (算定結果)

Fig. 5. Magnetic flux distribution.

比較的粗い状況でも磁気ベクトルポテンシャル A および磁束密度 B_z に関して理論解と良く一致していることがわかる。

5. 磁気シールド問題への応用

さきの例題で、三次元有限・境界要素併用法は基本的に実用上十分な精度をもつことが確認された。しかし、実際の応用対象がこのような均質空間であることはまれであり、複雑で多媒質からなる対象の解析を行なってこそ本手法の威力を発揮できる。そこで、多媒質を含む簡単な応用例として磁気シールド問題を取上げる。ソレノイドおよび磁気シールド体の仕様を図 6, 図 7 に示す。

〈5・1〉 理論解との比較 三次元有限・境界要素併用法の精度を確認するために、理論解が容易に得られる場合として非磁性体でシールドした状態、つまり磁気シールドがない場合に関してまず計算する。図 8 に

図 7 磁気シールド体形状

Fig. 7. Shape of magnetic shield body.

表 2 磁気シールド特性算定結果

Table 2. Results on magnetic shielding performance.

z (m)	磁束密度 z 成分 B_z (T) (z 軸上)				
	磁気シールドなし			磁気シールドあり	
	理論解	3D BE 法	3D FE-BE 法	3D BE 法	3D FE-BE 法
0	3.96	3.73	3.60	3.92	3.88
2.00	2.50	2.44	2.57	2.64	2.86
3.30	1.09	1.18	1.19	1.42	1.54
4.75	0.42	0.49	0.52	0.93	1.11
5.25	0.31	0.35	0.38	5.27×10^{-3}	5.65×10^{-3}
7.00	0.13	0.16	0.18	2.78×10^{-3}	2.80×10^{-3}

図 6 角筒ソレノイド形状

Fig. 6. Shape of square solenoid.

図 8 磁束密度分布 (z 軸上, 磁気シールドなし)Fig. 8. Magnetic flux density distribution (on z -axis, no-shield).

図 9 磁束分布 (磁気シールドなし)

Fig. 9. Magnetic flux distribution (no-shield).

z 軸方向の磁束密度 B_z の z 軸上分布を示し、図 9 にその磁束分布図を示す。数値計算結果は、理論解との良い一致をみている (表 2)。

〈5・2〉 磁気シールド特性の算定 鉄材で磁気シールドした場合に関しては、さきに計算精度を検討済みの三次元境界要素法による算定値と比較するものとした。鉄の比透磁率は 750 とした。図 10 に z 軸方向の磁束密度 B_z の z 軸上分布を示し、図 11 にその磁束分布図を示す。考察領域内での計算精度が高い境界要素法と比較して、相対差の少ない良好な結果を得ることができた (表 2)。

図 10 磁束密度分布 (z 軸上, 磁気シールドあり)
Fig. 10. Magnetic flux density distribution (on z -axis, iron-shield).

図 11 磁束分布 (磁気シールドあり)
Fig. 11. Magnetic flux distribution (iron-shield).

表 2 において, 三次元有限・境界要素併用法に比べて三次元境界要素法のほうが計算精度が高い。この理由は, 有限要素法と境界要素法それぞれの定式化の違いに起因する。有限要素法は支配方程式の残差を領域と境界の双方に分散させ, 全体的な近似度を最良なものとする考え方である。そのため領域における計算誤差は領域でのポテンシャルの近似関数に大きく依存することになる。これに対し, 境界要素法は領域内では微分方程式を完全に満足することを強制するため, 領域内での計算誤差は極めて少ないものとなる。

以上の点を考慮すると, 三次元有限・境界要素併用法における有限要素法, 境界要素法の各手法の分担領域はおのずと定まってくる。有限要素領域は非線形材料や電流などの存在する部分に限定することが望ましく, より高次式で補間し, 細分割すべきである。その他の均質な空間は極力境界要素法によって処理することにより計算精度は向上し, かつ汎用性を保つことができることになる。

本例題では磁気飽和を考慮していないが, 本手法の有限要素法領域に対し, 二次元解析の場合と同様の処

理手続きを行なうことにより, 磁気飽和, うず電流などを考慮することができる。

7. ま と め

本質的に無限空間に及ぶ磁界問題の解析手法として, 0-1 次混合境界要素を用いた三次元有限・境界要素併用法について, 具体的にその定式化を示した。

その際, 有限要素法の境界積分項に, ダイアディックを導入し, 境界要素法との接合を一般化する方法を提案した。また, 解析変数の選択に関して指針を与えた。

本手法の特質は次のようにまとめられる。

(1) 多媒質で電流入力を含む空間は三次元有限要素法を適用するため, 従来と変わらない扱いが可能である。加えて, 境界要素法によって無限空間の影響が正確に反映されるため, インダクタンスなどが精度良く求められる。

(2) 境界要素を 0-1 次混合要素で離散化するため, 1 次要素を用いた有限要素法との結合を直接行なうことができ, 両手法結合の処理手続きを極めて簡潔にする。

(3) 外部空間は境界要素法によって処理するため, 外部漏れ磁界などを高精度で算定可能である。

本手法を基にして, 理論解のある例題について計算精度を検討した結果, 高い計算精度をもつことが確認された。更に, 応用例として磁気シールドされた空心コイルの磁界解析を行なったところ, 三次元境界要素法のみによる計算結果と良い一致をみた。

本論文で提案した三次元有限・境界要素併用法は, 多ループ有限・境界要素併用法 (解析対象の有限要素領域を極力削減する手法) へ発展させることが可能であり, 電気系, 磁気系, 機械系の連携問題の解析において特に威力を発揮するものと考えられる。このために, 大形計算機の処理能力の向上, 新たなアーキテクチャをもつ計算機の開発が望まれるところである。

最後に, 種々御討論いただいた本学の石山敦士助教授に深く感謝いたします。

(昭和 59 年 12 月 25 日受付, 同 60 年 4 月 25 日再受付)

文 献

- (1) O.C. Zienkiewicz, D.W. Kelly & P. Bettles: *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 11, 355 (1977)
- (2) 小貫・石山・小川: 電学論 A 102, 541 (昭 57-10)
- (3) 小貫・横井: 電気学会回転機・静止機合同研資料, RM 83-86, SA 83-37 (昭 58-9)
- (4) 横井・小貫・小川: 同上, RM 84-19, SA 84-3 (昭 59-5)
- (5) 小貫・横井: 電学論 A 104, 669 (昭 59-12)
- (6) J. Simkin & C.W. Trowbridge: *IEE Proc.* 127, Part

- B, 6 (1980)
- (7) T. Morisue: *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-18**, 531 (1982)
- (8) J.H. McWirtter: *ibid.*, **MAG-18**, (1982)
- (9) 美咲・坪井・児伝井: 電気学会回転機・静止機合同研資料 RM 83-7, SA 83-7 (昭 58)
- (10) A. Bossavit & J.C. Verite: *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-18**, (1982-3)
- (11) P.P. Silvester, D.A. Lowther, L.J. Carpenter & E.A. Wyatt: *Proc. IEEE*, **124**, 1267 (1977)
- (12) P. Bettis: *Inter. J. numerical Methods Engn*, **11**, 53 (1977)
- (13) 守屋: 第3回電気電子工学への有限要素法の応用シンポジウム p. 37 (昭 56)
- (14) 小貫・村井・佐藤・高橋: 電気学会回転機研資 RM 84-09 (昭 59)
- (15) 小貫・石山・安部: 電学論A, **103**, 469 (昭 58-9)
- (16) D. Roger: *Proc. IEE*, **130**, Part 5, (1983-7)
- (17) 熊谷・稲常・小貫: 電気学会東京支大 No. 235 (昭 58)
- (18) C.A. Brebbia: "The Boundary Element Method for Engineers", 2nd revised edition, (1980) Pentech Press
- (19) 長谷部・鹿野・青梅: 電学論A, **103**, 181 (昭 58-4)
- (20) K.J. Bathe: "Finite Element Procedures in Engineering Analysis" (1982) Prentice-Hall
- (21) 皆川: 応用ベクトル解析, (昭 50) 朝倉書店

付 録

[I]

ベクトル公式

$$\nabla \times (f \mathbf{a}) = (\nabla f) \times \mathbf{a} + f \nabla \times \mathbf{a} \quad \text{.....(付 1)}$$

$$\mathbf{b} \times \nabla \times \mathbf{a} = \nabla_a(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{a} \quad \text{.....(付 2)}$$

ただし, $\nabla_a: \nabla$ が $\mathbf{a}$ にのみ作用することを意味する。

ベクトルの積分公式

$$\langle \nabla \times \mathbf{a} \rangle_\Omega = [\mathbf{n} \times \mathbf{a}]_\Gamma \quad \text{.....(付 3)}$$

ただし, Ω は閉曲面 Γ によって囲まれた領域, 単位ベクトル $\mathbf{n}$ は Γ に垂直外向きである。

ベクトル公式による弱形式化

(付 1) 式を本文(8)式に適用する。

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) \rangle^{(e)} \\ - \langle \nabla (\nu N) \times \nabla \times \mathbf{A} \rangle^{(e)} - \langle N \mathbf{J}_0 \rangle^{(e)} \end{aligned} \quad \text{.....(付 4)}$$

(付 4) 式第 1 項に(付 3)式を適用すれば,

$$\begin{aligned} \langle \nabla \times (\nu \nabla \times \mathbf{A}) \rangle^{(e)} \\ = [\nu N \mathbf{n} \times (\nabla \times \mathbf{A})]^{(e)} \quad [(\text{付 2}) \text{式を適用}] \\ = [\nu N \{\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{A}\}]^{(e)} \\ = [\nu N \{\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A}, \mathbf{n}\}]^{(e)} \quad \text{.....(付 5)} \end{aligned}$$

(付 4) 式第 2 項に(付 2)式を適用すれば,

$$- \langle \nabla (\nu N) \times \nabla \times \mathbf{A} \rangle^{(e)}$$

$$= \langle \nabla (\nu N) \cdot \nabla \mathbf{A} - \nabla_A \{\nabla (\nu N) \cdot \mathbf{A}\} \rangle^{(e)} \quad \text{.....(付 6)}$$

(付 5), (付 6) 式を(付 4) 式へ代入すれば, 次式(本文(9)式) が得られる。

$$\begin{aligned} [\nu N \{\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A}, \mathbf{n}\}]^{(e)} - \langle N \mathbf{J}_0 \rangle^{(e)} \\ + \langle \nabla (\nu N) \cdot \nabla \mathbf{A} - \nabla_A \{\nabla (\nu N) \cdot \mathbf{A}\} \rangle^{(e)} \\ = 0 \quad \text{.....(付 7)} \end{aligned}$$

[II] FEM 境界積分項の成分 (付 7) 式第 1 項に着目する。

$$[\nu N \{\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \mathbf{A}, \mathbf{n}\}]^{(e)} \quad \text{.....(付 8)}$$

上式では, 法線方向微分項 $A_{m,n} (m=x, y, z)$ が分離されているかのようにみえるが, 実は両項に含まれている。例えば $n_x=1$ の場合について, $\{ \}$ で囲まれたベクトル部分を取り出してみる。

$$\begin{aligned} \nabla_A(A_x n_x) = i \frac{\partial A_x}{\partial x} + j \frac{\partial A_x}{\partial y} + k \frac{\partial A_x}{\partial z} \quad \text{.....(付 9)} \\ - \mathbf{A}, n = -i A_{x,n} - j A_{y,n} - k A_{z,n} \end{aligned} \quad \text{.....(付 10)}$$

このように, (付 9) 式には法線方向微分項 $\frac{\partial A_x}{\partial x}$ (下線部) が含まれる。

ダイアディック量 Φ 導入後の境界積分項の成分 本文(10)式を再掲する。

$$\begin{aligned} [\nu N \{\nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \Phi \cdot \mathbf{A}, \mathbf{n}\}]^{(e)} \\ + [\nu N (\Phi - \mathbf{I}) \cdot \mathbf{A}, \mathbf{n}]^{(e)} \quad \text{.....(付 11)} \end{aligned}$$

上式第 2 項は, $(\Phi - \mathbf{I})$ の内容にかかわらず, 常に法線方向微分項となる。

他方, 第 1 項の $\{ \}$ で囲まれたベクトル部分は以下のようなになる $(\mathbf{A}, \mathbf{n} = \nabla \mathbf{A} \cdot \mathbf{n})$ 。

$$\begin{aligned} \nabla_A(\mathbf{A} \cdot \mathbf{n}) - \Phi \cdot \mathbf{A}, \mathbf{n} \\ = \sum_{\alpha} i_{\alpha} \left((1 - n_{\alpha}^4) \sum_{\beta} \left(n_{\beta} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \alpha} \right) \right. \\ \left. - n_{\alpha}^3 \sum_{\beta} \left[n_{\beta} \sum_{\gamma} \left\{ (1 - \delta_{\alpha\gamma}) n_{\gamma} \frac{\partial A_{\beta}}{\partial \gamma} \right\} \right] \right) \end{aligned} \quad \text{.....(付 12)}$$

ただし, $\delta_{\alpha\gamma}$: Kronecker の δ

$\alpha = \gamma$ の場合 $\delta_{\alpha\gamma} = 1$, $\alpha \neq \gamma$ の場合 $\delta_{\alpha\gamma} = 0$, $\alpha = x, y, z$, $\beta = x, y, z$, $\gamma = x, y, z$, 添字 α, β, γ は α, β, γ 成分を意味する。(付 12) 式では, 例えば $n_{\alpha} = \pm 1$ の場合 α に関する共変導関数が作用する項は消去される。