長時間 V - t 特性における条件付確率分布と2変量確率分布

正員 白旗 慎吾 (大阪大) 正員 広瀬 英雄 (高岳製作所)

絶縁材料の V - t 特性に関する確率分布モデルについては、(i) 電圧 (あるいは一般にストレスの強さ) を V 、破壊に至るまでの時間を T とするとき、 $V=v$ が与えられた条件とみなしてそのときの T に関する確率分布 (条件付き分布) を導入する方法⁽¹⁾、(ii) (T, V) に同時分布を導入する方法⁽²⁾⁽³⁾がとられている。本稿では、これら二つの確率分布について考察する。寿命の法則に対しては逆 n 乗則、指数則の二つがよく用いられるが、ここでは逆 n 乗則について考える。確率分布としてはワイブル分布を考察の主な対象とする。なお、以下では定数として記号 a, b, c, d, const を用いるが、これらは単なる記号であり同じ記号でも式が変わったりした場合必ずしも同じ値とは限らない。

(1) 条件付確率分布 $V=v$ が与えられたものとみなしたとき (すなわち、 V は説明変数とみなす) の、 T の分布関数と密度関数をそれぞれ $F(t|v)$ 、 $f(t|v)$ とおく。 $H(x)$ を $H(0)=0$ となる任意の分布関数とすると

$$F(t|v) = H(av^b t^c)$$

と書ければ

$$P(T \leq t | V=v) = \text{const} \quad (1)$$

となる (v, t) は

$$V^n T = \text{const} \quad (2)$$

の形となり、逆 n 乗則を満たす。つまり

$$P(a \log(V) + b \log(T) \leq c | V=v) = \text{const} \quad (3)$$

となる。 H としてワイブル分布関数がこれまで採用されてきた。

(2) 2変量確率分布 (T, V) は2変量確率分布とする。 V を確率変数とみなすことには疑問もあるが⁽⁴⁾⁽⁵⁾、一つの考え方でもあろう。2変量確率分布としては

$$F(t, v) = P(T \leq t, V \leq v) = 1 - \exp(-av^b t^c) \quad (4)$$

を考え

$$F(t, v) = \text{const} \quad (5)$$

を満たす (t, v) が逆 n 乗則を満たすことを主張することが多かった。例えば Occhini⁽²⁾。ところが、(4) 式は確率分布にならない。(4) 式で表される関数の簡単な形は魅力的であり、例えば岡庭ら⁽⁶⁾により用いられているが、厳密な意味で(4) 式を2変量確率分布関数

のモデルとして採用することは誤りであると考え。もし、(4) 式の係数 b, c を求めたいのなら、条件付分布モデル⁽⁷⁾でも十分対応できる。2変量分布を持ち出す必要はない。

一方、岡部⁽³⁾は(4) 式を厳密な意味で逆 n 乗則を満たす2変量確率分布関数とは考えず、次の

$$F(t, v) = \{1 - \exp(-ct^a)\} \{1 - \exp(-dv^b)\} \quad (6)$$

を新たに2変量確率分布関数の候補の一つとして提案している。そして、使用する (t, v) の範囲内では(6) 式は(4) 式に近似できると結論づけている。しかしながら、(6) 式は初めから T と V とが独立であると仮定している分布であり ($F(t, v) = F(t)F(v)$ とかける)、確率変数 T と確率変数 V との間の相関 (例えば逆 n 乗則) を求める問題には、更に別の分布を求める必要があると思われる (例えば、2変量指数分布では Gumbel⁽⁸⁾)。

ところで (T, V) を2変量ワイブル確率分布関数として逆 n 乗則を考察する場合では、式の上では多くの文献で(5) 式を考えてはいるが、実際には

$$P(a \log(V) + b \log(T) \leq c) = \text{const} \quad (7)$$

が成立することが言いたいように思える。(5) 式による逆 n 乗則が、(4) 式はもちろんどのような分布でも成立しないことは白旗ら⁽⁵⁾により示されている。

そこで、(7) 式の意味での逆 n 乗則を考えてみよう。 V の密度関数を $g(v)$ とすると

$$P(a \log(V) + b \log(T) \leq c) = \int_0^\infty P(a \log(V) + b \log(T) \leq c | V=v) g(v) dv$$

が成立する。従って条件付分布で逆 n 乗則が成立すれば、[つまり、(1) 式が成立すれば] どんな $g(v)$ に対しても(7) 式が成立する。しかしながら、(7) 式が成立しても条件付分布では逆 n 乗則は必ずしも成立するわけではない。条件付分布で逆 n 乗則が成立しない場合には、考え方を拡張して同時分布による逆 n 乗則を考察することに意味があるが、著者らは条件付分布で逆 n 乗則が成立すると考えているので、(7) 式を考察する必要はないと考える。(昭和63年6月1日受付)

文 献

- (1) 広瀬：電学論A, 106, 598 (昭 61-12)
- (2) E. Occhini: IEEE Trans. Power Apparatus Syst., PAS-90, 2671 (1971)
- (3) 岡部：電学論B, 108, 139 (昭 63-3)
- (4) 広瀬：同上A, 106, 488 (昭 61-4)
- (5) 白旗・広瀬：同上A, 108 (昭 63-7)
- (6) 岡庭ら：昭 63 電気学会全大, No. 1173
- (7) 広瀬：電学論A, 107, 185 (昭 62-4)
- (8) E. J. Gumbel: J. Amer. Statist. Assoc., 55, 698 (1960)

Conditional Probability Distribution and Bivariate Probability Distribution in Long-Term V - t Characteristics. By Shingo Shirahata, Member (Faculty of Engineering Science, Osaka University) & Hideo Hirose, Member (Numerical Information Center, Takaoka Electric Mfg. Co., Ltd.).
白旗慎吾：正員，大阪大学基礎工学部数理工学教室
広瀬英雄：正員，(株)高岳製作所数値情報センター