三次元ラプラス問題のための解析的積分を用いた境界要素法

正員 桑 原 敏 彦 (北海道大)

正員 武 田 毅 (北海道大)

1. ま え が き

三次元場の数値解法は、境界要素法 (BEM)・電荷重畳法 (代用電荷法) などの境界型解法が、有限要素法 (FEM) などの領域型解法に比べて、領域の表面のみの分割で済む点で決定的に有利である。とりわけ、三次元電界計算では電荷重畳法が他の解法に比べて多用されている⁽⁷⁾。これは、この手法では積分計算を必要としなく、かつ電界計算が電荷量から直接解析的に得られるのがその最大の理由である。しかしながら、電荷重畳法は境界形状が複雑な場では、未知電荷の配置が難しく、適用対象が限定される。これに対して、BEM は汎用的な解法であるが、係数行列作成および内点計算に積分計算を必要とし、この積分計算をいかに精度良く短時間で実行するかが、BEM の存在価値を左右する大問題なのである。すなわち、BEM における積分計算を数値的に算定すると、特異性のある重み関数を用いるため境界近傍にソース点を置く際の積分誤差が大きくなり、また、簡単な積分公式を利用できる FEM に比べて未知変数の数が大幅に減少した割には計算時間が短縮されないことである。特に計算時間は領域内の詳細な解分布が知りたい場合には、積分計算の計算量が增大するため深刻な問題となってくる。我々は、二次元ラプラス場について、これらの問題点を指摘し、これを解決する解析的な積分公式を提案し、その有効性を報告してきた^{(8)~(10)}。特に、三次元場では表面電荷法 (BEM 間接法) に対する計算公式^{(1)~(3)~(5)}が見られるのみで、本論文が対象とする

BEM 直接法ではこれらは不十分である。なかでも、文献(1)、(3)は要素内で関数を定数と近似する一定(0次)要素に関するものである。本論文は、三次元ラプラス問題の三角形一次要素 BEM 解法に対する極めて整理され計算機処理に適した解析的積分公式を提案するものである^{(11)~(12)}。また、代表的な数値面積積分計算法の計算誤差と計算時間を評価して本手法の有効性を強調している。次いで、厳密解の知れる試験用例題で本手法の妥当性を検証している。本手法は数値積分を用いた場合に比べて、ポテンシャルおよびポテンシャルこう配を高速・高精度に計算できるため、境界要素法による三次元ラプラス問題解法に有用であると思われる。

2. 三次元ラプラス場の境界積分

BEM の基本式は境界 Γ を N_i 個の要素 Γ_i に分割するものとして次式で表される⁽⁴⁾。

$$c_i u_i + \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\Gamma_j} u q^* d\Gamma = \sum_{j=1}^{N_i} \int_{\Gamma_j} q u^* d\Gamma \quad \dots\dots\dots (1)$$

ただし、 u, q は境界上のポテンシャルおよびその法線方向微分値 (フラックス) である。また、 u^*, q^* は節点 i にソースを置く基本解 (グリーン関数) および、その法線微分値である。これらは、三角形一次要素を採用し、注目する要素 Γ_i を $x-y$ 平面にとり、かつソース点 i を z 軸上に置く (図1) 座標変換を行えば [付録1], 次式で表される。

$$u = [1, x, y] [B] [u_1^e, u_2^e, u_3^e]^T \dots\dots\dots (2)$$

$$q = [1, x, y] [B] [q_1^e, q_2^e, q_3^e]^T \dots\dots\dots (3)$$

$$u^* = \frac{1}{4\pi r} \dots\dots\dots (4)$$

$$q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} = \frac{-z}{4\pi r^3} \dots\dots\dots (5)$$

On The Boundary Element Method using Analytical Integration for 3-dimensional Laplace Problem. By Toshihiko Kuwahara, Member & Tsuyoshi Takeda, Member (Faculty of Engineering, Hokkaido University).

桑原敏彦: 正員, 北海道大学工学部一般電気工学講座
武田 毅: 正員, 北海道大学工学部一般電気工学講座

図 1 座 標 系

Fig. 1. Coordinate system.

$$r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} \quad (6)$$

ただし、 u_k^* 、 q_k^* は要素 Γ_j の端点における解ポテンシャルおよびフラックスである。また、 $[B]$ は要素端点座標で表される係数行列で、次式で表される。

$$[B] = \begin{bmatrix} 1, x_1, y_1 \\ 1, x_2, y_2 \\ 1, x_3, y_3 \end{bmatrix}^{-1} \quad (7)$$

また、 c_i は領域内部では 1、境界上ではその形状により決まる値をとる定数である⁽⁴⁾。

3. 境界積分公式

(1) 式の境界積分は、原点 0 を一頂点とする三つの三角形に分割して実行し、結果を加え合わせれば良いから、 Δ_{012} (図 2) を考察すれば十分である。また、積分は座標軸を辺 12 に平行に回転させることにより、比較的容易に実行できる (付録 2)。積分結果は以下に示す幾何学的に明確な量で表現される。

(辺 12 の方向余弦)

$$t_{12} = \{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2\}^{1/2} \quad (8)$$

$$l_{12} = (x_2 - x_1)/t_{12} \quad (9)$$

$$m_{12} = (y_2 - y_1)/t_{12} \quad (10)$$

(原点と辺 12 (の延長線) 間垂直距離)

$$d_{12} = l_{12}y_1 - m_{12}x_1 \quad (11)$$

(垂線の足 (0' 点) と端点 1, 2 間距離)

$$t_1 = l_{12}x_1 + m_{12}y_1 \quad (12)$$

$$t_2 = l_{12}x_2 + m_{12}y_2 \quad (13)$$

(ソース点と 0' 点および端点間距離)

$$r_0 = (d_{12}^2 + z^2)^{1/2} \quad (14)$$

$$r_k = (x_k^2 + y_k^2 + z^2)^{1/2} \quad (k=1 \sim 3) \quad (15)$$

最終的な結果は次のように極めて整理された簡素な形にまとまる。

$$\int_{\Gamma_j} qu^* d\Gamma = [G^1, G^2, G^3] [q_1^e, q_2^e, q_3^e]^T \quad (16)$$

図 2 幾何学的定義

Fig. 2. Geometrical definition.

$$\int_{\Gamma_j} uq^* d\Gamma = [H^1, H^2, H^3] [u_1^e, u_2^e, u_3^e]^T \quad (17)$$

ここで、 G^k, H^k ($k=1 \sim 3$) は、いわゆる影響係数であって、ソース点 i と要素 Γ_j 上の端点 k ($k=1 \sim 3$) の間の相互作用を表し、これらは解析的に計算できて次のようになる。

$$[G^1, G^2, G^3] = [g^1, g^2, g^3] [B] \quad (18)$$

$$[H^1, H^2, H^3] = [h^1, h^2, h^3] [B] \quad (19)$$

ただし、 g^k, h^k ($k=1 \sim 3$) は表 1 に示すように、幾何学的に明確な量で、かつ極めて整理された簡素な形にまとまる。また $\sum_{1-2-3}$ は添字を 1→2→3 の順に循環して 3 回加算することを意味する。

表中の Ω_{12} はソース点 i から Δ_{012} を見る立体角であり、 θ_{12} を原点 0 から辺 12 を見る角度として次式で表される (付録 3)。

$$\Omega_{12} = \theta_{12} - \tan^{-1} \{ \{d_{12}z(r_1t_2 - r_2t_1)\} / \{d_{12}^2r_1r_2 + z^2t_1t_2\} \} \quad (20)$$

なお、(16) 式は、文献 (5) の表面電荷法における式を用いても等価な結果を得る。

4. 内部流束 (ポテンシャルこう配ベクトル)

内部流束 (ポテンシャルのこう配ベクトルを本論文では内部流束と定義する) q_i は (1) 式において、内点位置の微小変化 δR に対する、影響係数の変化率を計算すればよい。ここで δR を z 成分 δz と xy 平面に平行な成分 δr に分解し、内点は z 方向のみ変化させ、要素が $-\delta r$ だけ変位したときの (図 3) 影響係数の変化率を求めればよい。結果を行列形式で表すと次式になる。

$$q_i = \nabla u_i = [q_x^i, q_y^i, q_z^i] \\ = \sum_{j=1}^{N_j} [q_x^i, q_y^i, q_z^i] [T] \quad (21)$$

表 1 積分公式
Table 1. Formula of integration.

	k	1	2	3
$h^k = \sum_{i=1}^3 h_{ik}^k$	h_{ik}^k	$-P_{12}$	$-m_{12}zQ_{12}$	$l_{12}zQ_{12}$
$g^k = \sum_{i=1}^3 g_{ik}^k$	g_{ik}^k	$d_{12}Q_{12} - zP_{12}$	$0.5(l_{12}d_{12}R_{12} - m_{12}r_0^2Q_{12})$	$0.5(m_{12}d_{12}R_{12} + l_{12}r_0^2Q_{12})$
$h_x^k = \sum_{i=1}^3 \partial h_{ik}^k / \partial x$	$\partial h_{ik}^k / \partial x$	$-m_{12}zT_{12}$	$m_{12}z(l_{12}S_{12} + m_{12}d_{12}T_{12})$	$m_{12}z(m_{12}S_{12} - l_{12}d_{12}T_{12})$
$h_y^k = \sum_{i=1}^3 \partial h_{ik}^k / \partial y$	$\partial h_{ik}^k / \partial y$	$l_{12}zT_{12}$	$-l_{12}z(l_{12}S_{12} + m_{12}d_{12}T_{12})$	$-l_{12}z(m_{12}S_{12} - l_{12}d_{12}T_{12})$
$h_z^k = \sum_{i=1}^3 \partial h_{ik}^k / \partial z$	$\partial h_{ik}^k / \partial z$	$d_{12}T_{12}$	$-m_{12}(Q_{12} - z^2T_{12})$	$l_{12}(Q_{12} - z^2T_{12})$
$g_x^k = \sum_{i=1}^3 \partial g_{ik}^k / \partial x$	$\partial g_{ik}^k / \partial x$	$m_{12}Q_{12}$	$m_{12}(l_{12}R_{12} - m_{12}d_{12}Q_{12})$	$m_{12}(m_{12}R_{12} + l_{12}d_{12}Q_{12})$
$g_y^k = \sum_{i=1}^3 \partial g_{ik}^k / \partial y$	$\partial g_{ik}^k / \partial y$	$-l_{12}Q_{12}$	$-l_{12}(l_{12}R_{12} - m_{12}d_{12}Q_{12})$	$-l_{12}(m_{12}R_{12} + l_{12}d_{12}Q_{12})$
$g_z^k = \sum_{i=1}^3 \partial g_{ik}^k / \partial z$	$\partial g_{ik}^k / \partial z$	h_{12}^1	h_{12}^2	h_{12}^3
ただし,	$P_{12} = Q_{12}/4\pi$ $S_{12} = 1/4\pi \cdot (1/r_2 - 1/r_1)$	$Q_{12} = 1/4\pi \cdot \log\{(r_1 + t_2)/(r_1 + t_1)\}$ $T_{12} = 1/4\pi \cdot (t_2/r_2 - t_1/r_1)/r_0^2$	$R_{12} = 1/4\pi \cdot (r_2 - r_1)$

図 3 ソース点の変位

Fig. 3. Displacement of source point.

$$\begin{aligned} & (q_x^i, q_y^i, q_z^i) \\ &= [G'] [q_1^e, q_2^e, q_3^e]^T - [H'] [u_1^e, u_2^e, u_3^e]^T \end{aligned} \quad (22)$$

ただし、局所座標系 x 軸の方向余弦を l_1, l_2, l_3 などとして、

$$[T] = \begin{bmatrix} l_1 & l_2 & l_3 \\ m_1 & m_2 & m_3 \\ n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} \quad (23)$$

また、

$$\begin{aligned} [G'] &= \begin{bmatrix} G_x^1, G_x^2, G_x^3 \\ G_y^1, G_y^2, G_y^3 \\ G_z^1, G_z^2, G_z^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} q_x^1, q_x^2 + q^1, & q_x^3 \\ q_y^1, & q_y^2, & q_y^3 + q^1 \\ q_z^1, & q_z^2, & q_z^3 \end{bmatrix} \cdot [B] \quad (24) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [H'] &= \begin{bmatrix} H_x^1, H_x^2, H_x^3 \\ H_y^1, H_y^2, H_y^3 \\ H_z^1, H_z^2, H_z^3 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} h_x^1, h_x^2 + h^1, & h_x^3 \\ h_y^1, & h_y^2, & h_y^3 + h^1 \\ h_z^1, & h_z^2, & h_z^3 \end{bmatrix} \cdot [B] \quad (25) \end{aligned}$$

ここで、 $q_x^k = \partial g^k / \partial x$, $h_x^k = \partial h^k / \partial x$ などを意味し、これらは表 1 に示す簡素な形で表される。

5. 数値積分法の評価

BEM における境界積分の被積分関数は、重み関数 u^* , q^* が特異性のある関数であるために、ソース点の位置が積分すべき要素に接近するにつれて急い変化をなしてくる。このために、積分を数値的に算定すると、特に境界近傍で誤差が増大してくる。

従来、二次元問題では詳細な検討がされているが⁽¹⁰⁾、三次元問題では積分の厳密値がわからなかったため未検討であった。

ここでは、第 3 章で示した積分公式を用い、代表的な数値面積積分法の計算誤差および計算時間を評価することによって、数値積分の問題点を指摘し本手法の有用性を検証する。

〈5・1〉二種の数値積分法の分点数に対する誤差と計算時間 図 4 に示すように、ソース点を三角形一次要素 Γ_i の重心をとる垂線上に変化させて、次に示す、いわゆる影響係数の計算誤差を求める。

$$h_i = \int_{\Gamma_i} \Phi_i \cdot q^* d\Gamma \quad (i=1 \sim 3) \quad (26)$$

図 4 要素と積分誤差計算点

Fig. 4. Element and considering point.

図5 数値積分誤差 (a) Gauss 積分法
(b) Hammer による方法

Fig. 5. Error of numerical integration (a) Gaussian quadrature (b) Hammer's method.

$$g_i = \int_{\Gamma_j} \Phi_i \cdot u^* d\Gamma \quad \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 Φ_i は三角形一次要素の補間関数で、次式で表される。

$$\Phi_i = [1, x, y] \cdot [B] \quad (i=1 \sim 3) \quad \dots\dots\dots (28)$$

図5は要素からの距離 z に対する数値積分誤差を解析積分に対する相対誤差で表示したものである。

$$\text{誤差}(\varepsilon) = |(\text{数値積分} - \text{解析積分}) / \text{解析積分}| \quad \dots\dots\dots (29)$$

なお、この場合は対称性より $h_1 \sim h_3$ の誤差は等しい (g_i も同様)。

(a)は Gauss の積分を三角形領域に適用したもの⁽⁶⁾、また(b)は文献(2)で紹介されている Hammer 氏らによる方法の誤差である。いずれも積分の分点数をパラメータに取ってある。

図5の結果より、以下のことが明らかである。(1) ソース点を要素から離したり、分点数を増せば、誤差が減少する。(2) ソース点が要素に近づくにつれて誤

図6 平均誤差と計算時間

Fig. 6. Mean error and CPU time.

差が増大し、要素近傍では10%以上にも達している。(3) 積分の分点数を増やせば、誤差はある程度減少するが、要素近傍ではその効果があまり期待できない。(4) Hammer 氏らの積分は要素近傍で誤差が非常に大きく、これによる場合は注意を要する。従って、精度を高めるためには、要素からの距離は要素の大きさに対する相対的なものであるから要素分割を細かくするか、分点数を増加させなければならない。これは、いずれも計算時間の面でマイナス要因である。

図6は、計算点すべての誤差の平均 $\langle \varepsilon \rangle$ と計算時間 T の相関を示している。ただし、計算時間は解析積分を1としている。

図より明らかなように、最も分点数の少ない Gauss 2×2 、Hammer 4 で解析積分の約1.5倍、Gauss 10×10 では実に約23倍の計算時間を要している。

以上の数値積分の計算誤差および計算時間の結果より、本手法の解析積分の有用性は明らかである。

〈5・2〉 誤差分布 前節では、要素重心上にソース点を置いた場合の積分計算誤差を積分の分点数をパラメータとして検討した。本節では、Gauss 4×4 を代表例として更に数値積分のソース点位置に対する詳細な誤差分布を検討する。図7は、三角形要素上 $z=0.1$ の位置における $x-y$ 断面上の誤差分布であり、(a)、(b)はそれぞれ、各点で h_i, g_i の $i=1 \sim 3$ に対する誤差の平均値を表している。図8は、同様に $x=0.0$ の位置における $y-z$ 断面上の誤差分布を示している。

図 7 等誤差線 ($x-y$ 断面) $z=0.1$ Fig. 7. Equi error line ($x-y$ section) $z=0.1$. 図 8 等誤差線 ($y-z$ 断面) $x=0.0$ Fig. 8. Equi error line ($y-z$ section) $x=0.0$.

図から明らかなように、ソース点が要素に近づくにつれて積分誤差は増大し要素上では数十%にも達している。また、図 7 (a) にその特徴が見られるように、

誤差は積分の分点を中心に等高線を描いている様子がわかる。これは二次元の場合⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾と同様な結果であり、そこでなされた検討が三次元の場合もそのまま適用できるものである。

以上の検討結果は本手法の積分公式の有効性を検証しているのみならず、数値積分によらざるを得ない場合(曲面要素、ヘルムホルツ場など)の積分誤差に対する注意をも示している。従来の論文では、本章で示したような詳細な誤差分布の検討がなされておらず不十分であったものである。

6. 数値例による検証

次に、厳密解が知れる簡単な問題により境界値、内点ポテンシャルおよび内部流束計算に関する本手法の妥当性を確認し、かつ Gauss 積分によった場合と比較して本手法の有用性を検証する。

図 9 は向かい合う二面で u が与えられ他の面は q が 0 の試験用例題を考える。本例題は解関数近似が一次要素で完全であり、かつ形状近似誤差が存在しないため、積分誤差に起因する解関数誤差を検討するには適したモデルである。

ここでは、手法の妥当性と有用性(数値積分を用いた場合の誤差と計算時間に対する)を示すのが目的であるから要素分割は粗くて十分であり、一面を二つの三角形要素(計 12 要素)に分割した。この場合、各角に三方向の多重フラックス⁽⁶⁾を定義し、計 24 フラックス(8 節点)から構成される。また、境界面を含め領域内に $7 \times 7 \times 7$ (計 343)の内点を設けた。

これに本手法を適用したところ、境界値、内点ポテンシャルおよび内部流束ともに完全に厳密解と一致し本手法の妥当性が確かめられた。

一方、図 10 は Gauss 積分法によった場合の内点ポテンシャル計算誤差の平均 $\langle \epsilon \rangle$ と計算時間 T (本手法を 1 とした相対値)との相関を示している。

図から明らかなように、積分の分点数を増せば誤差は小さくなるが、これに伴い計算時間が増大し、 $10 \times$

図 9 例題

Fig. 9. Example.

図 10 平均誤差と計算時間 (Gauss 法)

Fig. 10. Mean error and CPU time (gaussian quadrature).

10 分点では実に本手法の約 70 倍の計算時間を要している。

なお、要素分割を細かくすれば数値積分の誤差も低減するため、図の誤差は相対的に低下するのは当然なことであって、その意味では図の結果は最も厳しい例を示しているといえる。ここで得られた結論はより複雑なモデルに対してそのまま当てはまることは容易に予想できるが、具体的な問題に対する数値例は別報としたい。

7. む す び

境界要素法における三次元ラプラス問題に対する解析的な積分公式を提案し、試験用例題でその妥当性を検証した。境界要素法の主要な特長は、問題の次元数下がるので要素分割が容易でありデータも減少できると、高速・高精度な解が得られることである。特に、三次元問題では有力な解法であると考えられるが、これらの特長を生かすためには積分計算の解析的な評価が重要である。

本手法は、ポテンシャルおよび流束を求める式が数値積分でなく極めて整理された解析式で与えられているので、計算時間が短かく精度が良い解法となっており、これによって境界要素法の有用性が更に高まるものと確信する。

なお、本論文は三角形一次要素を対象にしているが、四角形双一次要素に対する積分公式も同様に求まり、むしろ簡単なかたちになることを付け加える。

今後の課題として、高次要素に対して二次元の場合と同様な漸化式⁽¹⁰⁾が存在すると思われるので現在検討中である。

最後に、計算はすべて北海道大学大型計算機センタ

ー (HITAC-M 280 H) によったことを付記し謝意を表す。

(昭和 60 年 8 月 26 日受付, 同 61 年 4 月 24 日再受付)

文 献

- (1) G. L. Hess & A. M. O. Smith: "Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three-dimensional bodies", Report No. E. S. 40622, Douglas Aircraft Co., (1962)
- (2) G. R. Cowper: "Gaussian Quadrature Formulas for Triangles", Int. J. Num. Meth. Eng., 7, No. 3, p. 405 (1972)
- (3) A. B. Birtles, B. J. Mayo and A. W. Bennett: "Computer technique for solving 3-dimensional electron-optics and capacitance problems", Proc. IEE, 120, No. 2 (1973)
- (4) C. A. プレビア (神谷他訳): 「境界要素法入門」(昭 55) 培風館
- (5) 河野, 宅間: 「数値境界計算法」, p. 224 (昭 55) コロナ社
- (6) 例えば, 原武久: 「有限要素法の基礎」, p. 124 (昭 56) 昭晃堂
- (7) 村島: 「代用電荷法とその応用」(昭 58) 森北出版
- (8) 武田: 「境界要素法における二重節点の性質について」, 電学論 A, 104, 291 (昭 59-6)
- (9) 桑原・武田: 「境界要素法における高次要素の採用と計算時間・精度の改善について」, 電気学会研究会資料, RM-84-55 (昭 59)
- (10) 桑原・武田: 「境界要素法における高次要素の境界積分公式と誤差の検討について」, 電学論 A, 105, 1 (昭 60-1)
- (11) 桑原・武田: 「境界要素法における三次元ラプラス場の解析的な境界積分公式」, 昭和 60 年電気学会全大, No. 19
- (12) 桑原・武田: 「境界要素法における三次元ラプラス場の境界積分公式」, 日本シミュレーション学会, 第 6 回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム論文集, No. 29 (昭 60)

付 録

(1) 全体座標系 $[X, Y, Z]$ から, 局所座標系 $[x, y, z]$ への座標変換 局所座標系は注目する要素 Γ_i を (x, y) 平面にとり, かつソース点を z 軸上に置く座標系とする (付図 1)。

全体座標系 $[X, Y, Z]$ から, 局所座標系 $[x, y, z]$ への座標変換は次のように表される。

$$[x, y, z, 1] = [X, Y, Z, 1][S] \dots\dots (a 1)$$

ここで, 変換行列 $[S]$ は局所座標系の x 軸の方向余弦を l_1, l_2, l_3 などとして次のように表される。

付図 1 全体座標系と局所座標系

app. Fig. 1. General and local coordinate system.

$$[S] = \begin{vmatrix} l_1 & , & \\ l_2 & , & * \\ l_3 & , & * \\ -(l_1 X_s + l_2 Y_s + l_3 Z_s), & & \\ m_1 & , & \\ * & m_2 & , * \\ m_3 & , & \\ -(m_1 X_s + m_2 Y_s + m_3 Z_s), & & \\ n_1 & , & 0 \\ * & n_2 & , 0 \\ n_3 & , & 0 \end{vmatrix} \dots (a 2)$$

$$-(n_1 X + n_2 Y + n_3 Z), 1$$

(2) Δ_{012} 上の境界積分 座標軸の回転により、積分の上下限を簡単化する。すなわち、積分変数を(9), (10)式の方角余弦を用いて、次の (ξ, η) に変換する(付図2)。

$$\begin{vmatrix} x \\ y \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} l_{12} & -m_{12} \\ m_{12} & l_{12} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \xi \\ \eta \end{vmatrix} \dots (a 3)$$

考察すべき積分は、 $(a_1 = t_1/d_{12}, a_2 = t_2/d_{12})$ として次式となる。

$$\int_{\Delta_{012}} u q^* d\Gamma = \int_0^{d_{12}} \int_{a_1 \eta}^{a_2 \eta} u \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\} \times q^* \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \dots (a 4)$$

$$\int_{\Delta_{012}} q u^* d\Gamma = \int_0^{d_{12}} \int_{a_1 \eta}^{a_2 \eta} q \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\} \times u^* \{x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)\} d\xi d\eta \dots (a 5)$$

上式の積分は、比較的容易に実行できて、本文(16),

付図 2 座標系の回転

app. Fig. 2. Rotation of coordinate system.

付図 3 単位球面に投影

app. Fig. 3. Project into unit spherical surface.

(17)式の結果が得られる。

(3) 立体角 Ω_{12} ソース点 i を中心にとる単位球(付図3)を考える。

Δ_{012} をソース点から見る立体角 Ω_{12} は、 Δ_{012} を球面に投影した球面三角形 ABC の面積に等しく、これは球面過剰の公式より球面三角の内角 (A, B, C) により次式で表される。

$$\Omega_{12} = A + B + C - \pi \dots (a 6)$$

明らかに、 $A = \theta_{12}$ 。また、簡単な計算より $(B + C - \pi)$ は本文(20)式の第2項となっていることを示す事ができる。