UDC 621.315.611.014.31: 621.317.333.6

論 文

48-A 38

固体電気絶縁材料の高電圧小電流耐アーク性試験方法に関する考察

日立化成工業株式会社

杉 江 忠

日立化成工業株式会社

山 本 喜 万

日立化成工業株式会社

樫 村 寿 雄

日立化成工業株式会社

井 上 利 夫

1. ま え が き

最近アメリカのテレビ火災事故に関連して、これに使用する固体絶縁材料の耐アーク性が重要視されている。

特に火災の発生源になりやすい電源スイッチ材料に対しては、難燃性で、かつ、耐アーク性時間が180s以上というUL (Underwriters' Laboratories, Inc.) のきびしい材料認定基準が設けられた。⁽¹⁾ このように耐アーク性秒数が商取引の基準に用いられることになってから、わが国の電気絶縁材料メーカーおよびユーザ各社で測定した同一種類の材料の耐アーク性時間が大幅に違うことが大きな問題になっている。

ASTM 規格の耐アーク性試験方法は、昭和30年に電気学会の電気絶縁材料試験法専門委員会第3小委員会で詳細に検討され、⁽²⁾ JEC-149、⁽³⁾ JIS K 6911⁽⁴⁾ に取り入れられた。その内容には、装置が違ってなるべく同じ結果が得られるように、装置に使用する部品の仕様、回路素子、試験前の調整方法および試験条件などが細かく規定されている。しかし、現実には市販の試験装置にかなりの機差が生じている。

筆者らは、電気絶縁材料メーカーの立場で、機差の原因を調べるため、特に試験装置の調整で問題になると考えられる電氣的要因に主眼をおいて実験を行なっ

た。

その結果、これらの要因が耐アーク性試験装置の機差をなくするために重要な意味をもっていることがわかったので、その成果を報告する。

2. 供 試 料

本実験に使用した試料は、いずれも日立化成工業株式会社製である。供試料の名称と公称厚さを第1表に示す。

3. 実験装置とその方法

〈3・1〉 ASTM D 495 規格による実験 実験方法の詳細は ASTM 規格、⁽⁵⁾ 電気学会技術報告、⁽²⁾ JEC-149⁽³⁾ に記述されているので、ここにはその概略を記

第1表 供 試 料

Table 1. Samples used for arc resistance test.

試 番	材 料 名 称	公称厚さ (mm)
(1)	ガラスマット基材ポリエステル樹脂積層板	1.6
(2)	無機質充てんポリエステル樹脂成形板	3.2
(3)	ガラス布基材メラミン樹脂積層板(A)	1.6
(4)	ガラス布基材メラミン樹脂積層板(A)	3.2
(5)	ガラス布基材メラミン樹脂積層板(B)	1.6
(6)	無機質充てんメラミン樹脂成形板	3.2
(7)	紙基材メラミン変性フェノール樹脂積層板	1.6
(8)	紙基材エポキシ樹脂積層板	1.6
(9)	ガラス布基材シリコン樹脂成形板	1.6
(10)	無機質充てんフェノール樹脂成形板(A)	3.2
(11)	無機質充てんポリエステル樹脂成形板(A)	3.2
(12)	無機質充てんポリエステル樹脂成形板(B)	3.2

Considerations on High Voltage Low Current Arc Resistance Test of Solid Electrical Insulating Materials. By T. SUGIE, Member, Y. YAMAMOTO, Member, T. KASHIMURA, Member & T. INOUE, Member (Hitachi Chemical Co., Ltd.)

杉江 忠: 正員, 日立化成工業株式会社

山本喜万: 正員, 日立化成工業株式会社

樫村寿雄: 正員, 日立化成工業株式会社

井上利夫: 正員, 日立化成工業株式会社

第 1 図 耐アーク性試験回路

Fig. 1. Arc resistance test circuit.

すにとどめる。

第 1 図に実験装置の電気回路を示す。試験片を適当な支持器で支え、スイッチ S_1 を閉じ、 T_a を調整して T_v の二次電圧が 12.5 kV になるようにあらかじめ定めておいた V_1 の値に合わせる。次に S_m を閉じ、測時計の始動と $S_{1/8}$ の閉路とを同時に行なう。試料がアークに 1 分間耐えたら、その 1 分間が終わるごとにスイッチ $S_{1/4}$ および $S_{1/2}$ を閉じ、次第に試験の過酷度を増加させていく。さらに 1 分間の間隔をおいてスイッチ S_{10} , S_{20} , S_{30} および S_{40} を閉じ、次第に電流を増加させていき、耐アーク性時間すなわち試料の破損が生じるまでの試験操作の全経過時間を測定する。

この実験方法では、1 分間ごとにアーク放電による熱発生量が約 2 倍になる。したがって、耐アーク強度を絶対量として表わすことが困難である。小川氏ら⁽⁶⁾はこのことに着目し、1 分間ごとに目盛を倍に拡大して表示し、ASTM 規格の試験条件をグラフに取り入れ、アークの強さを考慮した比較が一目でわかるようなグラフの目盛方法を提案した。筆者らも以下の耐アーク性時間のグラフはすべてその表示方法を採用した。

〈3・2〉 電圧および電流特性の実験 第 1 図と同じ実験装置を用いて、二次電流調整用の抵抗 R_{10} と二次電圧調整用の可変比単巻変圧器 T_a を操作して、二次電流を 10 mA 一定で、二次回路開放電圧を 8~14 kV の範囲に変えながら、耐アーク性時間の電圧特性を測定した。一方、電流特性の実験は、上記と同様な操作を行なうことにより、二次開放電圧を 12.5 kV 一定に保ち、かつ、電流を 4~14 mA の範囲に変化して行なった。

〈3・3〉 高周波電流の重畳と耐アーク性時間の実験

試料をつけないか、あるいは無機質の板の上でアークを飛ばしたとき、アークの動揺がみられる場合には

アーク電流に高周波電流が重畳していることがある。それを防止するため、試験回路には高周波電流抑制のためのインダクタンスと抵抗がはいっている。実際に問題になるのは、抑制回路より電極側にはいるリード線間およびリード線と対地間の漂遊静電容量の値である。

実験では配線の仕方による漂遊静電容量を変えることがむずかしいため、第 2 図に示したように等価的に種々の既知静電容量を意識的に電極間に接続して行なった。

〈3・4〉 アーク放電電圧の波形観測 第 2 図に示すように、正常アーク状態でのアーク放電電圧の波形観測は、スイッチ S を開いた状態で電極間 E, F に電圧測定用の分圧抵抗を入れ、シンクロスコープを用いて行なった。高周波成分の観測は、 S を閉じ等価静電容量 C を入れて上記と同じ方法で行なった。

〈3・5〉 アークエネルギーの測定

(1) 三電圧計および三電流計法⁽⁷⁾ 耐アーク性試験回路のアーク放電部のインピーダンスを未知インピーダンスとみなし、直列または並列既知抵抗 R 、電

第 2 図 アーク電圧波形測定回路

Fig. 2. Measuring circuit of arc voltage waveforms.

圧計および電流計で実測した実効値をそれぞれ E_1 , E_2, E_3 および I_1, I_2, I_3 として電力 P_a をそれぞれ次式から算出した。

$$P_a = \frac{1}{2R}(|E_1|^2 - |E_2|^2 - |E_3|^2) - I^2 r \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 I : アーク放電電流、 r : アーク乱れを防止するため付加した抵抗
および

$$P_a = \frac{R}{2}(|I_1|^2 - |I_2|^2 - |I_3|^2) \quad \dots\dots\dots (2)$$

(2) 電力計法 耐アーク性試験回路の漏れ変圧器の一次側に電力計を接続し、規定の電流値でアーク放電させているときの電力 P_1 を測定する。次にアーク放電電極を短絡し、電流は一次側の電流調整用抵抗によって同じ規定値に調整して電力 P_2 を測定する。電力 P_a は

$$P_a = P_1 - P_2 \quad \dots\dots\dots (3)$$

から求めた。

(3) 計算による方法⁽⁸⁾⁽⁹⁾ 耐アーク性試験装置のアーク放電回路は、第3図のような等価回路で表わすことができる。 $e(t)$ は入力端子に加わる正弦波電圧、 $u(t)$ はアーク放電電圧を示し、第4図のような長方形のひずみ波となる。回路電流 $i(t)$ を求める方法としては、はじめに $e(t)$ が L, R 回路に加わった場合の電流 i_1 と、放電電圧 (この場合は逆電圧) $u(t)$

第3図 アーク放電回路の等価回路

Fig. 3. Equivalent circuit of arc circuit.

$e(t)$: 入力電圧、 $u(t)$: アーク放電電圧、 $i(t)$: アーク放電電流
 $\bar{u}(t)$: 近似長方形アーク放電電圧

第4図 $e(t), u(t), i(t), \bar{u}(t)$ の波形

Fig. 4. Waveforms of $e(t), u(t), i(t)$ and $\bar{u}(t)$.

が L, R 回路に加わった電流 i_2 を求め、これらの合成電流を重ねの定理を応用して求める方法をとった。なお、放電電圧には第4図のような長方形波近似を行ない、フーリエ級数を適用して解析した。一般にアーク放電回路のような負性インピーダンス回路にはフーリエ級数を用いることはできないが、この場合は電流一定の条件で取り扱うので、その問題はない。

長方形波の振幅は、アークの点弧および消弧時の過渡電圧を平均化して $u(0)$ を決定した。

以上の仮定により、アーク電力 P_a は次式により求められる。(付録参照)

$$P_a = \frac{2\sqrt{2}Eu(0)}{\pi Z} - \frac{8u^2(0)}{\pi^2} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \varphi_m}{(2m+1)^2 \sqrt{R^2 + (2m+1)^2 \omega^2 L^2}} \quad \dots\dots\dots (4)$$

ここで、 $R=30\text{ k}\Omega$, $\omega L=250\text{ k}\Omega$, $\frac{\sqrt{2}E}{Z}=$

$I_m = \sqrt{2}|I_m|$, $|I_m|$: 電極間を短絡したとき流れる二次電流の実効値、 $u(0)$: 実測波形から与えられる値

4. 実験結果とその考察

<4.1> 二次電圧および二次電流の変動と耐アーク性時間の関係 ASTM 規格によると、二次回路開放時の電極間電圧は 12.5 kV を標準に定めている。その前後で電圧を変動させた場合、耐アーク性時間にどのような影響を与えるかを検討した。その結果を第5図に示す。

試験を行なった電圧範囲は 8~14 kV であるが、この電圧範囲では耐アーク性時間に及ぼす影響はほとんど

第5図 電圧変化と耐アーク性時間の関係 (電流 10 mA)

Fig. 5. Relation between voltage and arc resistance time.

第 6 図 電流変化の耐アーク性時間の関係

Fig. 6. Relation between current and arc resistance time.

ど無視できることがわかった。電圧の増減によって放電している時間も若干増減するはずであるが、電圧がいずれも電極間の放電電圧以上であり、かつ、二次電流を 10mA 一定に調整していることから、試料に加わるアークエネルギーがほぼ一定になるためと考えられる。このことは、耐アーク性試験前の二次電圧の調整で電圧が若干違っても、二次電流さえ正確に調整されていれば機差の原因にならないことを意味している。

次に、第 6 図に安定なアークを維持できる範囲で、二次電流を変化させて耐アーク性時間を測定した結果を示す。

この試験法では、アーク強度が倍増された直後に試料の温度は急激に上昇するので、理論的には e^a に比例して温度が上昇する。耐アーク強度はアーク熱による材料の破壊で決まると考えれば、アーク強度が次の段階に変わって 10 秒前後で試料に導電路を形成し、破壊する確率が非常に大きいと考えられる。この過渡期を過ぎれば温度も漸次一定になっていくため、かなり長い時間アークにさらしても試料の破壊はあまり起こらないのが普通である。⁽¹⁰⁾

第 6 図の電流を変えて測定した耐アーク性時間の变化をみると、アーク強度の段階が変わる 60, 120 および 180 秒経過した直後の過渡期には、電流変化による耐アーク性時間の变化は小さい。しかし、過渡期を過ぎて次の 60 秒間経過するまでの間で電流の影響を受けやすく、耐アーク性時間が電流減少に伴って急激に変化している。それは、アーク強度の段階が変わった直後は、アーク放電回数が増加するために生ずるアーク熱の増加分が電流減少によるアーク熱の減少分を大

部分相殺するため、耐アーク性時間はほとんど変化しないものと考えられる。逆に、アーク強度の段階が変わってから 60 秒後の次のアーク段階に変わるまでの間では、電流の増減によるアーク熱の増減が試料の耐アーク強度を支配するため、耐アーク性時間は第 6 図のような階段状の変化を示すものと考えられる。

以上述べたように、アーク放電中の二次電流の調整が不十分であるときには、同種類の材料であっても、耐アーク性時間は大幅に変化することがわかる。二次電流の調整は、電源電圧の変動および安定なアークについても十分配慮しながら慎重に行なう必要があることを確認できた。^{(10)~(12)}

〈4・2〉 高周波電流の重畳と耐アーク性時間の関係

第 2 図の回路で S を閉じ、静電容量の値を 15~160 pF の範囲で変えて耐アーク性時間を測定した。その結果を第 7 図に示す。図からわかるように、試番 (2) (3), (6) は静電容量が 15~120 pF の範囲でほとんど耐アーク性時間に変化が認められず、120 pF より大きくなると急激に耐アーク性時間が短くなっている。しかし、種類の異なるガラス布基材メラミン樹脂積層板 (B)⁽⁵⁾ と紙基材エポキシ樹脂積層板⁽⁸⁾ は、静電容量が増加するとともに耐アーク性時間が長くなり 70~100 pF 付近で極大を示し、さらに静電容量が増加すると逆に耐アーク性時間は短くなる傾向を示している。

以上のように、静電容量の大きさによって耐アーク性時間が大幅に影響を受ける材料がある。この種の材料が大きな機差となってしまうものと考えられる。こ

第 7 図 静電容量と耐アーク性時間の関係

Fig. 7. Relation between capacitance and arc resistance time.

左図：アークの形状
右図：アーク電圧波形 (5 ms/div, 1,100 V/div)

第 8 図 アーク形状およびアーク電圧波形
に及ぼす静電容量の影響 (試料：
セラミック板)

Fig. 8. Effect of capacitance on arc form
and arc voltage waveform. (Sample: Cera-
mic plate)

の原因を調べるため、静電容量を変化したときのアーク形状とアーク放電電圧の波形を観測した。ここでは実験のつごう上、試料としてセラミック板を用いたが、アーク形状および高周波振動の変化は、第 7 図に示した各試料を用いたときと変わらないことを確認している。第 8 図(a)~(e)に観測結果を示す。静電容量の値が 15 pF 程度では、第 8 図(a)のように安定し

たアーク形状を示し、アーク放電電圧の波形も高周波成分の重量が非常に少ない。40 pF 程度になるとアーク形状が乱れはじめ、60~80 pF になると第 8 図(c), (d)に示されているようにアーク形状が異常な乱れを示し、アーク放電電圧にもかなりの高周波成分が観測される。さらに 100 pF 以上になると、第 8 図(e)のようにアークが試料面に接近して表面をほうようになり、高周波成分も著しく重量してくるようになる。

以上の実験事実をもとにして第 7 図の結果を考察すると、静電容量が 60~80 pF のときに試番(5)および(8)の試料の耐アーク性時間が著しく長くなるのは、アーク形状が乱れることによって試料面への熱の集中度が悪くなり、見かけ上電流値を減らしてアーク熱を小さくしたと同じような現象が起こり、破壊までの時間が長くなったものと考えられる。一方、試番(2), (3), (6)ではアーク熱の集中度が悪くなって、アーク熱が減少しても試料が破壊するに十分なアーク熱になっていると考えれば説明できる。このことはアーク形状が乱れて、アーク熱の集中度が悪くなった場合、耐アーク性時間に敏感に反映される試料と、そうでない試料があることを示している。試番(5)および(8)のような試料ではアークの乱れが機差となってあらわれる。次に、静電容量の値が 100 pF 以上になるとアーク形状の乱れ方が変わり、試料面へのアーク熱の集中度が逆に増加して、耐アーク性時間が短くなると考えれば理解できる。

以上の考察から、アーク放電回路のリード線間およびリード線と対地間の漂滞静電容量の値は、機差を生ずる要因としてきわめて重要であることが明らかになった。⁽¹¹⁾ 耐アーク性試験回路、特にアーク放電回路の配線上の留意点としては、

- (1) 高圧リード線を極力短く配線する。
- (2) リード線間およびリード線とアース間の距離を十分離す。
- (3) 耐電圧 15 kV 以上の高圧電線を用いる。
- (4) 高周波電流の影響を少なくする意味で、高周波抑制抵抗およびコイルをできるだけ電極に接近させる。

などが考えられる。市販の試験装置の静電容量は、15~160 pF の広範囲に及んでいるが、⁽¹³⁾ 機差を最小にする静電容量は約 20 pF 以下が望ましいと考えられる。

〈4.3〉 アークエネルギーの値と耐アーク性時間の関係 耐アーク性試験装置のアークエネルギーの値に関しては、従来未検討のままであった。

筆者らは、試験装置の機差の原因究明の観点から、

第 2 表 アークエネルギーの測定結果

Table 2. Measured and calculated values of arc energy.

電 流 (mA)	ASTM の 表示値 (W)	三電圧計 による値 (W)	三電流計 による値 (W)	電力計に よる値 (W)	計算によ る値 (W)
10	24	10.1	10.8	11.2	12.1
20	34	18.6	19.8	18.7	18.2
30	45	26.5	26.4	24.5	24.9
40	56	31.4	33.0	29.8	30.5

第 3 表 アークエネルギーの計算結果

Table 3. Calculated values of arc energy.

電流 (mA)	I_m (mA)	$u(0)$ (V)	(4) 式 の第一 項	(4) 式の第二項			計算値 (W)	ASTM の 表示 値 (W)
				$m=0$	$m=1$	$m=2$		
10	11.0	1,300	12.9	0.7	0.10	0.009	12.1	24
20	21.2	974	18.6	0.4	0.04	0.004	18.2	34
30	31.0	898	25.2	0.3	0.03	0.003	24.9	45
40	40.8	840	30.8	0.3	0.03	0.003	30.5	56

アークエネルギーの吟味を行なった。アークエネルギーの測定方法については、ASTM 規格でもふれていないため、〈3・5〉節に記した四つの方法で測定を行なった。

各測定法による測定結果と計算結果を第 2 表、第 3 表に示す。比較のために ASTM 規格に表示されている値も記載した。三電圧計法と三電流計法は測定誤差が大きいため参考データにしかならないと考えられるが、計算による方法は電圧波形の長方形波近似をしているが、大きな誤差はないと考えられ、電力計法とともにかなり信頼できる方法と考えている。各測定法の誤差は、それぞれ $\pm 10\%$ 以内にはいっているので、測定結果と ASTM 規格表示値とは有意な差があると考えられる。ASTM 規格表示値が計算によるものか、実測値によるものか不明であるが、その値が試験装置に要求されるアークエネルギーであるとすれば、耐アーク性時間の評価基準が一段ときびしくなり、非常に重大な問題である。そこで、筆者らの使用している試験装置のアークエネルギー 11.2W (10mA のとき) の試験条件と、ASTM 規格相当の 24W の試験条件とで耐アーク性時間を測定し、UL の試験結果とも比較を行なった。その結果を第 9 図に示す。

アークエネルギーが 11.2W と 24W との耐アーク性時間を比較すると、極端に差があることがわかる。UL 所有の試験装置は、ASTM 規格に合致したものを使用しているはずであるが、その報告されたデータからみて、アークエネルギーが 24W になっているとは考え難い。試番(10)の材料はすでに UL 認定試験で

第 9 図 試験条件と耐アーク性時間の関係

Fig. 9. Relation between testing condition and arc resistance time.

180 秒以上に合格したものであるが、ASTM 規格の 10mA で 24W のアークエネルギーの試験条件では認定されないことは明らかであり、アークエネルギー 24W の根拠は不明である。

ASTM 規格の試験条件の規定を考慮に入れたうえで、アークエネルギーの変動因子を考えてみると、まずアーク放電時の電流は一定値に規定されているので電流を変える余地はない。一方、アーク放電電圧は、

- (1) 電極間の距離
- (2) 電極の材質
- (3) 電極の形状
- (4) ふんい気(ガス)の温度
- (5) 湿度
- (6) 気圧(空気密度)

が定めればほぼ一定であり、そのうち(1)～(5)は規定され、(6)も大きな差は生じないと考えられる。そのほかに、漏れ変圧器の内部インピーダンスの差が考えられるが、電流を一定にする規定があるので、仮に内部インピーダンスの異なる変圧器を使用したとしても、結果的には一次側のインピーダンスの調整によって補正されるので問題はない。このように考えると、回路定数によってアークエネルギーを変える余地は見あらず、現在のところ ASTM の見解を待つ以外に解決策がないのが実状である。

5. む す び

耐アーク性試験装置の機差の原因となる数多くの要因のなかから、特に問題になると考えた三つの要因を取り上げて実験を行なった結果を報告した。

実験結果から、機差をなくするために注意すべきこととして次の点を明らかにできた。

(1) 漏れ変圧器の二次電圧が規定どおりであっても、二次電流の調整が不十分であると同一材料の耐アーク性時間が大幅に変動する。したがって、二次電流の調整はアーク放電をさせた状態で慎重に調整することが必要である。

(2) 高周波電流が重畳する原因は、漏れ変圧器の二次側回路の配線間および配線と対地間の漂遊静電容量であり、これを極力小さくすることが必要であり、20 pF 以下が望ましい。

(3) アークエネルギー値が ASTM 規格表示値と一致しない問題はあるが、アークエネルギーは耐アーク性時間に著しい影響を与えるので、厳密に規定するとともに正確に調整することが必要である。

以上の中で、アークエネルギーの問題を除いては、ASTM 規格および電気学会技術報告で指摘されていることであり、当然守らなければならない点である。現実には機差が生じていることは、試験装置の組立後の性能に差が生じているかどうかの検定がなされないまま実用化されているか、さらには、試験前の装置の調整あるいは試験条件が試験者間で微妙に差が生じていることなどが考えられる。

上述した点は、耐アーク性試験装置の機差をなくするために、特に必要な条件であるが、それだけで十分とはいえない。しかし、その他の条件を規格どおりに行なうことはそれほど困難ではない理由から、上記の点を留意することによって現在の機差の問題はほとんど解決できるものと考えている。

最後に種々ご指導いただいた秋田大学 能登文敏教授、茨城大学工学部 荒又光夫名誉教授、大島利彦氏、舩井正義氏、日立製作所 細川正雄氏ならびに本研究成果を活用していただいた合成樹脂工業協会の耐アーク性試験法小委員会委員長 磯野昌雄氏はじめ委員各位に感謝の意を表します。(昭和 47 年 4 月 14 日受付)

文 献

- (1) Underwriters' Laboratories, Inc.: UL Subject 492 (1971-6)
- (2) 電気絶縁材料試験法専門委員会第 3 小委員会: 電気学会技術報告第 7 号 p. 23 (昭和 30-6)
- (3) 電気学会電気規格調査会: JEC-149 (昭 45)
- (4) 日本規格協会: JIS K 6911 (昭 45)
- (5) USA Standard Institute: ASTM D 495-61 (1970)
- (6) 小川・安岡: 日立評論別刷 31, 25 (昭 34-7)
- (7) 電気学会: 電気回路論 p. 46 (昭 39)
- (8) 大島・小野: 茨城大学工学部研究集報 18, 75 (昭 45-12)
- (9) 竹内: 電学誌 85, 138 (昭 40-6)
- (10) 山本, 他: 昭 46 電気学会全国大会 272
- (11) 杉江, 他: 第 34 回絶縁劣化研究懇談会資料 34, No. 8 (昭 46)
- (12) 山本, 他: 昭 47 電気学会全国大会 222
- (13) 合成樹脂工業協会耐アーク性試験小委員会: 高電圧小電流耐アーク性試験法の機差に関する調査結果報告 (昭 46)

付 録

(4) 式の誘導 第 4 図において入力電圧 $e(t)$ は正弦波と考え、

$$e(t) = \sqrt{2} E \sin \omega t \quad \text{..... (付 1)}$$

とすると、電流を求める方程式は

$$L \frac{di_1}{dt} + R i_1 = \sqrt{2} E \sin \omega t \quad \text{..... (付 2)}$$

となり、

$$i_1 = \frac{\sqrt{2} E}{Z} \sin(\omega t - \varphi_1) \quad \text{..... (付 3)}$$

ここで、

$$Z = \sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}, \quad \varphi_1 = \tan^{-1} \frac{\omega L}{R} \quad \text{... (付 4)}$$

次に、アーク放電電圧を長方形波に近似した場合の L, R に流れる電流 i_2 を求める。近似長方形波 $\bar{u}(t)$ をフーリエ級数の一般式で示すと

$$\bar{u}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \sin n \omega t + b_n \cos n \omega t] \quad \text{..... (付 5)}$$

この場合

$$\bar{u}\left(t + \frac{T}{2}\right) = -\bar{u}(t) \quad \text{..... (付 6)}$$

ただし、 $T = 2\pi$

なる関係があるから、(付 6) 式が成立するためには n は奇数でなければならない。したがって、フーリエ係数 a_{2m+1}, b_{2m+1} は

$$\begin{aligned} a_{2m+1} &= \frac{2u(0)}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \sin(2m+1)\omega t \, d\omega t \\ &= \frac{4u(0)}{\pi(2m+1)} \cos(2m+1)\varphi \quad \text{... (付 7)} \\ b_{2m+1} &= \frac{2u(0)}{\pi} \int_{\varphi}^{\pi+\varphi} \cos(2m+1)\omega t \, d\omega t \\ &= -\frac{4u(0)}{\pi(2m+1)} \sin(2m+1)\varphi \\ &\quad \text{..... (付 8)} \end{aligned}$$

$$a_{2m} = b_{2m} = 0 \quad (m=0, 1, 2, \dots)$$

となる。したがって、アーク放電電圧のフーリエ級数表示式(付 5)は

$$\begin{aligned} \bar{u}(t) &= \sum_{m=0}^{\infty} \sqrt{a_{2m+1}^2 + b_{2m+1}^2} \sin\{(2m+1)\omega t \\ &\quad - \varphi_{2m+1}\} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{4u(0)}{\pi(2m+1)} \sin\{(2m+1)\omega t \\ &\quad - \varphi_{2m+1}\} \quad \text{..... (付 9)} \end{aligned}$$

ここで、

$$\varphi_{2m+1} = -\tan^{-1} \frac{b_{2m+1}}{a_{2m+1}} = -\frac{\sin(2m+1)\varphi}{\cos(2m+1)\varphi} \dots\dots\dots (\text{付10})$$

次に、この $\bar{u}(t)$ によって L, R 回路に流れる電流 i_2 を求める方程式は、

$$L \frac{di_2}{dt} + Ri_2 = -\bar{u}(t) = -\sum_{m=0}^{\infty} \frac{4u(0)}{\pi(2m+1)} \times \sin \{(2m+1)\omega t - \varphi_{2m+1}\} \dots\dots\dots (\text{付11})$$

これを解いて

$$i_2 = -\frac{4u(0)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \{(2m+1)\omega t - \varphi_{2m+1} - \varphi_m\}}{(2m+1)\sqrt{R^2 + (2m+1)^2\omega^2 L^2}} \dots\dots\dots (\text{付12})$$

ここで

$$\varphi_m = \tan^{-1} \frac{(2m+1)\omega L}{R} \dots\dots\dots (\text{付13})$$

以上の結果から、重ねの定理を用いて全電流 i を求めると

$$i = i_1 + i_2 = \frac{\sqrt{2}E}{Z} \sin(\omega t - \varphi_1) - \frac{4u(0)}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin \{(2m+1)\omega t - \varphi_{2m+1} - \varphi_m\}}{(2m+1)\sqrt{R^2 + (2m+1)^2\omega^2 L^2}} \dots\dots\dots (\text{付14})$$

となる。

瞬時電力を P とすると

$$P = \bar{u}(t)i \dots\dots\dots (\text{付15})$$

で与えられるから、平均電力 P_a は

$$P_a = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{T} \int_0^T \bar{u}(t)i dt \dots\dots\dots (\text{付16})$$

から求められる。(付16)式に(付9)、(付14)式を代入して積分すると

$$P_a = \frac{2\sqrt{2}Eu(0)}{\pi Z} - \frac{8u^2(0)}{\pi^2} \times \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\cos \varphi_m}{(2m+1)\sqrt{R^2 + (2m+1)^2\omega^2 L^2}} \dots\dots\dots (\text{付7})$$

が得られる。