一般三次元表面電荷法の離散化誤差の性質について

正員 久野 裕次 (名古屋大) 正員 内川 嘉樹 (名古屋大)

非会員 八木 有百実 (名古屋大)

1. ま え が き

一般三次元場の数値解析は、回転対称場を含む二次元問題に比較して格段に困難になる。その理由の一つは、解析の対象となる空間の次元が増せば取扱う未知数の数が増え、それにつれ必要な計算量も増すことである。例えば、二次元で計算量が100で済む問題に対して、三次元では少なくとも1,000必要となる。また實際上、三次元問題では二次元問題より複雑な境界形状を取扱わなければならないことが通常なので、解の信頼度に対する要請も強くなる。更に、複雑な形状の入力に要する手間も軽視できない。

電界の数値計算法は、差分法、有限要素法などの領域分割法と表面電荷法、電荷重畳法などの境界分割法に分けられる⁽¹⁾。境界分割法の一手法である表面電荷法は、境界要素法の間接法として知られ、積分方程式とも呼ばれている⁽²⁾。表面電荷法は電荷の空間的配置に関して多少とも経験の必要とされる電荷重畳法とは異なり、境界面に分布する電荷を未知関数として積分方程式を解くので、一般三次元の複雑な形状モデルを取扱うにも適していると考えられている。数値解法の手順としては、電荷密度分布関数を一定要素で区分的に近似することによって離散化し、次いで境界上の面積分(二次元問題では線積分になる)を実行することで電位係数(第2章参照)を計算し、解を求める。従って、本手法の精度の限界は、原理的にこの離散化に起因する誤差によって与えられる。

ところが、電位係数を計算する際に特異積分が避け

られないことが本手法の欠点として指摘されており、この原因による誤差を低減するための対策に努力が払われてきた。この特異積分は、曲面として与えられた境界面を平面三角形(あるいは四角形)を単位とする多面体で近似すれば、解析的に実行可能な形になることが知られている⁽¹⁾⁽³⁾。しかし、曲面を多面体で近似すると頂点では電界が特異性をもち、境界近傍の電界を精度良く求めることは不可能である⁽⁴⁾。すなわち、形状の近似による誤差と離散化誤差が相互に影響し合うので、得られた数値解に含まれる誤差が離散化によって生じたものか、形状の近似によって生じたものかを判別するのは不可能である。特に、著者らが解析を試みてきた電子光学などの分野においては、曲面形状の導体による電界の高次微係数を計算することが要求されている。このような一般三次元場の高精度電界計算には、少なくとも二次曲面で境界面を近似することが不可欠である。著者らは、既にこうした観点から、回転対称場に対して提案された特異積分のアルゴリズム⁽⁵⁾に改良を加え、一般三次元の球面、円すい面、円環面を含む二次曲面形状の境界についても、特異積分を高い精度で計算できることを示した⁽⁶⁾。これによって、数値解の精度は離散化誤差で決まることも明らかにした。

電荷密度分布を区分的に一定要素で近似する離散化は、連続関数をステップ関数で近似することに相当し、従来この近似による精度はあまり高くないと予想されてきた。著者らは、回転対称の問題に対し数値実験を重ねた結果から、離散化誤差の一般的性質を明らかにすると共に、解の精度が予想されるよりもはるかに高いことを示した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

本論文では、対象を一般三次元の問題に拡張し、離散化誤差の性質を調べる。計算に用いたモデルは真空中の導体による静電界を対象としたが、ここで展開される議論は電磁界計算一般に成立するものであることを付け加えておく。

Fundamental Natures of Discretization Errors in Three Dimensional Surface Charge Method. By Yuji Kuno, Member, Ayumi Yagi, Non-member (Graduate School of Engineering, Nagoya University) & Yoshiki Uchikawa, Member (School of Engineering, Nagoya University).

久野裕次：正員，名古屋大学大学院工学研究科博士課程(現在，沖電気工業(株))

八木有百実：非会員，名古屋大学大学院工学研究科修士課程(現在，シャープ(株))

内川嘉樹：正員，名古屋大学工学部

2. 表面電荷法の計算手順

〈2・1〉 離散化 導体表面上に分布する電荷密度を求める際の表面電荷法の基本式は、次式で与えられる。

$$\phi(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma(r)}{|r-r_0|} dS \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 $\phi(r_0)$ は空間の点 r_0 での電位、 $\sigma(r)$ は導体表面 S 上での表面電荷の密度分布関数、 ϵ_0 は真空の誘電率である。 r_0 がいずれかの導体表面上にあり、導体の電位が既知であれば、(1)式は電荷密度 $\sigma(r)$ を求めるための積分方程式になる。この積分方程式を数値的に解くために、全導体表面 S は n 個の微小な要素 ΔS_i ($i=1, \dots, n$)に分割され、電荷密度分布は各要素内で定義される適当な関数で近似される。今回の報告では、通常行われるようにステップ関数を用いて σ を各要素内で一定と近似した。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \Delta S_i \\ \sigma(r) &= \sigma_i \text{ on } \Delta S_i \quad (i=1, \dots, n) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

図1はこのステップ関数による電荷密度の近似を模式的に表している。これは、本来連続的な電荷密度(厳密解)が階段状に近似されることを意味する。当然、数値解として得られるのはこの階段状の電荷密度であり、各ステップにおける数値解と厳密解との偏差が離散化誤差となる。電荷密度を一定と近似したことから、電荷密度の変化が発散的あるいは振動的でない限り、同図のように、各ステップ内で数値解が厳密解よりも大きい部分と小さい部分とが存在することになる。この数値解と厳密解との偏差は、電荷密度の変化が急激であれば大きく、分割数が増えてステップの幅が狭くなれば小さくなるのが定性的にわかる。しかし一般三次元場では、この電荷密度の近似は二次元の面要素上で行われるので離散化誤差が複雑な振舞いをするのが考えられる。本論文では、この離散化誤差

図1 電荷密度の離散化の模式図

Fig. 1. Schematic diagram showing discretization of the charge density.

を定量的に評価するための系統的な数値実験を行う。

〈2・2〉 電荷密度の計算式 (2)式による電荷密度の離散化により、(1)式は次のようになる。

$$\phi(r_0) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \sigma_i \iint_{\Delta S_i} \frac{1}{|r-r_0|} dS \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで、点 r_0 を j 番目の要素上のサンプル点 r_j ($j=1, \dots, n$)に選ぶ。サンプル点 r_j で電位 $\phi(r_j)$ を境界条件としての導体電位 ϕ_j に一致させる。サンプル点は、例えば要素の中心に選ばれる。すると(3)式は、未知量 σ_i の n 元連立一次方程式となる。行列形式で表すと、

$$[\phi_j] = [F_{ji}] [\sigma_i / 4\pi\epsilon_0] \quad (i, j=1, \dots, n) \quad \dots (4a)$$

$$F_{ji} = \iint_{\Delta S_i} \frac{1}{|r-r_j|} dS \quad \dots\dots\dots (4b)$$

これより、電位係数の行列 $[F_{ji}]$ を求め、その逆行列を計算することで電荷密度 σ_i ($i=1, \dots, n$)を得る。しかし、(4b)式における面積分は $j=i$ のとき特異積分となる。この問題に対し、著者らは積分変数変換法を改良し、更に $|r-r_j|$ の計算におけるけた落ち誤差を抑えることで、特異積分における誤差を低減できることを示してきた⁽⁶⁾。本論文でもこの手法を用い、 F_{ji} の数値積分は相対誤差が 10^{-10} 以下になるように実行した。特異積分による誤差をこのように非常に小さくしたうえで、離散化誤差を評価していることを強調しておく。

3. 計算モデル

計算モデルとしては、本論文の目的として導体上の電荷密度の厳密解が得られることが必要である。しかし、電荷密度の厳密解が解析的に得られる電極の形状および配置は、二次元あるいは回転対称性を満足するものがほとんどである。そこで著者らは、回転対称性をもつ問題を一般三次元問題として解くことで精度の評価を行うことにした。電極の形状および配置のモデルを図2に示す。ここで、点電荷を模擬した小球上の電荷によって(接地された)大球上に誘起される電荷密度を計算する。ただし、一般三次元問題の解としての評価を行うため、大球の極(ZO)軸を点電荷に対しY軸の周りに角度 ω だけ傾けた球座標に基づき要素分割を行う。すなわち、大球表面は経線方向方位角 α ($=0 \sim 360^\circ$)と緯線方向頂角 β ($=0 \sim 180^\circ$)に沿って分割される。

大球上の電荷密度の厳密解 $q(\alpha, \beta)$ は、映像電荷法によって得られ⁽⁷⁾⁽⁸⁾、電荷密度の最大値と最小値との差は $C=20$ mで約1.4倍、 $C=2$ mでは約27倍にな

図 2 数値実験に用いたモデル

Fig. 2. Model for the numerical experiments.

る。電荷密度が最大となるのは $\alpha=0^\circ, \beta=\omega$ の位置で、反対に電荷密度が最小となるのは $\alpha=180^\circ, \beta=180^\circ-\omega$ の位置となる。従って、角度 ω の値によって、 α, β 座標から見た電荷密度の最大および最小値の位置が変わることになる。電荷密度分布の様子が大幅に変えられるという理由から、著者らは図2のモデルを採用している。このモデルに表面電荷法を適用するにあたり、各要素上で電荷密度分布を(2)式に従い離散化する。つまり、導体表面上で連続的に分布している電荷密度 $\sigma(r)$ は、 α, β の二方向へ階段状に近似されることになる。ここで、大球表面の分割数は α, β 方向へそれぞれ n_α, n_β 個とする。結果的に大球表面は $(n_\alpha \times n_\beta = n)$ 個の微小な要素 $\Delta S_i (i=1, \dots, n)$ に分割されることになる。すなわち、極の周りは曲面三角形、それ以外では曲面四角形の要素に分割される。本論文では、この曲面四角形要素部分での離散化誤差を議論の対象としている。また小球は分割せず、一つの要素 ΔS_{n+1} として取扱った。このように計算モデルの表面を分割し、電位係数 $F_{ji} (i, j=1, \dots, n+1)$ を計算する。ここで、電位係数 $F_{j, n+1}$ は ΔS_{n+1} の影響で、ほかの F_{ji} に比べ約 10^{34} 小さくなる。そこで、 $[F_{ji}]$ が特異行列となるのを避けるため、点電荷の電荷密度 $\sigma_{n+1} (=-(1/4\pi) \times 10^{34} \text{ C/m}^2)$ は既知であると(7)(8)、(4a)式を以下のように変形した。

$$[\phi_j] - [F_{j, n+1} \cdot \sigma_{n+1} / 4\pi\epsilon_0] = [F_{ji}] [\sigma_i / 4\pi\epsilon_0] \quad (i, j=1, \dots, n) \quad (5)$$

上の n 元連立一次方程式に、境界条件として大球の電位 $\phi_j (j=1, \dots, n)=0\text{V}$ を与えることで、大球上の電荷密度 $\sigma_i (i=1, \dots, n)$ が計算できる。

4. 離散化の影響の評価

一般三次元では、電荷密度は導体表面上に二次元的に分布している。それゆえ、電荷密度は各曲面要素上

で一定と近似されることになる。この二次元的な離散化は、表面電荷法による計算結果にどのような影響を与えるのだろうか。その影響を知る手法として、著者らは表面電荷法による計算結果とその境界条件との偏差を評価してみた。すなわち、大球上の電位を表面電荷法により計算し、導体電位と比較してみた。これは、(5)式によって得た階段状の電荷密度 $\sigma_i (i=1, \dots, n)$ および σ_{n+1} を再び(3)式に代入することを意味する。(3)式の面積分では、 r_0 が $\Delta S_i (i=1, \dots, n)$ 上にある特異積分を取扱うことになる。しかし、(4b)式の計算同様、文献(6)の手法を再度適用し、相対誤差 10^{-10} 以下の高い精度で積分計算を行った。表面電荷法で計算された導体上の電位 ϕ は、要素の中央にあるサンプル点では、当然のことながら境界条件として与えられた導体電位 $\phi_s(0\text{V})$ に一致する。しかし、サンプル点以外では、電荷密度の離散化の影響で、 ϕ は ϕ_j と異なる値になる。そこで、両者の差をサンプル点における電界強度 (σ_i/ϵ_0) で割ることにより、 0V の等電位面の導体表面からのずれ Δr として表すことにした。すなわち、

$$\Delta r = (\phi - \phi_j) / (\sigma_j / \epsilon_0) \quad (6)$$

図3は $C=20\text{m}, \omega=60^\circ, n=32$ (すなわち、 $n_\alpha=8, n_\beta=4$) の場合の等電位面のずれ Δr を α, β の関数として表している。同図では、 $\alpha=0 \sim 180^\circ$ の部分のみを示しているが、 $\alpha=180 \sim 360^\circ$ の部分は $\alpha=180^\circ$ を対称面としてこれと同じ分布になる。ここで、黒丸はサンプル点、太線は各要素の境界、 j は四角形要素の番号を示している。なお、一つの要素の幅は α, β 方向とも 45° ずつである。等電位面を(6)式によってではなく、実際に導体近傍の空間の電位をメッシュ状に計算して等電位面を求めてみても、図3と同じ等電位

図 3 電荷密度の数値解から計算された大球表面近傍の等電位面のずれ

Fig. 3. Deviation of the equi-potential contour surface along the large sphere surface computed from the numerical solution of the charge density.

図 4 等電位面のずれの離散化方向への断面図
Fig. 4. Cross section of the deviation of the equi-potential contour surface with respect to the directions of the discretization.

面のずれが得られることを確かめている。この Δr の振幅は分割数 n を大きくすると減少し、 n を 9 倍 (すなわち α, β の両方向に 3 倍) の 288 にしたところ、ずれの大きさは約 1/10 になった。

ここで、このずれを更に詳細に検討するために、離散化方向である α, β 方向のそれぞれに対して、サンプル点 $(\alpha_{\text{samp}}, \beta_{\text{samp}})$ での断面図を評価してみた。なお、 α 方向への断面図を $\Delta r(\alpha, \beta_{\text{samp}})$, β 方向への断面図を $\Delta r(\alpha_{\text{samp}}, \beta)$ とする。例としてサンプル点 $(\alpha_{\text{samp}} = \beta_{\text{samp}} = 67.5^{\circ})$ を通る α 方向への断面図を図 4 (a) に、また β 方向への断面図を (b) 図に示す。なお (b) 図においては、図 3 に対応して横軸 β の座標を右から左へ増加させている。図中の黒丸は各要素のサンプル点、白丸は各要素の端を示している。各要素内 (すなわち白丸から隣の白丸の間) で、等電位面はサンプル点の両側で正負にずれており、厳密解 q が極値となる部分 [(a) 図における $\alpha = 0, 180^{\circ}$ 付近および (b) 図における $\beta = 45^{\circ}$ 付近] に対応する要素を除き、ほぼ対称な奇関数の形をなしていることがわかる。図 3 における各四角形要素上でのずれの断面図を拡大し、一枚の図にしたのが図 5 である。(a) 図が α 方向の断面図 $\Delta r(\alpha, \beta_{\text{samp}})$, (b) 図が β 方向の断面図 $\Delta r(\alpha_{\text{samp}}, \beta)$ を示している。なお、横軸は要素の幅をそれぞれ $t_1: [-1, 1]$ および $t_2: [-1, 1]$ の範囲で規

図 5 サンプル点 ($t_1 = t_2 = 0$) に関する対称性 (j : 要素番号)

Fig. 5. Symmetry of the deviation of the equi-potential contour surface in the $(j\text{-th})$ element with the sample point $(t_1 = t_2 = 0)$.

格化している。 t_1, t_2 が -1 および 1 の位置は要素の端に、原点はサンプル点に対応しており、図中の番号 j は図 3 の四角形要素の番号である。 Δr は各要素内で、離散化方向 α, β のそれぞれの方向に関して、サンプル点を中心にほぼ対称な曲面をなしていることがわかる。

ここで、 Δr が正である部分、すなわち表面電荷法による等電位面が導体の等電位面に対し凸である部分は、数値解 σ による電界が厳密解 q によるそれよりも強く、反対に Δr が負である部分は、数値解 σ による電界が厳密解 q によるそれよりも弱いと考えられる。従って、数値解 σ は各要素内における Δr の極大極小値間のどこかで厳密解 q と一致するはずである。 Δr の対称性から、両者の一致する点は要素の中心にとられたサンプル点の近傍であると結論づけることができる。

念のため、著者らは C, ω の値を変えて Δr を評価

図6 等電位面のずれの α 方向への断面図

Fig.6. Cross section of the deviation of the equi-potential contour surface with respect to the α -direction.

してみた。 C を変えた場合の例として、 $C=2\text{ m}$, $\omega=60^\circ$ の場合の α 方向への断面図を図6に示す。分割数 n は32である。 $C=2\text{ m}$ の場合、電荷密度の変化が激しくなるので、ずれの振幅は $C=20\text{ m}$ の場合に比べて大きくなっている。しかし等電位面は各要素内でサンプル点を中心として、ほぼ対称にずれていることがわかる。

数値解 σ と厳密解 q とが一致する点が要素の中心にとられたサンプル点付近に存在することは、数値解 σ がサンプル点で厳密解 q の近似値であることを意味する。つまり、図1の模式図において、階段状の数値解と連続的な厳密解の曲線とが各ステップの中心付近で交差することになる。要素中央のサンプル点では、離散化誤差が零になるとは限らないが、少なくとも良い近似値が得られているはずである。そこで著者らは、要素全体ではなく、サンプル点という一点での精度に着目し、サンプル点での数値解 σ の精度を評価してみた。

5. サンプル点での数値解の精度

著者らは、数値解 σ の精度をサンプル点での厳密解 q に対する相対誤差 ε_r として評価してみた。 $C=20\text{ m}$, $\omega=60^\circ$, $n=288$ ($n_\alpha=24$, $n_\beta=12$)の場合、サンプル点での相対誤差 ε_r を滑らかにつないだ曲面が図7に示してある。ここで、分割数 n を増加させてサンプル点での相対誤差 ε_r を評価してみる。なお、分割数 n は、 α, β 両方向に同じ割合で増加させる。つまり分割幅は α, β 方向同じとする。異なる分割数 n における結果を比較するために、相対誤差 ε_r をその曲面の断面図で評価してみた。例として、 $\beta=67.5^\circ$ での断面図を図8に示す。興味深いことに、相対誤差 ε_r の曲線は分割数 n の増加に伴い、ほぼ相似

図7 数値解のサンプル点における相対誤差 ε_r

Fig.7. Fractional error ε_r of the numerical solution of the charge density evaluated against the exact solution at the sample points.

図8 数値解の相対誤差 ε_r の断面図

Fig.8. Variation of the fractional error ε_r of the numerical solution with the discretization number n as parameter in the cross section of $\beta=67.5^\circ$.

な形で減少していくことがわかる。

そこで今度は、同じサンプル点での相対誤差 ε_r を縦軸に、分割数 n を横軸に両対数で評価してみた(図9)。なお、対数表示するために縦軸は絶対値で示してある。各サンプル点で相対誤差 ε_r は分割数 n^{-x} (この場合、 $x \approx 0.94$)にほぼ比例して減少していくことがわかる。すなわち、

$$\varepsilon_r \propto n^{-x} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで、 C の値を変えた場合の例として、 $C=2\text{ m}$, $\omega=60^\circ$ での結果を図10に示す。相対誤差 ε_r が n のべき乗にほぼ比例して減少していることがわかる。著者らは、 $C=2 \sim 30\text{ m}$, $\omega=30 \sim 150^\circ$ および $\beta=22.5 \sim 157.5^\circ$ の範囲内でこれらの値を変化させ ε_r を評価してみたが、 $x=0.92 \sim 1.01$ の範囲内で(7)式が成立することを確認している。相対誤差 ε_r が分割数 n のべき乗に比例して減少するという特性は、回転対称場で

図 9 数値解の相対誤差 ε_r と分割数 n の関係

Fig.9. Fractional error ε_r of the numerical solution versus the discretization number n .

図 10 数値解の相対誤差 ε_r と分割数 n の関係

Fig.10. Fractional error ε_r of the numerical solution versus the discretization number n .

得られた離散化誤差の性質とも一致している⁽⁷⁾⁽⁸⁾。

ところで、著者は回転対称場の数値実験で、上記の分割数に対する性質のほかに、相対誤差 ε_r が電荷密度の二次微分値にも依存していることを示して、表面電荷法の離散化誤差と数値積分法の誤差理論との類似性について指摘した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。そこで、次章ではこの点を一般三次元場の離散化誤差に対して考察してみる。

6. 数値積分法の誤差理論との対応

本論文では、表面電荷法の積分方程式を解く際に（未知の）被積分関数である電荷密度を各要素内で一定と近似し、要素中央のサンプル点で（既知の）積分値、すなわち電位を境界条件と一致させた。この離散化は、数値積分法では中点則⁽⁹⁾に対応する。なぜなら、中点則では（既知の）被積分関数を各区間内で一

定とし、各区間の中央の点での被積分関数の値を用いて積分値を求めるからである。ただし、中点則の離散化誤差は積分値に現れるが、表面電荷法の誤差は被積分関数に現れる点が異なる。ここで、本論文が対象としている一般三次元表面電荷法では、二方向すなわち二次元の離散化による誤差が評価されている。それゆえ、中点則が面積分に適用された場合の離散化誤差と表面電荷法の離散化誤差とが比較されなければならない。線積分の場合の中点則の離散化誤差の大きさは、解析的手法で求められる⁽⁹⁾。面積分を中点則で計算する場合も、これと同様な手順によれば離散化誤差の大きさが求められる。紙面の都合上、導出過程の詳細は省くが、面積分 $I = \iint f(x, y) dx dy$ を中点則で計算した場合、ある区間の中点 (α_i, β_i) で、その区間の積分値に現れる離散化誤差の相対誤差 ε は次式のように表される。

$$\varepsilon \approx \frac{h_i^2}{24} \left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} f(\alpha_i, \beta_i) / f(\alpha_i, \beta_i) \cdots (8)$$

ここで、 x, y は積分変数、 $f(x, y)$ は被積分関数、 h_i は積分区間の長さで、本論文では x, y 方向同じ大きさにとった。従って、積分区間 h_i は、積分領域の x および y 方向への分割数 n_x および n_y に逆比例することになる（すなわち、 $h_i \propto 1/n_x$, $h_i \propto 1/n_y$ ）。それゆえ、(8)式は中点則の離散化誤差が、全体の分割数 $n (=n_x \times n_y)$ の -1 乗に比例して減少していくことを意味している。離散化誤差が分割数のべき乗に比例して減少していくという点で、(7)式における表面電荷法の離散化誤差と(8)式の中点則の離散化誤差とがよく似た性質を示していることがわかる。

更に、(8)式は中点則による離散化誤差の大きさが、被積分関数 f の積分変数 x, y による二次偏導関数の和に比例することも意味している。そこで著者は、二次偏導関数に関する誤差の性質を、表面電荷法の離散化誤差に対して調べてみた。ここで、(8)式は積分値の誤差を示しているのに対し、表面電荷法の誤差は積分方程式を解いて得られる被積分関数の誤差である。後者は、積分値である電位を境界条件として与えるため、逆に被積分関数である電荷密度 σ 側に誤差が生じることになる。そこで、電荷密度の厳密解 $q(\alpha, \beta)$ の二次偏導関数を $q(\alpha, \beta)$ 自身で割り算し、一符号を付けた関数 $Q(\alpha, \beta)$ 、すなわち

$$Q(\alpha, \beta) = - \left\{ \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \right\} q(\alpha, \beta) / q(\alpha, \beta) \cdots (9)$$

と表面電荷法の電荷密度の離散化誤差 ε_r とを比較してみた。例として、図 8 における $\varepsilon_r (n=288)$ と $Q(\alpha,$

β)とが示してある(図11)。二つの曲線は相似な形をしている。すなわち、

$$\varepsilon_r \propto Q(\alpha, \beta) \dots\dots\dots (10)$$

著者らは、前章の数値実験と同じ範囲内で C, ω, β の値を変えて ε_r と $Q(\alpha, \beta)$ とを比較してみたが、いずれも二つの曲線に相似関係があることを確認している。

上式の $Q(\alpha, \beta)$ は、離散化方向 α, β に関して独立に評価された二つの二次偏導関数(すなわち、 $\partial^2 q / \partial \alpha^2$ と $\partial^2 q / \partial \beta^2$) の和として与えられている。離散化が一次元である回転対称場においては、 ε_r は厳密解 q の離散化方向への二次微分値に依存した⁽⁷⁾⁽⁸⁾。これと比較すると、一般三次元場においては離散化方向、つまり離散化の次元の増加が単純に和の形で ε_r へ影響を与えている。いわば一次元の離散化の重ね合せとみなすことができる。

(10)式は、ある一定の分割数における誤差の性質を示している。そこで、分割数を変えた場合の誤差の性質である(8)式と組合せると、表面電荷法の離散化誤差に関する次式を得る。

$$\varepsilon_r \propto n^{-x} Q(\alpha, \beta) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 x は正の定数である。すなわち、表面電荷法の離散化誤差は要素中央のサンプル点で評価する限り、解析対象固有の厳密解 q の二次偏導関数に比例する変化量 Q と表面電荷法独自のパラメータである表面分割数のべき乗との積に依存することになる。著者らは厳密解が得られるほかの電極モデル、例えば球と平板モデル⁽⁹⁾などに対して、上記と同様な数値実験を行ってみたところ、離散化誤差が(11)式を満たすことを確認している。

数値解 σ の導出過程を振り返ってみると、二次元的

図 11 数値解の相対誤差 ε_r と $Q(\alpha, \beta)$

Fig. 11. Fractional error ε_r of the numerical solution and the function $Q(\alpha, \beta)$ [see Eq. (9)].

に変化する電荷密度分布が各要素のなかで一定と近似され[(2)式]、個々の電荷密度は連立方程式の形で結び付けられていた[(5)式]。このような過程から、一見表面電荷法における積分方程式の離散化誤差は非常に複雑になるように思える。しかし、分割数として被積分関数(電荷密度)に対する二つの依存性から数値積分法の誤差理論との対応が得られ、離散化誤差を(11)式のように比較的簡単な式で提示できるのは非常に興味深いことである。

7. 一般化への考察

前章までは、厳密解が得られる限られたモデルで離散化誤差の性質を検討してきた。そこで本章では、厳密解が得られないモデルにおける離散化誤差について考察してみる。

厳密解が得られないモデルの一例として、電子顕微鏡に用いられているヘアピン形電子銃の陰極先端付近(図12)について、等電位面のずれ Δr を評価してみた。なお、この陰極は半径 r_2 の円柱をヘアピン状に曲げた形状であり、二つの曲率半径 r_1, r_2 をもつ円環と半径が r_2 の円柱によって構成されている。円環部分の Δr の一部を離散化方向(α および β 方向)へ切り、サンプル点での断面図、すなわち $\Delta r(\alpha, \beta_{\text{samp}})$ および $\Delta r(\alpha_{\text{samp}}, \beta)$ として示したのが図13である。(a)図では $\alpha=69^\circ$ 付近で Δr の振幅が大きくなり、サンプル点に関する対称性が崩れている。これは、円環部に接続している円柱部で円環部に比較して要素がかなり大きくしてあり、その部分の大きな振幅の Δr に $\alpha=69^\circ$ 付近の Δr が引張られているからである。しかし、それ以外の部分では Δr はサンプル点を中心としてほぼ対称な形をしている。また(b)図において、電荷密度が極値となる $\beta=0, 180^\circ$ の付近に対応する要素では、やや Δr の対称性が崩れている。しかし、それ以外の要素で Δr はサンプル点を中心として対称な形をしていることがわかる。この結果は、厳密

図 12 ヘアピン形電子銃の陰極先端付近のモデル

Fig. 12. Model of the hairpin filament of the electron gun near the cathode apex.

図 13 ヘアピン形電子銃のモデルで得られた等電位面のずれの離散化方向への断面図

Fig. 13. Cross section of the deviation of the equipotential contour surface obtained for the model in Fig. 12 with respect to the directions of the discretization.

解の得られないようなモデルにおいても、サンプル点を要素の中央に選んでいる限りは、 Δr がサンプル点を中心としてほぼ対称な曲面をなすことを意味している。従って、第 4 章で述べた等電位面の凹凸と電界強度との関係から、要素内で一定と近似された数値解は、要素中央のサンプル点で厳密解とみなしてもそれほど大きな誤差はないといえる。

また、分割数を 3, 5, 7 倍と奇数倍に増加させれば、サンプル点の同じ位置で数値解の精度を比較することができる。従って、分割数の増加と共に数値解の精度が向上していくことを考慮すれば、厳密解が得られないモデルでも離散化誤差の定量的評価が可能となる。

厳密解 q の二次偏導関数に比例する変化量 Q との関係に関して、点電荷と大球とのモデルで数値解 σ をサンプル点でスプライン補間して得た関数を、(9) 式における厳密解 q の代わりに用いてみた。すると、変化量 Q と非常によく似た曲面が得られることを著者らは確認している。この結果の詳細は省くが、分割数の大きい数値解を用いるほど、この曲面は変化量 Q に近づいていった。つまり、数値解 σ の精度が極端に悪くない限りは、変化量 Q の分布を評価することができると思われる。すなわち、電子銃のような厳密解が得られないモデルにおいても、分割数を大きく

して求めた数値解を用いて変化量 Q を補間計算すれば、どの部分で離散化誤差が大きくなるかを見つけることが可能と考えられる。

その際、離散化誤差の大きい部分を更に細かく分割すれば、安定した精度の解が得られることになる。ただし、隣り合う要素の大きさを急激に変えた付近で、誤差が増大することが、回転対称場での数値実験より指摘されている⁽¹⁰⁾。一般三次元場においても同様な誤差の性質が予想され、精度の評価にはこの点に関する注意が必要と思われる。

8. ま と め

本論文では、一般三次元表面電荷法における離散化誤差の性質を数値実験により検討した。得られた結果をまとめると次のようになる。

(1) 電荷密度を要素内一定と近似した影響が等電位面のずれとして現れるが、そのずれは要素中央にとられたサンプル点を中心とし、二つの離散化方向へほぼ対称な曲面を構成する。

(2) その結果、電荷密度の数値解はサンプル点で厳密解の近似値とみなすことができる。

(3) サンプル点で評価された電荷密度の離散化誤差の性質は、数値積分法の中点則のそれに非常によく似た性質を示す。すなわち、離散化誤差は、電荷密度の厳密解の二次偏導関数に比例する変化量と導体表面の分割数のべき乗との積に依存する。

また本論文では、電荷密度を要素内で一定と近似した場合を対象としたが、一次あるいはより高次の関数で近似することも可能である。近似に用いる関数が異なれば、離散化誤差の大きさも変化すると考えられるので、その性質についても今後検討を進める予定である。

(昭和63年8月22日受付, 平成元年1月20日再受付)

文 献

- (1) 河野・宅間: 数値電界計算法, (昭55) コロナ社
- (2) 宅間: 昭61電気学会全大, S. 2-1
- (3) A. B. Birtles, et al.: *Proc. Inst. Elect. Engrs.*, **120**, 213 (1973)
- (4) 美咲, 他: 電気学会回転機・静止器合同研究, PM-84-45, SA-84-16 (昭59)
- (5) 内川, 他: 電学論 A, **101**, 263 (昭56-5)
- (6) Y. Kuno, et al.: *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-24**, 295 (1988)
- (7) 宇佐美, 他: 電学論 A, **104**, 495 (昭59-9)
- (8) Y. Kuno, et al.: *IEEE Trans. Magnetics*, **MAG-21**, 2523 (1985)
- (9) 例えば, G. E. Forsythe, et al. (森 訳): 計算機のための数値計算法, 第5章 (昭53) 科学技術出版社
- (10) 後藤, 他: 電気学会情報処理研究, IP-81-54 (昭56)