UDC 621.3.015: 519.22: 519.65

論文

61-A 3

昇降法で得られる標準偏差の検討

正員 遠藤 正雄 (中央大)

非会員 速水 一之 (キャノン)

1. ま え が き

インパルス電圧試験において、気中ギャップなどの絶縁特性を求める場合、供試物のフラッシュオーバーする確率が電圧に対して、正規累積分布に従うと仮定すれば、50% フラッシュオーバー電圧(V_{50})と標準偏差(σ)を用いてその絶縁特性を表わすことができる。

これら V_{50} と σ の値を求めるのに補間法と昇降法とがある。昇降法は補間法に比べて同じ信頼度で V_{50} を求めるのに少ない電圧印加回数で済み、電圧印加が機械的に行なえるという利点があるため、現在では昇降法が各国で認められ、広く普及した⁽¹⁾。

しかし、昇降法で σ を求める場合、印加回数が少なく、また電圧幅 d が小さいと、その推定量 S は真の σ の値よりも小さくなりやすいことが従来から指摘され、検討されてきた。河野氏らは理論式では無限の情報を考えているが、実際の試験での情報は有限なので昇降法によって求めた S は補正することが望ましいと提案している。補正係数の考え方は S の分布は真の値よりも小さいほうに偏っているので、この分布の期待値が1になるように補正係数を S に掛けるとしている⁽²⁾。ただし、実際上からは補正係数を求める場合に σ の値を必要とすることが難点である。新藤氏らは、理論式の中の $E(n_i)$ 代わりに実験では n_i を用いることになるので、その点が S が小さめに推定される要因であるとしている⁽³⁾。すなわち、各電圧レベルでの n_i の分布が $E(n_i)$ よりも狭いことによるとしているが、なぜ狭いかについては不明である。

一方、広瀬氏はDixon氏らによる近似解法(以下、Dixon法と略記。これは従来、昇降法と言われてきた方

法である)と数値解析的手法であるNewton-Raphson法を用いて求める方法(Newton-Raphson法と略記)とを詳細に検討した結果を報告している⁽⁴⁾。これによると、 σ の推定についてはDixon法よりもNewton-Raphson法のほうが正しい値が得られるが、やはり小さめである。

河野氏らと新藤氏らはDixon法による結果の検討であり、広瀬氏はNewton-Raphson法による数値解析の結果である。Dixon法では近似条件を用いているが、Newton-Raphson法は近似条件を用いていないにもかかわらず、推定量 S が真の σ の周りに分布するのではなく、Dixon法同様小さめに推定されやすいことは大きな驚きである。

本論文ではDixon法の近似計算を検討して、近似条件に問題のあることを明らかにした。そして近似条件を満足している場合と満足しない場合について、モンテカルロシミュレーションにより検討した。更に、Newton-Raphson法についても同一条件で検討を行った。その結果、近似条件が満足されている場合にはDixon法、Newton-Raphson法とも同じ推定量が得られることが明らかとなった。

また、ある試行回数でシミュレーションを行なったとき、近似条件が満足されなかった場合、何回試行を増やせば満足されるかについても検討した。その結果、10回程度の試行の増加で近似条件を満足することが明らかになった。

更に、シミュレーションのスタートの電圧レベルを変えた場合、 $N=M$ となる割合がどのようになるかについても検討し、実際の試験に適用する場合の基礎データを得ることができた。

近年、Hyltén氏⁽⁵⁾は種々の試験法について検討を加え、それらの精度を比較した結果、大きな差はないと述べている。また、広瀬氏⁽⁶⁾は昇降法と補間法を組合せた試験法についての検討結果を報告している。このように試験法には種々の議論があるが、少なくとも

Analysis of Standard Deviation Obtained by Up and Down Method. By Masao Endo, Member (Department of Electrical Engineering, Chuou University) & Kazuyuki Hayamizu, Non-member (Canon, Ltd.).

遠藤正雄: 正員, 中央大学理工学部電気工学科
速水一之: 非会員, キャノン(株)

昇降法から得られるデータの構造を分析しておくことは必要であると思われる。

2. 昇降法の解法⁽⁷⁾

真のフラッシュオーバー率曲線は正規累積分布曲線であるとする(母集団の仮定 1)。次に、ある電圧レベルにおける結果はフラッシュオーバーしたか、しなかったかの二つの場合のみで、その分布は二項分布に従う(母集団の仮定 2)。

(1) 昇降法の手法 いま、初期電圧レベル V_0 から出発し、その結果によって電圧幅 d だけ上下させながら試験を行なったときの試験電圧レベルを $V_i = V_0 \pm id$ ($i=0, 1, 2, \dots$) とし、 i 番目の電圧レベルでのフラッシュオーバーした回数を n_i 、フラッシュオーバーしなかった回数を m_i とするとき、このような結果の生じた確率 P を $P(n, m | V_0)$ と表現すると次式が成り立つ。

$$P(n, m | V_0) = K \prod_{i=-\infty}^{\infty} p_i^{n_i} q_i^{m_i} \dots\dots\dots (1)$$

ただし、

$$p_i = \int_{-\infty}^{V_i} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(t-V_{50})^2/2\sigma^2} dt$$

$$= 1 - q_i \dots\dots\dots (2)$$

$$K = \prod_{i=-\infty}^{\infty} (n_i + m_i) C_{n_i}$$

Newton-Raphson 法では(1)式に最尤法を適用する(付録 I 参照)。

次に、 i 番目の電圧レベルでのフラッシュオーバーした回数 n_i と、その一つ下の電圧レベルでのフラッシュオーバーしなかった回数 m_{i-1} との間には次の関係が成り立つ。

$$|n_i - m_{i-1}| = 0 \text{ or } 1 \dots\dots\dots (3)$$

いま、 $\sum n_i = N$, $\sum m_i = M$ とし、 $N \leq M$ と仮定すると、(1)式は $M - N \geq 0$ の条件のもとで次式になるとしている。

$$P(n, m | V_0, M - N \geq 0) = K' \prod_i (p_i q_{i-1})^{n_i} \dots\dots\dots (4)$$

ただし、

$$K' = (n_i + n_{i+1}) C_{n_i}$$

Dixon 法では、(4)式を最大にする V_{50} と σ を求めることにより、良く知られている推定量 V と S の式が求まる(求める過程で $d < 2\sigma$ という仮定をしているが、この点は問題ない)。

以上の導出の過程で問題となるのは(3)式の条件である。(3)式が $|n_i - m_{i-1}| = 0$ の場合は $m_{i-1} = n_i$ となる。いま(1)式を変形し、 $M = N$ の条件を入れると

$$P(n, m | V_0) = K \prod_i p_i^{n_i} q_{i-1}^{m_{i-1}}$$

$$P(n, m | V_0, M = N) = K' \prod_i p_i^{n_i} q_{i-1}^{n_i}$$

$$= K' \prod_i (p_i q_{i-1})^{n_i}$$

となり、(4)式が導かれる[付図 1 (a) 参照、この場合は(1)=(4)となる]。しかし、 $|n_i - m_{i-1}| = 1$ があるレベルで生じた場合は $m_{i-1} = n_i \pm 1$ となり、

$$P(n, m | V_0) = K \prod_i p_i^{n_i} q_{i-1}^{m_{i-1}}$$

$$K = \prod_i (n_i + m_i) C_{n_i}$$

において、

$$(n_i + m_i) C_{n_i} \rightarrow (n_i + m_{i+1} \pm 1) C_{n_i}$$

$$p_i^{n_i} q_{i-1}^{m_{i-1}} \rightarrow p_i^{n_i} q_{i-1}^{n_i \pm 1}$$

があるレベルに含まれて(4)式と等しくならない[付図 1 (b) 参照。この場合は(1) $\neq$ (4)である]。

実際問題として $|n_i - m_{i-1}| = 1$ になる場合もかなりあり得るので、必ずしも(4)式(これを近似条件と呼ぶ)が満足されているとは限らない。以下、簡単化のため近似条件が満足される場合(すべての電圧レベルにおける結果が $|n_i - m_{i-1}| = 0$ のみの場合)は N と M が等しいので $N = M$ 、満足されていない場合 ($|n_i - m_{i-1}| = 1$ が含まれた場合)は $N \neq M$ と表現する。

3. シミュレーションの結果

フラッシュオーバー率曲線は標準正規分布 $N(0, 1)$ で、初期設定値すなわち電圧印加のスタートレベルは平均 0 とする。サンプル試行回数 $T=20, 40, 60, 80, 100$ 、電圧幅 $d/\sigma=0.5, 1.0, 1.5, 2.0$ の場合についてシミュレーションを行なった。ただし、Newton-Raphson 法では推定量が求まらない場合が生ずる。この場合は除いた。

〈3・1〉 推定量 S の分布 標準的な値 $T=40, d/\sigma=1.0$ の場合についてシミュレーションを行ない、Dixon 法、Newton-Raphson 法から推定量 S を求める試行を 1,000 回繰返した場合の度数分布をそれぞれ図 1 および図 2 に示す。

分布の形はいずれも正規分布ではなく、かつ 1.0 以下の分布が多いことがわかる。従って、平均値 $\bar{S}$ は 1.0 以下になることが直観的に理解できる。次に、Dixon 法と Newton-Raphson 法との分布差は $N=M$ の場合(棒グラフの白い部分)は必ずしもはっきりしないが、 $N \neq M$ の場合(棒グラフの黒い部分)は Newton-Raphson 法のほうがわずかに大きいほうにずれている。

〈3・2〉 推定量 S の平均 前述の分布の平均値 $\bar{S}$

図 1 推定量 S の度数分布 (Dixon 法: $L=1,000$, $T=40$, $d/\sigma=1.0$)

Fig. 1. Histogram of the distribution of 1,000 determinations of S for $T=40$, $d/\sigma=1.0$ (Dixon method, class length 0.1).

図 2 推定量 S の度数分布 (Newton-Raphson 法: $L=1,000$, $T=40$, $d/\sigma=1.0$)

Fig. 2. Histogram of the distribution of 1,000 determinations of S for $T=40$, $d/\sigma=1.0$ (Newton-Raphson method, class length 0.1).

をとり各パラメータごとにまとめたものを図 3 の上側に、1,000 回の繰返し数に対して $N=M$ が生じた割合を下側に示す。

(1) $\bar{S}$ は d/σ の増加と共に大きくなるが、その値は $d/\sigma < 1.5$ の領域では真値より小さめに、 $d/\sigma > 1.5$ の領域では真値より大きめに推定される。

(2) d/σ の全域にわたって Newton-Raphson 法のほうが Dixon 法よりも 1.0 に近い。

(3) $N=M$ の生ずる割合は d/σ により大きく変わり、 d/σ が大きくなるにつれて高くなる。その値は例えば $d/\sigma=1.0$ では 85% 程度であり、残り 15% が $N \neq M$ の場合である。この値の変動幅は大きく、この計算の例では $N=M$ 割合の変動幅が 78~90% であった。繰返し数 $L=1,000$ 回ごとの値と比較しても平均値が多少変動することから (図 8 の説明参照)、 $N=M$ になるか、 $N \neq M$ になるかは偶発的に定まるものと考えられる。変動幅は $N=M$ の割合が大きく

図 3 推定量 S の平均

Fig. 3. The variation of S and the percentage of $N=M$ with d/σ for Dixon and N-R methods.

図 4 推定量 S の平均 ($N=M$)

Fig. 4. The variation of S with d/σ in case of $N=M$ for Dixon and N-R methods.

なると小さくなる。

(4) 試行回数 T を増すと、曲線が $d/\sigma \approx 1.25$ 付近を中心として右回転し、1.0 に近づく。また、 T による $N=M$ の割合の差は小さい。

次に、 $N=M$ の場合について 1,000 回繰返してサンプリングした結果を図 4 に示す。

(5) Dixon 法と Newton-Raphson 法とは同じ結果が得られる。

一方、 $N \neq M$ の場合について 50 回繰返してサン

図 5 推定量 S の平均 ($N \neq M$)

Fig. 5. The variation of S with d/σ in case of $N \neq M$ for Dixon and N-R methods ($L=50$).

リングした結果を図5に示す。

(6) Dixon 法, Newton-Raphson 法ともに $N=M$ の場合の値よりも大きめである。特に, Newton-Raphson 法の値は 1.0 よりもかなり大きくなる。更に, 試行回数による違いが顕著であり, T が小さいほどその値は大きい。

以上の結果から, $N=M$ の場合は Dixon 法, Newton-Raphson 法ともに同じ結果になるが, $N \neq M$ の場合を含むと, (6) 項の結果より Newton-Raphson 法の値が 1.0 よりも大きいために, 全体として前述 (2) 項の結果となることが明らかとなった。

〈3.3〉 推定量 S の信頼限界 推定量 S の分布は図1からわかるように正規分布ではない。ここでは単純にその累積分布を求め, 5% と 95% の信頼限界で比較してみた。その結果, それらの信頼限界点の移動を直観的にとらえることができた。

(1) $N=M$ の場合を図6に示す。Dixon 法と Newton-Raphson 法とは同じ信頼限界である。5% 信頼限界は d/σ が大きくなると 1.0 に近付くが, 95% 信頼限界は $T=20$ を除いてはわずかに上昇するにすぎない。すなわち, d/σ が大きくなると S の小さいほうの分布が少なくなる結果, 平均値は大きくなるが, 大きいほうの分布はほぼ横ばいであることがわかる。例えば, $d/\sigma=1.5$ 付近で $\bar{S} \approx 1.0$ となり, 5%, 95%

図 6 推定量 S の信頼限界 ($N=M$)

Fig. 6. 5% and 95% confidence limits of S in case of $N=M$ for Dixon and N-R methods.

図 7 推定量 S の信頼限界 ($N \neq M$)

Fig. 7. 5% and 95% confidence limits of S in case of $N \neq M$ for Dixon and N-R methods.

信頼限界がほぼ $\bar{S}$ に対して対称になる。また、 T の増加と共に信頼区間は狭くなる。

(2) $N \neq M$ の場合を図7に示す。だいたいの傾向は前述(1)項と同じであるが、 T の差が大きく変動も大きい。また Dixon 法の信頼限界が狭い。

4. 考 察

(4.1) 結果の考察 V_{50} および σ を推定する場合は、母集団としてのフラッシュオーバー現象に関して仮定1および仮定2をおき、昇降法の手法を用いて得られた結果から解析的に求めるわけである。この際得られたデータは $N=M$ の場合と $N \neq M$ の場合の2種類に分けられる。

Dixon 法では $N=M$ の場合はその理論展開は正確であるが、 $N \neq M$ の場合は正確でない。従って、得られる結果も異なることになる。一方、Newton-Raphson 法では、解析的手法に近似条件を含まないにもかかわらず、 $N=M$ の場合の S の値と $N \neq M$ の場合の値とでは、大きく異なるのは大変不思議である。 $N=M$ の場合は Dixon 法も Newton-Raphson 法も S の値はほぼ同じになるが、 $N \neq M$ の場合は異なり、Dixon 法は $N=M$ よりもわずかに大きく、値としては真値に近付き、Newton-Raphson 法では更に大きい。Dixon 法で S が真値に近付くことは一見良さそうであるが、理論的矛盾があるので危険であるし、Newton-Raphson 法では 1.0 よりもかなり大きくなって好ましくない。

いずれにしても、昇降法で得られたデータが $N=M$ の場合と $N \neq M$ の場合とで S の値の傾向が異なることは重要なことであるが、その要因は定かでない。しかし、 $N=M$ の場合は解析手法に関係なく同じ結果になることから、昇降法では $N=M$ の場合についてのみ S を求めるように工夫することも一案と思われる。

以上のように、 $N \neq M$ の場合に近似が成り立たないことは Dixon 氏は当然知っていたはずなのに、なぜ言及しなかったのか疑問でならない。

更に、両者とも $d/\sigma < 1.5$ では推定量が真値より小さめになる理由については、いまだ明らかにされていない。いま直観的にわかるように、シミュレーションで得られた n_i の分布と期待値 $E(n_i)$ の分布[もしくは m_i の分布と $E(m_i)$ の分布]をグラフで比較してみる。付図2において、 $E(n_i), E(m_i)$ の分布は $d/\sigma = 0.5$ の場合について $T=10,000$ 回から求めたグラフであり、 n_i, m_i の分布は $T=100$ 回から求めたグラフである。 n_i の分布は $E(n_i)$ の分布に比べて頂点

が高く、分散が小さいことがわかる。すなわち、無限回試行を繰返せば $E(n_i)$ に等しくなるが、100 回程度ではいまだ一致しないことを示している。

これらのことは、既に文献(2),(3)でも明らかにされているとおり、昇降法自身として非常に多数回の試行が必要なのかも知れない。一例として、図3において $T=1,000$ 回とすると、Dixon 法、Newton-Raphson 法ともにほとんど真値に近い値となる。ただし、 $d/\sigma=2.0$ で Dixon 法が真値よりわずかに大きめの値となる。それは、「Dixon 法では d/σ の範囲は 2.0 以下となっていて、2.0 では誤差の危険が大きい」ことによるものと思われる。統計量の場合は測定値は真値の周りに分布するわけであるが、昇降法では偏って分布するわけで、なぜかは依然不明である。

母集団の仮定に問題なく、また解析的手法にも問題ないわけであるから、昇降法の構造自身(昇降法の手法)に問題があるのかも知れない。

(4.2) Newton-Raphson 法で推定量が求まらない場合 広瀬氏により $B\text{-Level} \leq 1$ のとき、最尤推定量 S が求まらないことが指摘された⁽⁸⁾。これは d/σ が大きく、 T が少ないとき頻度が高い。例えば、 $d/\sigma=1.0$ 、 $T=40$ のとき 2.3% 程度である。

一方、 d/σ が小さく、 T が少ないときにも推定量 S の求まらないことが起こり得ることが生じた。 $d/\sigma=1.0$ 、 $T=40$ のときはほとんど起こらないが、 $d/\sigma=0.5$ 、 $T=20$ の場合に 0.2% 程度起こる。その一例を表1に示す。

m_i の分布をみると、レベル -0.5 において 0 となっていて、 m_i はその上下レベルに分かれている。このように分布が分かれる場合は、推定量の求まらない危険性のあることがわかる。

(4.3) $N=M$ となるに必要な増分試行回数 昇降法で正確に標準偏差を推定するためには、 $N=M$ の条件設定が必要であることがわかった。そこで、試行

表1 Newton-Raphson 法で推定量が求まらない場合の例 ($d/\sigma=0.5$, $T=20$)

Table 1. An example of the case the estimated value is not obtained by Newton-Raphson method ($d/\sigma=0.5$, $T=20$).

電圧レベル	n_i	m_i	電圧レベル	n_i	m_i
2.5	0	0	-0.5	2	0
2.0	0	0	-1.0	2	1
1.5	0	0	-1.5	0	2
1.0	1	0	-2.0	0	0
0.5	5	1	-2.5	0	0
0	1	5

図 8 増分試行回数による $N=M$ の割合 ($T_0=40$)

Fig. 8. The variation of percentage of $N=M$ with trial number in case of $T_0=40$.

回数によって $N=M$ となる割合がどう変わるかを検討した。シミュレーションの手法は、まず初めに試行回数 T_0 と電圧幅 d を定める。 T_0 終了後、 $N \neq M$ の場合は、終了時の電圧レベルから更に試行回数を増し、 $N=M$ になるまで続ける。

図 8 は $T_0=40$ の場合で、各々の d/σ について、1,000 回繰返しサンプリングを行なった結果である。例えば、 $d/\sigma=1.0$ の場合、 T_0 において $N=M$ となる割合は 80% であり (図中 A)、 $N \neq M$ は残り 20% である。更に試行を増やして 42 回 (増分 2 回) にすると、 $N \neq M$ であった 200 回のうち 168 回が $N=M$ となる (図中 B)。試行回数が 46 回 (増分 6 回) 程度ではほとんど $N=M$ となる (図中 C)。 T_0 終了後に $N=M$ となった割合は、 T_0 を大きくすると大きくなるようにも考えられるが、大きな差は得られない (図 3 下側グラフ参照)。

図 8 の T_0 における値はシミュレーションごとにかんりの変動を含むのが特徴である。いま、 $d/\sigma=1.0$ の場合についてこの試行を 5 回行なったときの変動幅をエラーバーで示した。このように $L=1,000$ 回から求める試行を 5 回行なっても必ずしも一致せず、5% 程度の差が生ずる。図 8 における $N=M$ となるに必要な増分試行についてのシミュレーションは、 T_0 における $N=M$ の割合が小さい場合の例である。

更に、試行回数 T_0 によって $N=M$ を満足するための増分試行回数がどう変わるかを図 9 に示した。

以上の結果から、図 8 の T_0 は任意の値に対してほぼ同様の傾向を示すことがわかった。

(4.4) スタートの電圧レベルを変えたときの $N=M$ の割合 前節までの $N=M$ の割合は、スタートの電圧レベル $V_i=0$ の場合であった。そこで、スタートの電圧レベルを変えた場合、図 3 下側のグラフの $T=40$ 回についてどう変わるかを示したのが図 10

図 9 試行回数 T_0 による $N=M$ を満たす増分試行回数

Fig. 9. The variation of trial number must be increased to satisfy $N=M$ with T_0 .

図 10 スタート点を変えたときの $N=M$ の割合 ($T=40$)

Fig. 10. The variation of percentage of $N=M$ with d/σ with varying initial levels ($T=40$).

である。まず、 $V_i=\pm 1.0$ の場合は d/σ に関係なく約 50% 一定である。また、 $V_i=\pm 2.0$ となると右下りになり、 $V_i=\pm 3.0$ では 0% に近い。すなわち、 $N=M$ となる割合はスタートの電圧レベルにも大きく依存していることが明らかとなった。このことは、実際の試験法を検討する際に考慮する必要がある。

5. 結 論

昇降法に関して、その解析手法としての Dixon 法を検討した結果、 $N=M$ の場合は理論展開が正確であるが、 $N \neq M$ の場合は正確でないことがわかった。そこで、コンピュータによるシミュレーションを行な

ったところ、 $N=M$ と $N \neq M$ の場合で標準偏差、推定量に差が生ずることがわかった。

(1) $T=40$, $d/\sigma=1.0$ のとき、 $N=M$ の割合は約 80% であり、このデータから得られる標準偏差は従来の結果と同様、小さめに推定される。

(2) 残りの約 20% から得られる値は、 $N=M$ の場合よりもわずかに大きく、1.0 に近い。ただし、理論的矛盾を含むので、この値を用いるのは危険であると思われる。

解析的手法として Newton-Raphson 法を用いた結果、Dixon 法で用いた近似条件は含まないにもかかわらず、 $N=M$ の場合と $N \neq M$ の場合とで標準偏差の推定量に大きな差の現われることがわかった。

(3) $N=M$ の場合は、Dixon 法と同じ結果である。

(4) $N \neq M$ の場合は 1.0 よりもかなり大きくなる。 $N=M$ の場合は Dixon 法も Newton-Raphson 法も同じ結果となることがわかった。

(5) $\bar{S}$ は d/σ の増加と共に大きくなるが、その値は $d/\sigma=1.5$ 以下では真値より小さめに、1.5 以上では真値より大きめに推定される。

(6) そして、その曲線は T の増加と共に $d/\sigma \approx 1.25$ を中心として右回転する。従って、 T による $\bar{S}$ の変化は $d/\sigma \approx 1.25$ より離れるほど大きい。

(7) 推定量 S の分布は正規分布にはならないので、その累積分布を求め、5% と 95% 信頼限界で比較した。その結果、 $N=M$ の場合には Dixon 法、Newton-Raphson 法とも $\bar{S}$ は同じ信頼度で求まることがわかった。昇降法を用いる場合は、 $N=M$ の条件が成り立つようにすることが望ましい。

(8) ある試行回数で試験した結果が $N \neq M$ の場合はそのまま試験を続行し、 $N=M$ となったとき中止する。そのときの増分試行回数はそれほど大きくはない。

いままでの結果は最初のスタートの電圧レベルが平均 $0(V_{50})$ であるが、実際の試験ではスタート点は任意のレベルである。そこで、スタート点を変えたときの $N=M$ の割合についても検討した。

以上、昇降法で得られるデータの構造を明らかにすることができた。しかし、実際の試験にどのように関連するかなどについては今後実験を行ない議論を深めていく必要があると思われる。

終わりに、本論文の研究には、本学電気工学科 北村 覚一教授の御協力をいただいた。また、Dixon 法の検討には本学数学科 杉山高一教授、ならびに統計数理研究所 小西貞則氏に御参加いただいた。更に、データ

整理には本学大学院生 和田 淳君に援助いただいた。ここに厚くお礼申し上げます。

(昭和 60 年 5 月 27 日受付、同 60 年 9 月 9 日再受付)

文 献

- (1) 河野：系統絶縁論，p.163 (昭 59) コロナ社
- (2) 河野・笈川：「衝撃電圧試験における放電率曲線の変動範囲の推定について」，電学誌，87，1618 (昭 42-8)
- (3) 新藤・新井・鈴木：「昇降法で得られる標準偏差の信頼性」，電学論 A，103，189 (昭 58-4)
- (4) 広瀬：「Newton-Raphson 法を用いた最尤推定法の昇降法への適用」，電気学会絶縁材料・高電圧合同研究，EIM-82-46；HV-82-7，45 (昭 57)
- (5) N. Hyltén-Cavallius & F. A. Chagas：「Possible precision of statistical insulation methods」，IEEE Trans. Power Apparatus Syst., PAS-102，2372 (1983)
- (6) 広瀬：「Newton-Raphson 法を用いた最尤推定法によるインパルスフラッシュオーバー電圧の推定」，高岳レビュー，29，50 (昭 57)
- (7) W. J. Dixon & A. M. Mood：「A method for obtaining and analyzing sensitivity data」，J. Amer. Statistical Association，43，109 (1948)
- (8) 広瀬：「昇降法使用上の注意点」，昭 58 電気学会東京支大，63

付 録

〔I〕 Newton-Raphson 法で V, S を求める手法⁽⁶⁾

本文(1)式より尤度関数 L は

$$L = \prod_{i=1}^k (n_i + m_i) C_{n_i} p_i^{n_i} (1 - p_i)^{m_i} \dots\dots (付 1)$$

である。ただし、 $i=1 \sim k$ は実験した電圧レベル数である。そして、(付 1) 式を最大にする V_{50} , σ を求めればそれが求める推定量となる。そこで、(付 1) 式の対数をとると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \log L = & \sum_{i=1}^k \log (n_i + m_i) C_{n_i} + \sum_{i=1}^k n_i \log p_i \\ & + \sum_{i=1}^k m_i \log (1 - p_i) \dots\dots\dots (付 2) \end{aligned}$$

いま、適当に V_{50_0} , σ_0 を決め、 $\partial \log L / \partial V_{50}$, $\partial \log L / \partial \sigma$ を V_{50_0} , σ_0 の近傍で Taylor 展開し、一次の項で近似すると、

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \log L}{\partial V_{50}} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} & \doteq \left[\frac{\partial \log L}{\partial V_{50}} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} + (V_{50} - V_{50_0}) \\ & \times \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial V_{50}^2} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} + (\sigma - \sigma_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial V_{50} \partial \sigma} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} \\ & \dots\dots\dots (付 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} & \doteq \left[\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} + (V_{50} - V_{50_0}) \\ & \times \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial V_{50}} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} + (\sigma - \sigma_0) \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \right]_{V_{50_0}, \sigma_0} \\ & \dots\dots\dots (付 4) \end{aligned}$$

付図1 昇降法の一例

app. Fig. 1. The example of data from up and down method.

ここで,

$$\left[\frac{\partial \log L}{\partial V_{50}} \right]_{V_{50}, \sigma} = 0, \left[\frac{\partial \log L}{\partial \sigma} \right]_{V_{50}, \sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (\text{付5})$$

と仮定すれば, (付3)式, (付4)式の修正値 $\delta V_{50} = V_{50} - V_{50,0}$, $\delta \sigma = \sigma - \sigma_0$ は

$$\begin{pmatrix} \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial V_{50}^2} \right]_{V_{50,0}, \sigma_0} & \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial V_{50} \partial \sigma} \right]_{V_{50,0}, \sigma_0} \\ \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial V_{50}} \right]_{V_{50,0}, \sigma_0} & \left[\frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \right]_{V_{50,0}, \sigma_0} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sigma V_{50} \\ \delta \sigma \end{pmatrix}$$

付図2 各電圧レベルにおけるフラッシュオーバーした回数 (n_i) とフラッシュオーバーしなかった回数 (m_i) の分布

app. Fig. 2. The distribution of $n_i, m_i, E(n_i)$ and $E(m_i)$.

付図3 推定量 V の平均 ($N=M$)

app. Fig. 3. The variation of V with d/σ in case of $N=M$ for Dixon and N-R methods ($L=1,000$).

付図4 推定量 V の平均 ($N \neq M$)

app. Fig. 4. The variation of V with d/σ in case of $N \neq M$ for Dixon and N-R methods ($L=50$).

$$= - \left[\frac{\partial \log L}{\partial V_{50}} \right]_{V_{50,0}, \sigma_0} \dots\dots\dots (\text{付6})$$

を解くことによって得られる。

求められた $\delta V_{50}, \delta \sigma$ より $V_{50,1} = V_{50,0} + \delta V_{50}$, $\sigma_1 = \sigma_0 + \delta \sigma$ とおき, (付6)式の $V_{50,0}, \sigma_0$ を $V_{50,1}, \sigma_1$ で置換え, 上の手続きを $V_{50,0}, \sigma_0$ が安定するまで繰返せば V_{50} と σ の最尤推定量 V, S が得られる。

〔Ⅱ〕 本文では, 昇降法から得られるデータのうち S のみについて分析した。 V_{50} は精度良く求まるので問題ないと思われるが, 今後の試験法の検討参考のために, $N=M$ と $N \neq M$ の場合の結果をそれぞれ付図3, 付図4に示す。