ひずみ波形の新しい表示法

岡山大学 中 田 高 義
岡山大学 石 原 好 之

1. ま え が き

電気回路の電圧、電流波形は諸種の原因でひずみ波になる場合が多い。たとえば、磁気飽和の存在する回路、サイリスタで位相制御を行なう回路などではしばしばこの現象がみられる。

最近では整流プラントの大容量化に伴って、整流器の高調波電流が系統内の各種機器に及ぼす影響、あるいは系統の L - C 並列共振による高調波電圧発生の有無などの検討が重要になってきた。また、交直連系送電系統においては、交直変換装置用変圧器、リアクトルの交流系不平衡時に発生する異常高調波なども問題になっている。

このように、最近ではひずみ波を定性的あるいは定量的に取り扱わなければならないという勢にあるにもかかわらず、これに関する研究はきわめて少ない。⁽¹⁾ 本論文では、ひずみ波形の新しい表示法として、正弦波におけるベクトル記号法に類似したベクトル表示の一方法を提案し、その場合の諸特性について検討する。

2. ひずみ波形のベクトル表示法

いま、ひずみ波 ϕ を

$$\phi = \sum \phi_n \sin n(\omega t + \theta_n) \dots\dots\dots (1)$$

とし、これを複素数で表示すると

$$\phi = (\sum \phi_n e^{jn\theta_n} e^{jn\omega t} - \sum \phi_n e^{-jn\theta_n} e^{-jn\omega t}) / (2j) \dots\dots\dots (2)$$

このひずみ波を第1図に示すベクトル図で表わし、この平面を「ひずみ波ベクトル平面」と呼ぶことにする。すなわち、ひずみ波ベクトル平面上では各調波ベクトルの振幅は各調波の振幅成分 ϕ_n で、またその

第1図 ひずみ波ベクトル平面上でのひずみ波のベクトル表示法 (基本波と第3調波からなるひずみ波の場合)

Fig. 1. Vector representative method for distorted wave on the vector-plane. (The figure shows an example consisting of the fundamental and the third harmonics.)

角度は各調波の角度成分 $n\theta_n$ をその調波の次数 n で除した θ_n で表示する。

正弦波のベクトル図からはただちにその瞬時値を知ることができるが、このようにしたひずみ波のベクトル表示法では瞬時値をただちに知ることはできない。しかしながら、この表示法を用いると第3章で述べるような各種の性質があるので、各調波間の関係、ひずみ波の特性などを容易に知ることができる利点がある。

3. ひずみ波ベクトルの性質

ひずみ波ベクトルを第1図のように定義すると、このベクトルには以下に述べるような諸性質がある。なお、本論文では奇数次高調波のみを含む対称波の場合だけを取り扱うが、整流回路などで現われる偶数次高調波を含有した波形にも拡張できるであろう。

(1) 位相角のみが $2m\pi/n$ ($m = \pm 1, \pm 2, \dots$) だけ異なる二つのベクトルは全く等しい。

(2) (1)式で第 k 調波の位相角 θ_k と第 $(k+i)$ 調波の位相角 θ_{k+i} の間に $\theta_{k+i} - \theta_k = 2m\pi/(k+i)$ の関係があれば、第 $(k+i)$ 調波は第 k 調波に同位相にはいり、また $(2m-1)\pi/(k+i)$ の関係があれば逆位相にはいる。ここで、 i/k は整数とする。

A New Representation of Distorted Wave Forms. By T. NAKATA, Member & Y. ISHIHARA, Member (Faculty of Engineering, Okayama University).

中田高義: 正員, 岡山大学工学部電気工学科
石原好之: 正員, 岡山大学工学部電気工学科

第2図 同位相、逆位相の説明図

Fig. 2. Diagrams illustrating "in-phase" and "anti-phase"

二つの高調波が同位相であるか逆位相であるかは、次のように定義する。第2図(a)は基本波に第3調波が同位相に、また、(b)図は逆位相にはいった例を示す。このように同位相・逆位相とは、(1)式において $\omega t = 0$ の瞬間の二つの調波の位相関係をいうのではなく、第 k 調波を基準にとる場合には $\omega t = -\theta_k$ の瞬間における状態をいう。なお、 i/k を整数に限ったのは、 i/k が非整数の場合は同位相・逆位相の考えを導入しても無意味であるからである。

(3) 第3図(a)の ϕ_a, ϕ_c のように、 θ_{bc} だけ位相の異なる全く同じ波形の二つのひずみ波のベクトル間

には次の関係がある。すなわち、各調波の位相角はそれぞれ θ_{bc} だけ異なり、振幅は相等しい。なぜなら、 ϕ_b の波形を

$$\phi_b = \sum \Phi_{bn} \sin n(\omega t + \theta_{bn}) \dots\dots\dots (3)$$

とすれば、 ϕ_c の波形は次式で表わされるからである。

$$\phi_c = \sum \Phi_{bn} \sin n(\omega t + \theta_{bn} - \theta_{bc}) \dots\dots\dots (4)$$

三相回路でしばしば遭遇する対称三相ひずみ波の場合には $\theta_{bc} = 2\pi/3$ になる。

もし、ひずみ波形に正弦波で用いられるベクトル表示をそのまま適用すれば、 ωt の基準のとり方により、同一の波形のひずみ波でも全く異なったベクトル図となる。しかるに、ひずみ波ベクトル平面を使用すればこの(3)項の性質のため、たとえば三相変圧器の磁束ベクトルを表わす場合、⁽²⁾ U 相の印加電圧 E_U を基準ベクトルにとった場合も、磁束 Φ_u を基準ベクトルにとった場合も、各調波ベクトルの相対関係は不変である。すなわち、ひずみ波ベクトル平面を用いると、基準点のとり方が θ_{bc} だけ変化しても各調波ベクトルの位相角がすべて θ_{bc} 変化するだけで、それらの相対位置に変化は生じない。

(4) 第3図(a)の ϕ_a, ϕ_b のように、一方の波形を縦軸に対して左右入れ換えると全く同じ波形となる二つのひずみ波は、(b)図のように基本波ベクトル ϕ_{a1} ϕ_{b1} の中央に線分 $\overline{OY}$ を引くと、各調波のベクトルが $\overline{OY}$ に対称位置にあるか、あるいは図の ϕ_{bn} のように $2m\pi/n$ の差で対称位置にある。そればかりでなく、線分 $\overline{OY}$ は虚軸に一致する。

いま、 ϕ_a の波形を

ϕ_a, ϕ_b : Y 軸対称逆波形
 ϕ_a, ϕ_c : 位相差 θ_s の逆波形
 (a) 種々の波形

$\phi_a = \sum \Phi_{an} \sin n(\omega t + \pi/2 + \theta_{yn})$
 $\phi_b = \sum \Phi_{bn} \sin n(\omega t + \pi/2 - \theta_{yn})$
 (b) Y 軸対称逆波形のベクトル図

$\phi_a = \sum \Phi_{an} \sin n(\omega t + \theta_{xs} + \theta_{sn})$
 $\phi_c = \sum \Phi_{cn} \sin n(\omega t + \theta_{xs} - \theta_{sn})$
 (c) 位相差 θ_s の逆波形のベクトル図

$$2\pi > \theta_{an} \geq \theta_{cn} \geq 0, \pi > \theta_s = \theta_{bc}/2 \geq 0$$

第3図 種々のひずみ波とそのベクトル図

Fig. 3. Various wave forms and their vector diagrams.

$$\phi_a = \sum \Phi_{an} \sin n(\omega t + \theta_{an}) \dots\dots\dots (5)$$

とすれば、 ϕ_b の波形は次式で表わされる。

$$\phi_b = \sum \Phi_{an} \sin n\{\omega t - \theta_{an} + (2m-1)\pi/n\} \dots\dots\dots (6)$$

ただし、 $m = \pm 1, \pm 2, \dots\dots$

(3)式と(6)式より

$$\theta_{bn} = (2m-1)\pi/n - \theta_{an} \dots\dots\dots (7)$$

(7)式より線分 $\overline{OY}$ が虚軸に一致することがわかる。

ϕ_a と ϕ_b のような(7)式を満足する二つの波形を、今後「**Y 軸対称逆波形**」と呼ぶことにする。ここで、「**逆波形**」とは、一方の波形を紙面の裏側から見ると、他方の波形に等しくなるような二つの波形と定義する。

(5)「**Y 軸対称逆波形**」の場合には、 $\omega t = 0 \sim \pi/2$ の区間の ϕ_a, ϕ_b の値が既知ならば、残りの $\omega t = \pi/2 \sim \pi$ の区間の ϕ_a, ϕ_b の値は次式の置き換えによって求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_a(\omega t) &= \phi_b(-\omega t) = -\phi_b(\pi - \omega t) \\ \phi_b(\omega t) &= \phi_a(-\omega t) = -\phi_a(\pi - \omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots (8)$$

このことは第3図(a)からも容易に理解されるが、(b)図のベクトル図で考えれば次のようになる。 ϕ_a については、時刻 $+\tau$ における各調波ベクトル $\phi_{a1}, \phi_{a3}, \dots\dots$ の位置は時刻 $-\tau$ における ϕ_b の各調波ベクトル $\phi_{b1}, \phi_{b3}, \dots\dots$ の位置と全く左右対称である。したがって、虚軸への投影値は両者相等しい。 ϕ_b についても全く同様な関係が成立する。ゆえに、 $\omega t = 0 \sim \pi/2$ の区間で ϕ_a, ϕ_b の値を求めておけば、すべての角度における ϕ_a, ϕ_b の値が換算できる。 $\omega t = 0 \sim \pi/2$ の代わりに $\omega t = -\pi/2 \sim 0$ の区間がわかっていても、他のすべての角度における ϕ_a, ϕ_b の値が計算できることはもちろんである。

(6) 第3図(a)の ϕ_a と ϕ_c のような逆波形では、(c)図のように基本波 ϕ_{a1} と ϕ_{c1} の中央に線分 $\overline{OS}$ を引くと、 ϕ_a の各調波ベクトル $\phi_{a1}, \phi_{a3}, \dots\dots$ が ϕ_c の各調波ベクトル $\phi_{c1}, \phi_{c3}, \dots\dots$ と $\overline{OS}$ に対称位置にあるか、あるいは図の ϕ_{cn} のように $2m\pi/n$ の差で対称位置にある。なお、その際、線分 $\overline{OS}$ から虚軸まで反時計方向に測った角度 θ_s は(a)図の θ_s に等しく、 θ_{bc} との間には(9)式の関係がある。

$$\theta_s = \theta_{bc}/2 \dots\dots\dots (9)$$

ここで、 θ_s は第3図(a)において原点から ϕ_a と ϕ_c の対称軸 SS' までの角度であって、上式は図から容易に証明できる。

波形 ϕ_b が ϕ_a と縦軸に対して対称なひずみ波であったのに対し、 ϕ_c は ϕ_b より θ_{bc} だけ位相が遅れた波形

である。今後、 ϕ_a と ϕ_c の波形の組を「**位相差 θ_s の形逆波**」と呼ぶ。前述の「**Y 軸対称逆波形**」は「位相差 0° の逆波形」でもある。以後の計算においては $2\pi > \theta_{an} \geq \theta_{cn} \geq 0, \pi > \theta_s \geq 0$ とし、角度はすべて反時計方向に測るものとする。

いま、 ϕ_c の波形を

$$\phi_c = \sum \Phi_{cn} \sin n(\omega t + \theta_{cn}) \dots\dots\dots (10)$$

とすれば、(4)、(7)式より

$$\theta_{cn} = (2m-1)\pi/n - \theta_{an} - \theta_{bc} \dots\dots\dots (11)$$

したがって、 ϕ_c は次式で表わされる。

$$\phi_c = \sum \Phi_{an} \sin n\{\omega t - \theta_{an} - 2\theta_s + (2m-1)\pi/n\} \dots\dots\dots (12)$$

第3図(a)において、一方の波形 ϕ_a の位相 θ_a がわかっていれば、 ϕ_a と「位相差 θ_s の逆波形」 ϕ_c との位相差 θ_{ac} は次式で求められる。

$$\theta_{ac} = 2(\theta_a + \theta_s) - \pi \dots\dots\dots (13)$$

(7)「**位相差 θ_s の逆波形**」の場合にも、 $\omega t = \theta_s \sim (\theta_s + \pi/2)$ の区間の ϕ_a, ϕ_c の値を求めておけば、 $\omega t = (\theta_s + \pi/2) \sim (\theta_s + \pi)$ の区間の ϕ_a, ϕ_c の値は、(5)項の場合と同様に置き換えによって次式で求められる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_a(\omega t) &= \phi_c(2\theta_s - \omega t) \\ &= -\phi_c(2\theta_s \pm \pi - \omega t) \\ \phi_c(\omega t) &= \phi_a(2\theta_s - \omega t) \\ &= -\phi_a(2\theta_s \pm \pi - \omega t) \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (14)$$

(8)式は(14)式で $\theta_s = 0$ といった特別の場合である。

(8)「**位相差 θ_s の逆波形**」 ϕ_a, ϕ_c のおのおの高調波の位相角 θ_{an} と θ_{cn} が等しい場合、すなわち

$$\theta_{an} = \theta_{cn} \dots\dots\dots (15)$$

なら、両波形のすべての高調波ベクトルは(c)図で線分 $\overline{OS}$ 上に存在する。

第3図(c)に示すように、対称軸 OS から各調波までの角度を θ_{s1}, θ_{s3} とすれば、 ϕ_a, ϕ_c 中の高調波の位相角 θ_{an} と θ_{cn} が等しい場合には次式が成立する。

$$\theta_{sn} = 0 \dots\dots\dots (16)$$

したがって、第3図(c)で

$$\theta_{an} \equiv \theta_{cn} \equiv \theta_{xs} \dots\dots\dots (17)$$

となり、各高調波はすべて線分 $\overline{OS}$ 上に存在する。

同様に、「**位相差 θ_s の逆波形**」 ϕ_a, ϕ_c のおのおの高調波の位相が互いに逆位相関係にある場合、すなわち、

$$\theta_{an} - \theta_{cn} = \pi \dots\dots\dots (18)$$

なら、高調波ベクトルはすべて線分 $\overline{OS}$ に直角な線上に存在する。

(9) ひずみ波が第4図(a)に示すような「**90° 対称波**」の場合には、(b)図のように各調波の位相角は

第4図 90°対称波とそのベクトル図

Fig. 4. "Symmetrical wave at 90°" and its vector diagram.

すべて等しいか、あるいは ϕ_{nn} のように $m\pi/n$ の差を有する。すなわち、各調波は基本波に同位相または逆位相にはいる。そればかりでなく、(b)図で ϕ_1 から虚軸まで反時計方向に測った角度 θ_s は(a)図の θ に等しい。

ここで「90°対称波」とは、第4図(a)のように軸 SS' に関し左右が対称な波形と定義する。(8)項で述べた波形はいずれも「90°対称波」である。

θ_s は第4図(a)において原点から対称の中心線 SS' までの角度であって、 $2\pi > \theta \geq 0$, $\pi > \theta_s \geq 0$ にとれば θ と θ_s の間には次の関係がある。

$$\theta_s = (2k-1)\pi/2 - \theta \quad (19)$$

ここで、 k は $\pi/2 \geq \theta \geq 0$ なら1, $3\pi/2 \geq \theta > \pi/2$ なら2, $2\pi > \theta > 3\pi/2$ なら3となる。

(10)「90°対称波」の場合にも、次の(20)式より波形置き換えが可能である。

$$\phi(\omega t) = \phi(2\theta_s - \omega t) = -\phi(2\theta_s \pm \pi - \omega t) \quad (20)$$

(11) 振幅の等しい3個の高調波ベクトル $\phi_{an}, \phi_{bn}, \phi_{cn}$ が「ひずみ波ベクトル平面」上でお互いに120°ずつずれている場合について考える。

性質(1)の関係を考慮すれば、ひずみ波ベクトル平面上での3個のベクトルの位相関係は次のいずれかに分類される。

$$\phi_{an} = \phi_{bn} e^{j(2\pi/3 + 2m\pi/n)} = \phi_{cn} e^{j(4\pi/3 + 2m\pi/n)} \quad (21)$$

$$\phi_{an} = \phi_{bn} e^{j(4\pi/3 + 2m\pi/n)} = \phi_{cn} e^{j(2\pi/3 + 2m\pi/n)} \quad (22)$$

ここで、 $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ とする。在来の正弦波のベクトル図であれば、(21)式はいわゆる正相分、(22)式は逆相分ベクトルを意味するが、ひずみ波ベクトル平面上では必ずしもそうとはならず、高調波の次数が関係する。そこで、高調波の次数を次の三つの

場合に分けて考察する。

$$n=6l-5 \quad (23)$$

$$n=6l-3 \quad (24)$$

$$n=6l-1 \quad (25)$$

ここで、 $l=1, 2, \dots$ とする。

まず、高調波の次数が7, 13などのように(23)式の関係を満足する場合には、(21)式の位相関係のとき3個のベクトルは正相分高調波を形成し、(22)式の位相関係のとき逆相分を形成する。

高調波の次数が3, 9などのように(24)式の関係を満足する場合には、相回転のいかんにかかわらず3個のベクトルは零相分高調波となる。

高調波の次数が5, 11などのように(25)式の関係を満足する場合には、(21)式の位相関係のとき3個のベクトルは逆相分高調波を形成し、(22)式の位相関係のとき正相分を形成する。すなわち、ひずみ波ベクトル平面上では相回転が同じであっても、高調波の次数いかにによって正相分になる場合と逆相分になる場合が生ずるのである。

ひずみ波ベクトル平面上で $\phi_{an}, \phi_{bn}, \phi_{cn}$ がそれぞれ $(2\pi/3 + 2m\pi)/n$ ずつ遅れていれば n に関係なく正相分となり、進んでいけば逆相分になることはもちろんである。

4. ひずみ波ベクトル表示法の応用例

本章では、第3章で検討したひずみ波ベクトルの諸性質を利用して、変圧器鉄心内の磁束波形を定性的に推定する応用例を示す。

第5図は大形変圧器に用いられる三相内鉄形鉄心の構造図であるが、この鉄心の各磁路磁束のひずみ波ベクトル図を計算で求めると第6図が得られる。⁽²⁾ 第6図には第 n 調波ベクトルのみを示した。また、 ϕ_{r3n} は対称軸 R に関し ϕ_{r2n} と対称な位置に、 ϕ_{bn}

第5図 R6形鉄心の構造

Fig. 5. Schematic diagram of the R6-type transformer-core.

第 6 図 R 6 形鉄心のベクトル図

Fig. 6. Vector diagram of fluxes for the R 6-type transformer-core.

第 7 図 R 3 形鉄心の構造

Fig. 7. Schematic diagram of the R 3-type core.

は対称軸 B に関し ϕ_{bu} と対称な位置にあるので、いずれも省略した。 ϕ_{r1} の各調波の位相角はすべて -120° 一定であり、同様に ϕ_{bu} のそれらはいずれも 150° 一定である。このベクトル図から、各磁路の磁束波形は次の諸性質をもっていることがわかる。

ϕ_{r2} と ϕ_{r3} は位相差 30° の逆波形であるから、 ϕ_{r3} の波形は ϕ_{r2} の波形を $\omega t = 30^\circ$ の軸を中心として左右入れ換えた波形と等しくなる。同様に、 ϕ_{bu} と ϕ_{bw} は位相差 120° の逆波形であるから、 ϕ_{bw} の波形は ϕ_{bu} の波形を $\omega t = 120^\circ$ の軸を中心として左右入れ換えた波形と等しい。また ϕ_{r1} は $\theta_s = 30^\circ$ 、 ϕ_{bu} は $\theta_s = 120^\circ$

の 90° 対称波である。

第 7 図は配電用巻鉄心変圧器などにしばしば用いられる鉄心の構造図であるが、この鉄心は第 5 図の鉄心で ϕ_{bu} , ϕ_{bw} , ϕ_{bw} の通る磁路の断面積を無限小にした特別な場合と考えられる。脚磁束中には高調波が存在しないので、 $(2)\phi_{r1}$, ϕ_{r2} , ϕ_{r3} 中の高調波 ϕ_{r1n} , ϕ_{r2n} , ϕ_{r3n} は全く等しくなければならない。ところが、 ϕ_{r2} と ϕ_{r3} の間には逆波形の関係があるので (16) 式が成立し、その結果、R 3 形鉄心ではすべての高調波ベクトルが対称軸 R 上に存在し、

$$\phi_{r1n} = \phi_{r2n} = \phi_{r3n} = \phi_n \varepsilon - j120^\circ$$

となる。なお、第 5 図あるいは第 7 図の各磁路の波形を計算する際には、(8), (14), (20) 式の置き換えが行なえるので、計算時間は半分に短縮できる。

5. む す び

(1) 式のひずみ波を第 1 図のようにベクトル表示すれば、このベクトルには第 3 章で述べたような多くの性質があることがわかった。従来、ひずみ波をベクトル表示しても各高調波の回転速度が異なるため、ベクトル図からは何の情報も得られないと考えられていたが、第 1 図のように第 n 調波ベクトルの位相角をその調波の角度成分の $1/n$ で表示すれば、基準ベクトルをどこにとっても各調波の相対位置が変化しないばかりか、ベクトル図から波形を推定することも可能であることがわかった。この表示法は、特に二つの波形相互間の関係を知りたい場合などに有用である。第 4 章には、この表示法を用いて変圧器鉄心中の磁束波形を推定する応用例を示した。

なお、本論文では奇数次高調波を含有する対称波のみを取り扱ったが、偶数次高調波を含むひずみ波形については次に譲る。

終わりに、種々ご検討いただいた京都大学 上之園、卯本両教授に深謝する。

(昭和 46 年 5 月 31 日受付、同 46 年 11 月 1 日再受付)

文 献

- (1) 中田・石原・中野：電学誌 90, 115 (45-1)
- (2) 中田・石原・中野：電学誌 91, 877 (46-5)