トロイダルプラズマの主半径方向の振動

正 員 辻 泰 正 (愛媛大)

1. ま え が き

ポロイダル磁界の無い単純なトロイダルプラズマでは、トロイダル磁界の不均一性のため、プラズマはトーラスの外側にドリフトする。このドリフトはプラズマにトロイダル方向の電流を流して、ドリフトしたときのポロイダル磁界の導体壁による圧縮効果によって抑制できる。ドリフトとポロイダル磁界の磁気圧とが平衡する点は、アスペクト比が大きく、導体壁とプラズマの中心のずれ Δ がプラズマ半径に比べて小さい場合、Shafranov 氏により求められている⁽¹⁾。しかし、近年報告されている高ベータトカマク装置では、ポロイダルベータ値 β_p (プラズマ圧力/ポロイダル磁界の磁気圧) が1以上のものもあり⁽²⁾、その場合上述の Shafranov 近似ではアスペクト比が小さくなると、 Δ はプラズマ半径と同程度となることもある。また、プラズマは最初トーラスの外側にドリフトした後、磁気圧により平衡点の方向に移動するが、慣性のためこの平衡点近傍で振動を行うことになる。プラズマの巨視的な振動では、 θ ピンチなどで、プラズマの膨張、収縮に関連した半径方向振動 (radial oscillation) がよく知られており、その振動周期はプラズマ外部の軸方向磁界、および単位長さ当たりのプラズマの質量によって与えられる⁽³⁾。

一方、このトロイダルドリフトによる主半径方向の振動に関しては、今日まであまり検討されていない。この振動の周期は、プラズマがトーラスの外側にドリフトした後平衡点に達する時間を決める要因の一つとなることが考えられる。筆者はこの振動に与えるポロイダル磁界の影響を調べるために、直線状 Z ピンチで、プラズマと導体壁の中心がずれたときの解析を行い、周期 $\tau \propto \sqrt{\kappa^2 - 1} / B_p$ (κ : 導体壁半径/プラズマ半径, B_p : ポロイダル磁界) となることを示した⁽⁴⁾。

本論文ではプラズマと導体壁間の磁界が真空磁界であるとして、表面電流モデルを用いた Z ピンチの解析にトーラス効果、およびトロイダル磁界の影響を取り入れて、主半径方向の振動の解析を行い、平衡点、および振動周期を求めた。本論文の解析では Δ に対して特に制限を付けていないため、得られた平衡点、および振動周期は、 κ 、あるいはポロイダルベータ値が大きく、 Δ がプラズマ半径と比較して同程度の場合でも適用できる。

2. ポロイダル磁界による主半径方向の力

図1に示しているような表面電流モデルで考える。導体壁を主半径 R_w 、副半径 b の円形断面、プラズマを主半径 R_p 、副半径 a の円形断面として両者の中心は共に $z=0$ の面上にあって、 r 方向におけるずれを $\Delta (=R_p - R_w)$ とする。電流はプラズマ表面のみを流れていると仮定して、プラズマと導体壁間を真空磁界とする。導体壁外部のポロイダル磁界分布は、円環座標系を用いて求めることができ、その解は円環関数 (ルジャンドル陪関数) の級数展開で表され、級数の係数も比較的簡単な形をしている。しかし図1に示されているようなプラズマと導体壁間の磁界では、 Δ が特殊な場合

$$(\Delta = \sqrt{R_w^2 + a^2 - b^2} - R_w)$$

図1 双極座標系における表面電流モデル
Fig. 1. Surface current model in the bipolar coordinate system.

Oscillation of a Toroidal Plasma in the Direction of the Major Radius. By Yasumasa Tsuji, Member (Faculty of Engineering, Ehime University).
辻 泰正: 正員, 愛媛大学工学部電気工学科

を除いて、級数の係数は非常に複雑である⁽⁵⁾(付録)。そこで、 $R_w/b \gg 1$ としてトーラスの効果を無視すると、直線形 Z ピンチの磁界配位となり簡単に求めることができる⁽⁴⁾。まず図 1 に示してあるように、トーラスの対称軸を z 軸、主半径方向を r 軸とする円筒座標系 (r, z) より、次に示す双極座標系⁽⁶⁾ (ϕ, σ) への座標変換を行う。

$$r = R_p + L - (q/h) \sinh \sigma \dots\dots\dots (1)$$

$$z = (q/h) \sin \phi \dots\dots\dots (2)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} h &= \cosh \sigma - \cos \phi \\ q^2 &= L^2 - a^2 = (L + \Delta)^2 - b^2 \\ L &= (b^2 - a^2 - \Delta^2)/2\Delta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

である。この変換により、プラズマ断面、および導体壁は図に示す Q, Q' を極とするアポロニウスの円となり、その円上で σ はそれぞれ

$$\sigma = \sigma_1 \equiv \cosh^{-1} \left(\frac{L}{a} \right) = \ln \left(\frac{L+q}{a} \right) \dots\dots\dots (4)$$

$$\sigma = \sigma_2 \equiv \cosh^{-1} \left(\frac{L+\Delta}{b} \right) = \ln \left(\frac{L+\Delta+q}{b} \right) \dots\dots\dots (5)$$

の一定値となる。ベクトルポテンシャルを A とすると、真空領域では、

$$\nabla \times \nabla \times A = 0$$

となるが、ここでトーラスの効果を無視して、プラズマ、および導体壁を円筒状と仮定するとともに、その軸方向における一様性を仮定すると、 (ϕ, σ) 座標系では

$$\frac{\partial^2 A_t}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 A_t}{\partial \sigma^2} = 0 \dots\dots\dots (6)$$

となり (A_t ; A の軸方向成分)、(6) の解および、 $B = \nabla \times A$ より、

$$B\phi = h \left\{ C_0 + \sum_{m=1}^{\infty} m (C_m e^{m\sigma} - D_m e^{-m\sigma}) \times \cos m\phi \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$B_\sigma = h \sum_{m=1}^{\infty} (C_m e^{m\sigma} + D_m e^{-m\sigma}) \sin m\phi \dots\dots\dots (8)$$

が得られる。 $\sigma = \sigma_1, \sigma_2$ において、 $B_\sigma = 0$ の境界条件より、

$$C_m = D_m = 0 \quad (m \geq 1)$$

となり、真空領域では $B_\sigma = 0$ となる。更にプラズマ表面をトロイダル方向に流れる電流 (直線近似における軸方向電流) を I_0 とすると、アンペアの法則より

$$C_0 = \mu_0 I_0 / 2\pi q$$

となるので真空領域の磁界は、

$$B_\phi = (\mu_0 I_0 / 2\pi q) h \dots\dots\dots (9)$$

となる⁽⁴⁾。この円筒状での解をそのままトーラスに適用すると当然のことながら、 $\nabla \cdot B = 0$ とはならない。しかし $R_w/b \gg 1$ の場合はその誤差が小さいため、真空領域のポロイダル磁界を (9) 式で近似する。 R_p が変化しても I_0 および導体壁を流れるトーラス方向の電流値を一定とすると、導体壁外部のポロイダル磁界は一定である。従って、導体壁とプラズマの間の真空領域のポロイダル磁界の磁気エネルギーを W_m とするとポロイダル磁界による主半径方向の力 F_h は

$$F_h = \frac{\partial W_m}{\partial R_p} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。(1)~(3) の座標変換で、真空領域 Γ の体積要素 $d\Gamma$ 、およびその断面 S の面積要素 dS は

$$\begin{aligned} d\Gamma &= 2\pi r dS \\ &= 2\pi \left(R_p + L - \frac{q \sinh \sigma}{h} \right) \left(\frac{q}{h} \right)^2 d\phi d\sigma \end{aligned} \dots\dots\dots (11)$$

となるため、 W_m は

$$\begin{aligned} W_m &= \frac{1}{2\mu_0} \int_{\Gamma} B_\phi^2 d\Gamma = \frac{\mu_0 I_0^2}{4\pi} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_0^{2\pi} \left(R_p + L - \frac{q \sinh \sigma}{\cosh \sigma - \cos \phi} \right)^2 d\phi d\sigma \\ &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2} (R_p + L - q) (\sigma_1 - \sigma_2) \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

となる。ここで、(4)、(5) 式より

$$\frac{\partial \sigma_1}{\partial R_p} = \frac{1}{q} \frac{\partial L}{\partial R_p}, \quad \frac{\partial \sigma_2}{\partial R_p} = \frac{1}{q} \left(1 + \frac{\partial L}{\partial R_p} \right) \dots\dots\dots (13)$$

であるので、 F_h は次式のようにになる。

$$\begin{aligned} F_h &= \frac{\mu_0 I_0^2}{2} \left\{ -\frac{R_p + L - q}{q} + \left(1 + \frac{L - q}{q} \frac{L + \Delta}{\Delta} \right) \times (\sigma_1 - \sigma_2) \right\} \dots\dots\dots (14) \end{aligned}$$

3. 平衡点および振動周期

プラズマに作用する主半径方向の力は、ポロイダル磁界による F_h の他にトロイダル磁界による力 F_t 、およびプラズマ圧力による力 F_p がある。従って、プラズマの質量を $2\pi R_w M$ (M : 単位長当たりのプラズマ質量) とすると、主半径方向の運動方程式は

$$2\pi R_w M \frac{d^2 R_p}{dt^2} = F = F_t + F_p + F_h \dots\dots\dots (15)$$

となる。プラズマを 1 ターンのソレノイドコイルと考えたときのプラズマの自己インダクタンスを L_i 、外部回路との相互インダクタンスを M_i 、プラズマの表面、および外部回路の ϕ 方向に流れる電流を I_p, I_e とす

ると、 F_t は

$$F_t = \frac{1}{2} I_\phi^2 \frac{\partial L_t}{\partial R_p} + I_\phi I_e \frac{\partial M_t}{\partial R_p} \dots (16)$$

与えられる。ここで

$$L_t = M_t = \mu_0 (R_p - \sqrt{R_p^2 - a^2}) \dots (17)$$

である。 F_p はプラズマ圧力を P , R_p が δR_p だけ変化したときのプラズマ体積の増分を δV とすると、

$$F_p \delta R_p = P \delta V = P (2\pi a^2) \delta R_p$$

より、

$$F_p = 2\pi a^2 P \dots (18)$$

となる。

(15)式において $F=0$ となる点を $R_p=R_{eq}$ としてそのときのプラズマ圧力を P_0 , 更に、

$$\left. \begin{aligned} B_i &= \frac{\mu_0 (I_\phi + I_e)}{2\pi R_{eq}}, \quad B_e = \frac{\mu_0 I_e}{2\pi R_{eq}} \\ B_p &= \frac{\mu_0 I_\phi}{2\pi a}, \quad \beta_p = \frac{2\mu_0 P_0}{B_p^2} \end{aligned} \right\} \dots (19)$$

として、圧力平衡を

$$2\mu_0 P_0 + B_i^2 = B_e^2 + B_p^2$$

と近似すると、

$$F_t = \frac{2\pi^2 B_p^2}{\mu_0} (\beta_p - 1) R_{eq}^2 \frac{R_p - \sqrt{R_p^2 - a^2}}{\sqrt{R_p^2 - a^2}} \dots (20)$$

となり、更に断熱圧縮を仮定することにより、

$$F_p = \frac{\pi^2 B_p^2}{\mu_0} a^2 - \beta_p \left(\frac{R_{eq}}{R_p} \right)^\gamma \quad (\gamma: \text{比熱比}) \dots (21)$$

が得られる。(14), (20), (21)より $R_p=R_{eq}$ において

$$\begin{aligned} & (\beta_p - 1) R_{eq}^2 \frac{R_{eq} - \sqrt{R_{eq}^2 - a^2}}{\sqrt{R_{eq}^2 - a^2}} + \frac{a^2 \beta_p}{2} \\ & - a^2 \left\{ \frac{R_{eq}}{q} + \frac{L-q}{q} - \left(1 + \frac{L-q}{q} \frac{L+\Delta}{\Delta} \right) \right. \\ & \quad \left. \times (\sigma_1 - \sigma_2) \right\} \\ & = 0 \dots (22) \end{aligned}$$

が成立する。平衡状態における Δ はこの非線形方程式の根で与えられる。以後 L, q, Δ は全てこの平衡状態における値を示すものとする。(22)式は $\Delta \ll b-a$, $R_w/b \gg 1$ とすると、プラズマ内部のポロイダル磁界を零としたときの Shafranov の結果⁽¹⁾

$$\Delta = \frac{b^2}{2R_w} \left\{ \ln \frac{b}{a} + (\beta_p - 0.5) \left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right) \right\} \dots (23)$$

と一致する。ここでプラズマが $R_p=R_{eq}$ より微小量 ξ だけ変化したときの F を ξ の一次の項まで求める

$$F = (F)_{R_p=R_{eq}} + \left(\frac{\partial F}{\partial R_p} \right)_{R_p=R_{eq}} \xi \dots (24)$$

となり、

$$(F)_{R_p=R_{eq}} = 0$$

であるので、(24)式より

$$\frac{d^2 \xi}{dt^2} = -\omega^2 \xi \dots (25)$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= -\frac{1}{2\pi R_w M} \left(\frac{\partial F}{\partial R_p} \right)_{R_p=R_{eq}} \\ &= \frac{\pi B_p^2}{\mu_0 M R_w} \left\{ (\beta_p - 1) \frac{R_{eq}^2}{(R_{eq}^2 - a^2)^{3/2}} \right. \\ & \quad \left. + \frac{\gamma \beta_p}{2 R_{eq}} + D \right\} \dots (26) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D &= \frac{L(L+\Delta)}{q^3 \Delta} R_{eq} + \frac{L}{q \Delta} \left\{ \frac{(L+\Delta)(L+q)}{q^2} - 2 \right\} \\ & \quad + \frac{L-q}{q \Delta^2} \left\{ 2L + \Delta - \frac{L+q}{q^2} (L+\Delta)^2 \right\} \\ & \quad \times \ln \left\{ \frac{b(L+q)}{a(L+\Delta+q)} \right\} \dots (27) \end{aligned}$$

が得られる。(26)式の ω は、プラズマが平衡点近傍で主半径方向の振動を行うときの角周波数を示す。

4. 数値計算例

本報告では、ポロイダル磁界を直線形 Z ピンチの磁界で近似している。そこで、この直線近似の影響を調べるため、トーラスの効果を無視しないで、円環関数の級数で表されるポロイダル磁界より F_h を求めた。そしてプラズマ中心のずれ Δ を求めるとともに、微小振幅 ($\Delta/10$) を与えたときの(15)式の数値積分を行い、周期を求めて(付録)両者の比較をした。

図2は $a/b=0.5$ として、導体壁のアスペクト比を変化したときの(a) Δ , (b) τ の結果である。(a), (b)の実線は(22), (26)式より求めた $\tau (=2\pi/\omega)$, Δ を示し、図中の○は直線近似を行わないときの数値解を、また、同図(a)の破線は、従来用いられている $\Delta \ll b-a$ の近似をした(23)式より求めた Δ を示す。(23)式より求めた Δ は、 $\Delta \sim b-a$ となると誤差が大きくなっている。本報告で述べた方法では、 $R_w/b=1.5$ と極端にアスペクト比が小さい場合で、 $\beta_p=0.2$ のとき Δ に関して約 17% の誤差が生じているが、 $\beta_p \geq 1$ で Δ が大きくなると、その誤差は小さくなっている。周期 τ に関しては $R_w/b \geq 1.5$ であれば誤差は 3% 以内である。

先に報告した直線形 Z ピンチでは、

$$\tau = \sqrt{2\pi \mu_0 M / B_p^2} \times \sqrt{(b/a)^2 - 1}$$

となったが、トーラスの場合 R_w/b が減少すると、 τ は

実線：直線近似による結果，破線：Shafranovの結果
○印：直線近似を用いない結果

図2 プラズマ中心のずれ Δ ，および周期 τ の導体壁アスペクト比に対する依存性

Fig. 2. Displacement Δ of the center of a plasma and the period τ of oscillation as a function of the aspect ratio of the conducting wall.

この値よりは小さくなる。(26)式において右辺第1，2項は第3項と比較すると， b^2/R_w^2 のオーダーであり小さい。このことは振動周期は主としてポロイダル磁界によって決められてしまうことを示している。 R_w/b が減少することにより， Δ が増加すると，プラズマ表面におけるトーラスの内側と外側のポロイダル磁界の磁気圧の差が大きくなり，そのため振動周期はZピンチの場合より短くなる。

図3は $R_w/b=3$ の場合で， β_p をパラメータにして a/b を変化したときの τ, Δ を示す。図(a)の破線は図2と同様であり，図(b)の一点鎖線は直線形Zピンチのときの

$$\tau/\sqrt{2\pi\mu_0 M/B_p^2} = \sqrt{(b/a)^2 - 1}$$

を表す。トーラスの場合でも周期 τ の放電管半径に対する依存性は，Zピンチと類似しており，

$$\tau \propto \sqrt{(b/a)^2 - 1}$$

に近い変化を示すが， β_p の増加に対して，その比例定数が減少している。これは a が一定の場合， β_p が増加することにより Δ が大きくなり，先に述べた理由により， τ が減少するためである。

実線：直線近似による結果，破線：Shafranovの結果

図3 プラズマ中心のずれ Δ ，および周期 τ のプラズマ半径に対する依存性

Fig. 3. Displacement Δ of the center of a plasma and the period τ of oscillation as a function of the plasma radius.

5. ま と め

本報告では，トロイダルプラズマのプラズマ中心の平衡点，および主半径方向の振動周期に関して検討を行った。(22)式より平衡点を求めるためには，非線形方程式を解く必要があるが，方程式の形が比較的簡単のため，数値計算は容易である。平衡点，および振動周期の導入のため一部アスペクト比を無限大と近似しているが，アスペクト比が1.5までは信頼できる結果が得られた。

本報告では，プラズマと導体壁間を真空磁界としたが，リバースフィールドピンチ，あるいはスクリュウピンチのような無力電流磁界配位に対しても，同様の方法が適用できることが期待できるが，これは今後の課題である。

最後に，本研究を行うにあたり，御指導いただいた東京工業大学 林 泉教授，および本学磯村滋宏教授に対して感謝致します。数値計算では名古屋大学大型計算機センター，名古屋大学プラズマ研究所計算機センター，および本学情報処理センターを利用したことを付記します。(昭和61年12月22日受付)

文 献

- (1) V.D. Shafranov: "Plasma Equilibrium in a Magnetic Field", *Rev. of Plasma Phys.*, II 103 (1966)
- (2) J.K. Murno, Jr., L.A. Charlton, D.J. Strickler, W.A. Cooper, J.T. Hogan & D.W. Swain: "Ideal-MHD Analysis of the Stability of ISX-B High-Beta Plasmas", *Nuclear Fusion*, 22, 599 (1982)
- (3) D.L. Fisher, T.S. Green & G.B.F. Niblett: "An Experimental and Numerical Study of Radial Magnetic Oscillations", *Plasma Phys.*, 4, 181 (1962)
- (4) 辻:「ポロイダル磁界の圧縮によるプラズマの振動」, 電学論 A, 107, 165 (昭 62)
- (5) 鬼頭・竹田・本間:「円環電流による磁場の計算」, 電総研集報, 38, 104 (昭 49)
- (6) 森松・宇田川・一松:「数学公式 I」, 26 (昭 48) 岩波書店

付 録

直線近似を行わない時の振動解析 トーラスの効果を見無視しないときのポロイダル磁界に関しては、文献(5)で解説されているので詳細はその文献を参照されたい。

プラズマと導体壁間のポロイダル磁界を求めるために円筒座標系 (r, θ, z) より付図 1 に示した円環座標系 (σ, ϕ, θ) へ座標変換する。ここで、

$$r = (q/h) \sinh \sigma, \quad z = (q/h) \sin \phi \quad \dots\dots (付 1)$$

$$h = \cosh \sigma - \cos \phi, \quad q^2 = R_p^2 - a^2 \quad \dots\dots (付 2)$$

である。この変換によりプラズマ断面は図の Q, Q' を極とするアポロニウスの円となり、その面上で σ は $\sigma = \sigma_p \equiv \cosh^{-1}(R_p/a)$

の一定値となる。また、 θ 方向の一様性を仮定すると

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$$

の σ, ϕ 成分は

$$B_\sigma = (h/qh_3) \partial(h_3 A_\theta) / \partial \phi \quad \dots\dots (付 3)$$

$$B_\phi = -(h/qh_3) \partial(h_3 A_\theta) / \partial \sigma$$

$$h_3 = (q/h) \sinh \sigma \quad \dots\dots (付 4)$$

と表される。更に $\nabla \times \nabla \times \mathbf{A} = 0$ より、

$$A_\phi = h^{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n T_{n-1/2}^1(\eta) \cos n \phi \quad \dots (付 5)$$

$$T_{n-1/2}^p(\eta) = P_{n-1/2}^1(\eta_p) Q_{n-1/2}^p(\eta) - Q_{n-1/2}^1(\eta_p) P_{n-1/2}^p(\eta) \quad \dots\dots (付 6)$$

$$\eta = \cosh \sigma, \quad \eta_p = \cosh \sigma_p$$

となる。ここで、 $\sigma = \sigma_p$ において $B_\sigma = 0$ より $h_3 A_\theta = 0$ としている。また、

$$P_{n-1/2}^p(\cosh \sigma), \quad Q_{n-1/2}^p(\cosh \sigma)$$

はルジャンドル陪関数の一種で円環関数と呼ばれている。導体壁面においても同様に磁界の法線成分が零の条件より、

$$h_3 A_\theta = c = \text{一定}$$

となるが、この面では

$$R_p = \sqrt{R_\infty^2 + a^2 - b^2}$$

の特殊な場合を除いて σ は一定とはならないので、この条件より係数 C_n を解析的に求めることはできない。また定数 c も未定である。そこで、まず $c=1$ とするとともに(付 5)の級数を有限値 $n_{\max}$ で打ち切り、導体壁面上の $m > n_{\max}$ なる m 個の点で

$$h_3 A_\theta = 1$$

となる近似解を最小二乗法により求めて C_n^{-1} とすると

$$C_n = c C_n^{-1}$$

となる。次に定数 c を求めるために、アンペアの周回積分をプラズマ表面で行うと、この面上では、

$$T_{n-1/2}^1(\eta_p) = 0, \quad T_{n-1/2}^0(\eta_p) = 1/\sqrt{\eta_p^2 - 1}$$

より、

$$B_\phi = -\frac{h^{3/2}}{q \sqrt{\eta_p^2 - 1}} \sum_{n=0}^{\infty} C_n (n-1/2)(n+1/2) \times \cos n \phi \quad \dots\dots (付 7)$$

となるので、

$$\mu_0 I_\theta = cV \quad \dots\dots (付 8)$$

付図 1 円環座標系における表面電流モデル

app. Fig. 1. Surface current model in the toroidal coordinate system.

$$V = -\sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^1 Q_{n-1/2}^1(\eta_p) \dots\dots\dots (付9)$$

を得る。従って、

$$c = \mu_0 I_0 / V$$

となる。また $h_3 A_0$ は磁束関数であるから、 $2\pi c$ は真空領域内の磁束数 Φ を表す。従って、この領域内の磁気エネルギー W_m は

$$W_m = \frac{1}{2} \Phi I_0 = \frac{\pi \mu_0}{V} I_0^2 = \frac{4\pi^3 a^2 B_p^2}{\mu_0} \frac{1}{V} \dots\dots\dots (付10)$$

として与えられる。ポロイダル磁界による主半径方向の力 F_h はプラズマ表面において、その法線方向に作用する単位面積当たりの磁力線の力が $B_p^2/2\mu_0$ であることより、その r 方向の成分をプラズマ表面全体で積分することにより、

$$F_h = \frac{\pi^2}{\mu_0 \sqrt{\eta_p^2 - 1}} \left[-\frac{1}{8} C_0^2 - \sum_{n=1}^{n_{\max}} C_n^2 (n^2 - 1/4)^2 + \left\{ -\frac{3}{4} C_0 C_1 + \sum_{n=1}^{n_{\max}-1} C_n C_{n+1} (n^2 - 1/4) \times (n^2 + 2n + 3/4) \right\} \eta_p \right] \dots\dots\dots (付11)$$

となるので、この F_h と F_i, F_r との和が零となる R_p を求めて平衡点 R_{eq} とする。振動周期 τ を求める場

合は磁気エネルギーより

$$F_h = \partial W_m / \partial R_p$$

とする。この関係式および(20)、(21)式を(15)式に代入して整理すると、

$$dR_p/dt = \sqrt{Y(R_p) - Y(R_{p\max})} / \tau_0 \dots\dots\dots (付12)$$

$$\tau_0^2 = 2\pi \mu_0 M / B_p^2 \dots\dots\dots (付13)$$

$$Y(R_p) = \frac{2\pi}{R_w} \left[\frac{4\pi a^2}{V} - \frac{\beta_p a^2}{\gamma - 1} \left(\frac{R_{eq}}{R_p} \right)^{\gamma-1} - 2(\beta_p - 1) R_{eq}^2 (R_p - \sqrt{R_p^2 - a^2}) \right] \dots\dots\dots (付14)$$

を得る。ここで、 $R_{p\max}$ は積分定数で R_p の最大値である。周期 τ は(付12)式より、

$$\tau = 2\tau_0 \int_{R_{p\min}}^{R_{p\max}} \frac{dR_p}{\sqrt{Y(R_p) - Y(R_{p\max})}} \dots\dots\dots (付15)$$

となるので上式を数値積分して求める。また $R_{p\min}$ は(付12)式の根号内の値が $R_p \neq R_{p\max}$ で零となる点であり、

$$(R_{p\max} - R_{p\min})/2$$

が振動の振幅となる。