UDC 621.3.013.1: 621.3.018.752
621.3.011: 518.61

論文

48-A 17

角形磁気特性を含む回路に生じる振動現象

明治大学 大竹 政 光

明治大学 後 藤 以 紀

1. ま え が き

電気系における非線形振動は van der Pol 以来多くのの人々によって研究されてきたが、従来の方法では求める解の性質が第一近似の置き方で制限されてしまい、ほかにどのような解があるのか不明であったり、あるいは特殊なパラメータに対する特解しか求まらないことがある。すなわち、微分方程式においては微小項であっても解の性質を左右するものがあるので、それを無視すると求めた近似解も特別なものに限られるからである。本論文においては、非線形特性が折線で表わされた場合を扱い、各折線の線形部分の厳密解を接続して総合的な解を求めている。このように線形微分方程式の接続で表わされる場合には、周知の Klotter の方法が適用されることもあるが、この方法では解の全貌を明らかにすることは非常に困難であるし、また、微分方程式を見ればわかるように、この場合には Klotter の方法は適用できない。

本論文は回路条件が与えられたとき、それがどのような振動現象を伴うかを明らかにする図式表示を導入し、それを用いて回路条件を変化させたときに振動状態がどのように変わるかを調べ、解の全貌を捕捉しようとするものである。重要なことは、こうして得られた解は近似解ではなく厳密解で、しかも一般解が得られることであって、精密な数値を必要とするときは計算機を用いて必要なだけのけた数を求めればよい。したがって、従来の純数値解法では解の全貌をはあくすることができず、また純解析的解法が困難な場合に

非常に有効な方法であると思われる。

本論文では、はじめに解の図式表示を説明し、回路条件による数種の解の発生領域を求め、1/2, 1/3 調波のすべての分数調波の形を求めている。

2. 方程式および解の表わし方

第2図に示す折線形の磁気飽和特性を持つインダクタンスと線形の抵抗、静電容量とを直列にした回路に、第1図のように正弦波交流電源を接続したときに発生する非線形振動にはどのようなものが存在するであろうか。ここでは磁気飽和特性は角形性で、ヒステリシスを無視できるものとして第2図のように折線で表わした。

第1図の回路に対して次の微分方程式がなりたつ。

$$\frac{d\Psi}{dt} + IR + \frac{Q}{C} = e \cos \omega t, \quad I = \frac{dQ}{dt}$$

ここで、次のように変数変換を行えば、上式から(1)式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \tau \equiv \omega t, \quad q \equiv \frac{Q}{eC}, \quad \psi \equiv \frac{\omega \Psi}{e}, \quad i \equiv \frac{I}{\omega e C} \\ r \equiv \omega C R, \quad \frac{d\psi}{d\tau} + ir + q = \cos \tau, \quad i = \frac{dq}{d\tau} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (1)$$

第1図 非線形回路

Fig. 1. Circuit with a nonlinear element.

Oscillatory Behaviour in a Circuit with Rectangular Magnetic Characteristic. By M. OHTAKE, Member & M. GOTO, Member (Faculty of Engineering, Meiji University).

大竹政光: 正員, 明治大学工学部
後藤以紀: 正員, 明治大学工学部

第2図 鎖交磁束数 Ψ と電流 I との関係
Fig. 2. Relation between the number of magnetic flux interlinkages Ψ and the electric current I .

(1)式を第2図の条件の下で解けばよい。そこで、 $q_1 \equiv (q)_{\tau=\tau_1}$, $\phi_m \equiv \omega \Psi_m / e$ と置いて各線形部分に分けて解くと

$$\left. \begin{aligned} \text{(i)} \quad & \tau_1 \leq \tau \leq \tau_2 : i = 0 \\ & -\phi_m \leq \phi = \sin \tau - \sin \tau_1 \\ & \quad -(\tau - \tau_1) q_1 \pm \phi_m \leq \phi_m \\ \text{(ii)} \quad & \tau_2 \leq \tau \leq \tau_3 : \phi = \mp \phi_m \\ & ir = \frac{r^2}{1+r^2} \cos \tau - \frac{r}{1+r^2} \sin \tau \\ & \quad - \left\{ q_1 - \frac{1}{1+r^2} \cos \tau_2 \right. \\ & \quad \left. - \frac{r}{1+r^2} \sin \tau_2 \right\} e^{-(\tau-\tau_2)/r} \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

ただし、 $\tau = \tau_1$ のとき $i = 0, \phi = \pm \phi_m$, $\tau = \tau_2$ のとき $i = 0, \phi = \mp \phi_m$ で、 $\tau = \tau_3$ で再び $i = 0, \phi = \mp \phi_m$ となる。ここに複号はすべて同順である。

結局、第2図に示す非線形特性は区分的線形なので第1図に示す回路の微分方程式は各線形区間ごとに厳密に解けたのであるが、(2)式の形では解の様子が全くわからず見通しがつかない。本方法では、 τ_1 とそれに対応する τ_3 との関係をとりえて解の見通しをつけ、その全貌を明らかにしようとするのである。はじめに

(2)式の各項の関係を第3図に示しておく。

第3図において $\overline{AB}$ は曲線 $\sin \tau - 2\phi_m$ の接線で、 τ_1 で接している。したがって、この線分から曲線 $\sin \tau$ に至るまでの高さは

$$\begin{aligned} \uparrow &= \sin \tau - \{(\tau - \tau_1) \cos \tau_1 + \sin \tau_1 - 2\phi_m\} \\ &= \sin \tau - \sin \tau_1 - (\tau - \tau_1) q_1 + 2\phi_m \\ & \quad (q_1 = \cos \tau_1 \text{ の理由は後述}) \end{aligned}$$

すなわち、 $\uparrow$ は第2図で $(0, -\phi_m)$ から測った ϕ の値を示していることになる。 B 点ではこの値が零、つまり $\phi = \phi_m$ から出発して遂に $\phi = -\phi_m$ に到達したことを意味し、そのときの位相が τ_2 である。 τ_2 では同時に(2)式の(ii)に従って

$$(ir)_{\tau=\tau_2} = \cos \tau_2 - q_1 = \cos \tau_2 - \cos \tau_1$$

を満たす電流 i が流れ出す。第3図の $\downarrow$ は上式の ir を示す。ただし、 D 点は $\overline{CD} = \overline{EF}$ となるようにとってある。また $\uparrow$ がさか立ちしているのは i が負であることを意味する。 H 点で電流が再び零となりこれで半サイクル終了し、そのときの位相が τ_3 である。 τ_3 以降は ϕ が増加し再び $\phi = \phi_m$ に到達し、正の電流が流れ、それが零になるとまた ϕ が減少し……という過程をくり返す。次に $\uparrow$ を求めるときに $q_1 = \cos \tau_1$ とおいた理由は $q_1 \neq \cos \tau_1$ であっても半サイクル終了後は必ず $(d\phi/d\tau)_{\tau=\tau_3} = 0$ 、したがって $q_3 = \cos \tau_3$ となるからである。周期解を扱う限り $q_1 = \cos \tau_1$ となる以前の過渡状態を無視してさしつかえないし、必要があればその部分だけ別に求めることも容易である。

τ_1 の与え方によっては $(0, -\phi_m)$ に到達せずに、再び $\phi = \phi_m$ となって正の電流が流れ出すこともある。第3図に示す τ_1' から始まった現象はこの一例である。第4図に τ_1 の位相と生ずる現象との順序を図式的に表わしておく。ここに τ_1 は $\sin \tau$ と $\sin \tau - 2\phi_m$ との共通接線が $\sin \tau - 2\phi_m$ に接する点の位相を示す。 $\phi_m > 1$ では τ_1 は無限個存在することに注意しておく。

第3図からも明らかなように、符号を別にすれば τ_3 以後の現象は $\tau_3 - n\pi (0 \leq \tau_3 - n\pi, n = 1, 2, 3, \dots)$ を

第3図 (2)式における各項の関係
Fig. 3. Schematic explanation of expression (2).

第 4 図 τ_1 による現象の相違Fig. 4. Phenomena depending on τ_1 .

新しい τ_1 として、その τ_1 から始まった現象と考え、したがって新しい τ_2, τ_3 を (2) 式により求めることができる。言い替えば、ある回路条件で τ_1 によってどのように現象が変化してゆくか調べるのに、 $0 \leq \tau_1 \leq \pi$ なる τ_1 についてそれに対応する τ_3 を調べておけばよいことになる。

第 5 図は 0 から π まで τ_1 を連続的に変化させたときの τ_3 の値を (2) 式により求め、それらの関係を示したものである。0 と π の間に入れてある番号の示す位相 τ_1 で始まった振動は、それに対応する番号の示す位相 τ_3 で半サイクル終了していることを意味し、ハッチ部分の位相 τ_1 で始まった振動は、それに対応するハッチ部分の位相 τ_3 で半サイクル終了していることを示している。

τ_3 から次の半サイクルの現象は $n\pi$ ($n=1, 2, 3, \dots$) だけでもどして考えればよいから、(a) 図の場合はある安定位相 S に落ち着く電源の周波数を持った安定周期解であることが容易にわかる。 τ_1 が (6) の位相で始まったときは、一度 ϕ が $-\phi_m$ に至るが [そのときの位相が π と 2π との間の位相 (6) である] 再び大きくなり、結局 (6') で $\phi = \phi_m$ にもどる。(b) 図では基本周期解の安定解 S と不安定解 U とが共存している。この不安定解は $\psi_m = 1$ から現われだし、しばらくは安定解と共存するが、(c) 図に示すように遂には両者は一致し準安定解 M となり、以後この種の基本周期解は消失する。(d) 図は安定な $1/2$ 調波の例である。また $1/3, 1/5, 1/7, \dots$ などの分数調波の不安定解は

(a) $\psi_m = 0.25$ (b) $\psi_m = 1.25$ (c) $\psi_m = 1.571$ (d) $\psi_m = 2.135$ 第 5 図 $r=0.1$ のときの τ_1 と τ_3 との関係
Fig. 5. Relation between τ_1 and τ_3 in the case of $r=0.1$.

$\psi_m > 1$ で常に存在することもわかる。なお、一般に $\psi_m > 1$ の場合には $\pi/2$ の位相で $-\phi_m \leq \phi \leq \phi_m$, $i=0$ なる安定定常解 (電源周波数) も存在するが、これについても明らかであろう。

3. 回路条件による数種の解の発生領域

前章に幾つかの例を示したが、一般に $r \leq 1$ では、はじめ ϕ_m の小さい所で安定基本周期解 S のみが出て、 $\phi_m = 1$ から発生する不安定基本周期解 U としばらく共存し、さらに ϕ_m が大きくなると遂には S と U とが一致して準安定解 M となり、 $\pi/2$ で発生するもの以外は基本周期解に関するものは消失する。 $r > 1$ では分数調波は抵抗分 r のためにおさえられてしまい、第6図に示すように安定基本周期解のみが発生する。

分数調波についても同様に、 ϕ_m の変化に伴ってどのように移ってゆか調べることができ、第7図に $1/2$ 調波、 $1/3$ 調波について基本周期解の安定解、不安定解、準安定解とともにその発生領域を示す。基本周期の不安定解の発生領域は、 $\phi_m = 1$ と準安定解発生曲線とではさまれた領域で安定基本周期解の発生領域の一部分と重複している。また、 $\phi_m > 1$ では $1/3$ 調波の不安定解およびすでに述べた $\pi/2$ における基本周期解は常に発生していることに注意しておく。

その他の分数調波についても本方法を用いれば全く同様に調べることができる。

第6図 $r=10$, $\phi_m=2.5$ のときの τ_1 と τ_3 との関係

Fig. 6. Relation between τ_1 and τ_3 in the case of $r=10$, $\phi_m=2.5$.

第7図 基本周期の安定解、不安定解、準安定解および $1/2$, $1/3$ 調波の発生領域

Fig. 7. Domains of fundamental stable, unstable and metastable solutions and subharmonic ones of the order of $1/2$ and $1/3$.

4. 分数調波のすべての形

同じ $1/n$ 調波に属するものでも異なった形のものが存在する。たとえば、第5図(d)は $1/2$ 調波であるが、そのほかにも第8図に示すような $1/2$ 調波が存在する。それでは存在可能な分数調波の形にはどのようなものがあるだろうか。それを調べるために分数調波を次のように表わすことにする。すなわち、位相 $0 \leq \tau_1 \leq \pi$ で始まり、位相 $m\pi \leq \tau_3 \leq (m+1)\pi$ で半サイクル終了し、次の半サイクルが位相 $0 \leq \tau_1' \equiv \tau_3 - m\pi \leq \pi$ で始まり、位相 $n\pi \leq \tau_3' \leq (n+1)\pi$ で終了したとすれば、 $[m, n, \dots]$ などと表わすことにする。このような表わし方をすると基本調波は $[1, 1, 1, \dots]$ となるが、このような周期解は $[1]$ と表わすことにする。たとえば、第5図(d)を $[1, 1, 2]$ のように書くことにする。このように書けば位相に関係なく同一の形の分数調波はすべて同じ表現になる。しかも、それを見れば位相を除けばいかなる分数調波かも直ちにわかる。

4π かかって一巡したときにちょうど出発した位相にもどれば、それは $1/2$ 調波だから $1/2$ 調波の候補となるものを形式的にすべて書けば第1表が得られる。

この表で、①、⑥、⑧は存在できないことは容易にわかる。また③、⑤はともに②と同等、⑦は④と同等

第1表 $1/2$ 調波の形式的展開

Table 1. Formal expansion of $1/2$ -harmonic oscillation.

①	$[1, 1, 1, 1]$	✓
②	$[1, 1, 2]$	
③	$[1, 2, 1]$	②に同等
④	$[1, 3]$	
⑤	$[2, 1, 1]$	②に同等
⑥	$[2, 2]$	✓
⑦	$[3, 1]$	④に同等
⑧	$[4]$	✓

$r=0.1$, $\phi_m=2.14$

第8図 $1/2$ 調波

Fig. 8. Subharmonic oscillation of the order of $1/2$.

第2表 1/3 調波のすべての形
Table 2. All types of 1/3-harmonic oscillation.

①	[1, 2]	} [註] 参 照
②	[3]	
③	[1, 1, 1, 1, 2]	
④	[1, 1, 1, 3]	
⑤	[1, 2, 1, 2]	
⑥	[1, 2, 3]	
⑦	[1, 3, 2]	
⑧	[1, 5]

第9図 1/3 調波

Fig. 9. Subharmonic oscillation of the order of 1/3.

なことも明らかである。よって、存在可能な 1/2 調波の形は [1, 1, 2] および [1, 3] で、これは上に述べた二つの形で、結局、これらですべてであることがわかる。同様に 1/3 調波についても形式的にすべて書き出し、その中から存在可能なものを選べば第2表を得る。第9図にこれらに対応する振動の一例を示してお

く。この図の安定位相 S は第2表の①に示す形であり、不安定位相 U は②の形である。

この方法により、その他の分数調波についても全く同様に調べることができる。

[註] ①, ②が 1/3 調波である理由は、第9図において 3π でもとの位相にもどったときに ψ の値は $-\psi_m$ で、もう一巡しないと最初の値 ψ_m にもどらないからである。

5. む す び

非線形特性が折線で表わされた場合の非線形回路の一つの解法を示し、具体的にどのような振動が現われるかを調べ、数種の解についてその発生領域を求め、分数調波のすべての形を求める方法を示し、1/2, 1/3 調波についてはその存在しうる形をすべて見いだした。本方法は、計算機を用いて必要なだけの数値的精密さを得られるし、また回路パラメータを変化させて厳密解がどのように並んでいるのか調べているので、性質的に異なる解を見逃すようなこともない。非線形特性がさらに複雑になっても計算機によって全く同様に扱うことができる。通常は計算機を用いてもパラメータのある特定の値に対する解を求めたり、近似解の点を接続したりするにすぎないが、それに対して本方法のようにパラメータを変化して厳密解の種類がどのように並んでいるかを計算機によって求めるならば、純解析の方法で一般解が求められなくても解の全貌をはあくできるのである。これは計算機の一つの新しい使い方でもある。

(昭和47年6月10日受付)