UDC 517.22: 537.212/.213: 621.3.044

研究開発

ノート

60 - A 5

電位、電界を変数とする有限要素法

正員 加藤正平 (東洋大)

1. はじめに

有限要素法による電界計算は、電荷重量法に比べて計算結果に含まれる誤差の推定や非常に良い精度を得るにはやや困難な欠点がある⁽¹⁾。高精度の結果を得るためには高電界部分を細分割したり、高次の多項式形状関数を採用したりしている。しかし、電界を電位近似関数の微分より求めるために、電界の精度は電位の精度より悪くなるのが一般的である。そこで連立一次方程式の導出に使用する汎関数に電界を含めて、電位の微分からではなく、節点電位と同時に連立一次方程式を作り、節点電界を求める方法を検討した。

2. 計算原理と計算例

静電界では電位と電界が満たすべき関係は、

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad \dots\dots\dots (1)$$

電界を含めた次式の汎関数を考える。

$$L = \int \left(\epsilon \nabla \phi \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{E}^2 \right) dv \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2)式の変分がラプラスの式と境界条件を満足することは次のようにして証明される。

$$\begin{aligned} \delta L &= \int \epsilon (\nabla \delta \phi \cdot \mathbf{E} + \nabla \phi \cdot \delta \mathbf{E} + \mathbf{E} \cdot \delta \mathbf{E}) dv \\ &= \int \epsilon \delta \phi \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} - \int \epsilon \nabla \cdot \mathbf{E} \delta \phi dv \\ &\quad + \int \epsilon (\nabla \phi + \mathbf{E}) \cdot \delta \mathbf{E} dv \quad \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi, \quad \nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = 0, \quad \int \epsilon \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = 0$$

が成立するから $\delta L = 0$ となる。従って、汎関数 L を ϕ と $\mathbf{E}$ について停留させれば、節点電位と電界に関する連立一次方程式が導出できる。その導出過程は、従来の節点電位を未知数とする有限要素法と同じであるが⁽²⁾、電位と電界の形状関数は独立に選ぶことができ、(2)式を節点電位と電界で微分することで得られる。

従来の方法では、電界の近似多項式は電位の多項式より1次低い近似関数となるが、本方法ではこの制限はない。例えば、電界と電位を同じ次数の多項式で近似できる。(1)式より電界は電位より1次だけ低い多項式になる必要があり、(1)式に矛盾するが、(3)式

図1 有限要素分割図

Fig. 1. Finite element mesh.

表1 節点における電位と電界

Table 1. Calculated potential and field

節点	電 位 (V)		電 界 (V/m)	
	理論値	計算値	理論値	計算値
1	100.00	100.00	3.0341×10^3	2.9408×10^3
2	69.373	69.575	2.1672	2.1140
3	46.497	45.535	1.6856	1.7332
4	28.232	28.283	1.3792	1.3593
5	13.026	12.733	1.1670	1.1404
6	0.0	0.0	1.0114	0.9845

表2 電位、電界の計算誤差

Table 2. Errors of potential and field

節点	本方法による誤差 (%)		従来法による誤差 (%)	
	電 位	電 界	電 位	電 界
1	0.0	3.075	0.0	16.1
2	0.291	2.455	0.252	12.1
3	2.069	2.824	0.333	9.61
4	0.181	1.443	0.375	7.9
5	2.249	2.279	0.422	6.68
6	0.0	2.662	0.0	7.81

で要素内の平均として(1)式を満足している。

新しい計算方法の妥当性を検討するために図1に示す内径 6cm, 外径 18cm の同軸円筒電極の場合を三角形要素に分割して計算した。電位、電界はいずれも1次多項式を近似関数に選んでいる。境界条件は節点1, 7で電位 100V, 節点 6, 12で 0V, 電界は電極に垂直となる条件 (電極上で $E_r = 0$) である。

計算結果を表1と表2に示す。ただし、従来法では電界は要素内で一様となり、節点 2~5 では3個の要素に共通の節点となるために3値となるが、小さいほうの誤差を示した。電位については誤差の改善はないが、電界については数倍改善されることがわかり、節点電位と電界を未知数とする有限要素法を電界計算に使用できることが明らかとなった。

(昭和60年6月3日受付)

文 献

Finite Element Method using the Potential and Electric Field for the Unknown Variables. By Shohei Kato, Member (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Toyo University).

加藤正平: 正員, 東洋大学工学部電気工学科

(1) 電気学会技術報告Ⅱ部第98号: 最近の電界計算法 (昭 55)

(2) 中田・高橋: 電気工学の有限要素法 (昭 57) 森北出版