寿命推定に用いられる 2 変数確率分布関数について

正 員 広 瀬 英 雄 (高岳製作所)
非会員 白 旗 慎 吾 (大 阪 大)

先に、著者は寿命推定に用いられる確率分布関数について考察し、2 変数ワイブル分布関数、

$$F(t, v) = P(T \leq t, V \leq v) \\ = 1 - \exp \left\{ - \left(\frac{t}{t_0} \right)^a \left(\frac{v}{v_0} \right)^b \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

は確率分布関数としては数学的に不合理であることを述べた⁽¹⁾。ここに、 t, v はそれぞれ、時間、ストレス、 T, V はそれぞれそれらの確率変数、 a, b, t_0, v_0 は定数である。 $P(\quad)$ は確率を表す。また、条件付 1 変数ワイブル分布関数、

$$F(t|v) = P(T \leq t | V = v) = 1 - \exp(-ct^nv^b) \quad \dots\dots\dots (2)$$

は、一定の条件の下で、逆 n 乗則

$$t = kv^{-n}, (n = b/a) \quad \dots\dots\dots (3)$$

と同値であることを述べた⁽²⁾。ここに、 c, k, n は定数である。

さて、文献(1)では、(2)式の条件付分布関数が成立するような 2 変数確率分布関数を $H(t, v)$ と表したが、具体的にその形を提示してはいなかった。そこで、ここでは、2 変数ワイブル分布関数の意味を更に明確にするために、(1)式に相当する 2 変数確率分布関数 $H(t, v)$ を求めることを考える。初めに次の二つの条件を仮定する。

(i) ストレス V についての周辺分布はワイブル分布、

$$H(v) = P(V \leq v) = 1 - \exp(-dv^b) \quad \dots\dots\dots (4)$$

に従う。

(ii) ストレス v が一定の下での寿命 T は(2)式の条件付 1 変数ワイブル分布に従う。

$P(T \leq t, V \leq v)$ よりも $P(T > t, V > v)$ が求めやすいので、後者を求める。

$$P(T > t, V > v) \\ = \int_t^\infty \int_v^\infty h(t, v) dv dt = \int_t^\infty \int_v^\infty h(t|v) h(v) dv dt \\ = \int_v^\infty \exp(-ct^nv^b) \cdot b dv^{b-1} \exp(-dv^b) dv \\ = \int_{(ct^na+d)v^b}^\infty \left\{ \frac{d}{ct^na+d} \exp(-x) \right\} dx$$

$$= \frac{d}{ct^na+d} \exp \{ -(ct^na+d)v^b \} \quad \dots\dots\dots (5)$$

従って、

$$P(T > t) = P(T > t, V > 0) = \frac{d}{ct^na+d} \quad \dots\dots\dots (6)$$

となる。そこで、時間 T についての周辺分布 $H(t)$ は、

$$H(t) = P(T \leq t) = \frac{ct^na}{ct^na+d} \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。

$$F(t, v) = P(T \leq t, V \leq v) = 1 - P(T > t) \\ - P(V > v) + P(T > t, V > v) \quad \dots\dots\dots (8)$$

であるから、 T, V についての 2 変数分布関数 $H(t, v)$ は、

$$H(t, v) = P(T \leq t, V \leq v) = 1 - \exp(-dv^b) \\ - \frac{d}{ct^na+d} [1 - \exp \{ -(ct^na+d)v^b \}] \quad \dots\dots\dots (9)$$

となる、このとき、 $H(t, v) = \text{const.}$ としても、(3)式の形の逆 n 乗則は導かれぬ。つまり、ストレス V についての周辺分布がワイブル分布に従い、寿命 T が逆 n 乗則に対応づけられる条件付 1 変数ワイブル分布に従うと仮定すれば、それらに対応する 2 変数確率分布では逆 n 乗則は成立しない。一般に 2 変数分布にどのような分布を仮定しても(3)式の逆 n 乗則は成立しない。なぜなら、(3)式の漸近線は $t=0(v \rightarrow \infty)$ 、 $v=0(t \rightarrow \infty)$ であるが、 $H(t, v) = \text{const} = \alpha$ の漸近線は $t=t_a(v \rightarrow \infty)$ 、 $v=v_a(t \rightarrow \infty)$ であるからである。ここに、 $P(T \leq t_a) = P(V \leq v_a) = \alpha$ である。

このように、寿命試験における 2 変数確率分布関数の定式化がうまく説明できないのは、もともと寿命試験においてストレス V を確率変数だと考えることに無理があり、2 次元の確率 $P(t_1 < T \leq t_2, v_1 < V \leq v_2)$ が定式化できないところにその原因があると考えられる。やはり、寿命試験でのストレス v は(ストレス一定の意味での)説明変数ではあっても、確率変数と考えない方が自然と思われる。つまり、逆 n 乗則に対応する寿命分布の定式化は(2)式だけで十分と考える。

(昭和 63 年 3 月 2 日受付)

文 献

On a Bivariate Probability Distribution Function used in Lifetime Estimation. By Hideo Hirose, Member (Numerical Information Center, Takaoka Electric Mfg. Co., Ltd.) & Shingo Shirahata, Non-member (Faculty of Engineering Science, Osaka University).

広瀬英雄：正員、(株)高岳製作所数値情報センター
白旗慎吾：非会員、大阪大学基礎工学部数理教室

- (1) 広瀬：電学論 A, 106, No. 4, p. 185 (昭 61)
(2) 広瀬：電学論 A, 106, No. 12, p. 598 (昭 61)