高ガス圧における空間電荷電導

理化学研究所 土 手 敏 彦

1. は し が き

空間電荷電導の研究は真空電子管における電子の伝導電流が電圧の $3/2$ 乗に比例する、いわゆる $3/2$ 乗法則を導き出した Langmuir の研究⁽¹⁾に始まった。これはいうまでもなく荷電粒子とガス分子との衝突が全く起こらない場合であるが、ガス圧が十分に高く荷電粒子のドリフト速度が移動度により支配される場合には、ある特殊な形状の電極において若干の研究が行なわれた。Cobine 氏⁽²⁾はドリフト速度 v_d が電界 E に比例する場合を扱い、平板において陽極電流 J が電圧 V の 2 乗に比例する結果を導いた。Forman 氏⁽³⁾は v_d が電界の $1/2$ 乗に比例する場合を解いて、 J が V の $3/2$ 乗に比例し平板間距離 d の $5/2$ 乗に逆比例するような結果を得た。小林氏ら⁽⁴⁾⁽⁵⁾は $v_d \propto E$ と $v_d \propto E^{1/2}$ の両者の場合、平板、円筒、球電極間の空間における解を導き、Sherman 氏⁽⁶⁾は小林氏らと同じ条件における空間電荷電導の問題を系統的にとりまとめた。したがって、以上のこれまでの研究の結果は、 v_d の E に対するそれぞれの関係がなりたつ範囲において妥当である。この論文は、電界の範囲を限定することなく、広い範囲にわたってなりたつような空間電荷電導の問題を論じている。殊に上記の $v_d \propto E^{1/2}$ の関係はしばしば電界の大きい範囲においてのみ妥当であるが、上記の現存の理論では解析の際にその妥当な範囲を逸脱して積分が行なわれており、往々にして誤差の大きい結果を生ずる。Frost 氏⁽⁷⁾は電界の広い範囲に妥当な移動度の実験式を導き出した。これは電界が小さいときと大きいときに、ドリフト速度が上記のようにそれぞれ電界の 1 乗と $1/2$ 乗に比例するような形になっている。

この実験式は、稀ガスイオンの場合実験値と非常によく適合するので、この論文における解析は Frost 氏

の移動度の式を基礎としている。そして、その結果と従来の解との関連を論じ、さらにその場合の空間電荷電導に関する興味のあるいくつかの性質を明らかにした。平板電極の場合は精密解と近似解を与え、円筒電極と球電極の場合は近似解のみを与えた。それは後者の電極では解析的な解が得られないために、従来の解との関連性を明らかにするには不便だからである。

単位系は CGS-esu である。

2. 基本方程式

空間電荷電導の問題は Poisson 方程式を解くことから始まる。電流関数を I_n 、荷電粒子の密度とドリフト速度をそれぞれ ρ 、 v_d 、距離を r で表わせば一般的に

$$I_n = \Gamma_n r^n \rho v_d \dots\dots\dots (1)$$

で与えられる。ここに n は電極の形状が平板、円筒、球により異なり、第 1 表のように示される。ドリフト速度 v_d は、移動度を μ とすれば

$$v_d = \mu E \dots\dots\dots (2)$$

で表わされる。Frost 氏の移動度⁽⁷⁾は、零電界移動度を μ_0 とすれば

$$\mu = \mu_0 (1 + aE)^{-1/2} \dots\dots\dots (3)$$

で与えられる。 a はガスの種類とガス圧によって決まる定数である。Poisson 方程式は

$$\{d(r^n E)/dr\}/r^n = \mp 4\pi\rho \dots\dots\dots (4)$$

で表わされる。ここに右辺の符号は、電界が電極から放出される荷電粒子を吸引する作用を持つようにするために付けられたものである。空間電荷電導は (1) ~ (3) 式から ρ 、 v_d を消去して電界に関する方程式

第 1 表 (1) 式の n 、 I_n 、 Γ_n の表示

Table 1. Tabulation of n , I_n and Γ_n in Eq. (1)

形 状	n	Γ_n	I_n
平 板	0	1	単位面積ごとの電流
円 筒	1	2π	単位長さごとの電流
球	2	4π	全 電 流

Space-Charge Limited Conduction in Higher Pressure Gas Diodes. By T. DOTE, Member (The Institute of Physical and Chemical Research).

土手敏彦：正員：理化学研究所

を得、それを解くことにより導かれる。その際、荷電粒子の初速度を零と仮定し、その放出源における電界を零とする境界条件が用いられている。

3. 平板電極における解

平板の場合はいずれが放出源電極であるかを問わないので、(1)~(3)式から

$$dE/dr = -4\pi I_0(1+aE)^{1/2}/\mu_0 E \dots (5)$$

と表わされ、これを解けば

$$(1+aE)^{3/2}/3 - (1+aE)^{1/2} + 2/3 = J_0(1-r/R_s) \dots (6)$$

$$J_0 \equiv 2\pi I_0 a^2 R_s / \mu_0 \dots (7)$$

が得られる。ここに $r=R_s$ にある電極を荷電粒子の放出源とする。(6)式は空間電荷電界の空間分布を与え、これを第1図に実線で示す。(6)式で与えられる電界を r について 0 から R_s まで積分すれば電圧電

第1図 平板の場合の空間電荷電界

Fig. 1. Space charge field for the plane.

第2図 平板の場合の電圧電流特性

Fig. 2. Voltage-current characteristics for the plane.

流特性が得られる。結果を整理すると

$$\zeta \equiv \frac{a}{R_s} V_p = \frac{1}{J_0} \left[(1+\xi)^{1/2} \left\{ \frac{1}{5}(1+\xi)^2 - \frac{2}{3}(1+\xi) + 1 \right\} - \frac{8}{15} \right] \dots (8)$$

$$(1+\xi)^{3/2}/3 - (1+\xi)^{1/2} + 2/3 = J_0 \dots (9)$$

となる。ここに V_p は電極間の電位差である。この結果は第2図の実線で示される。

<3.1> 近似解 いま、移動度が

$$0 \leq E \leq E_0, \quad \mu = \mu_0 \dots (10)$$

$$E_0 \leq E, \quad \mu = \mu_0 / (aE)^{1/2} \dots (11)$$

$$aE_0 = 1 \dots (12)$$

のように与えられる(第3図の点線)と仮定して問題を解けば、電界と電圧電流特性の解はそれぞれ

$$0 \leq E \leq E_0, \quad (aE)^2/4 = J_0(1-r/R_s) \dots (13)$$

$$E_0 \leq E, \quad (aE)^{3/2}/3 = J_0(1-r/R_s) + 1/12 \dots (14)$$

および

$$J_0 \leq 1/4, \quad \zeta = (4/3)J_0^{1/2} \dots (15)$$

$$J_0 \geq 1/4, \quad \zeta = \frac{1}{J_0} \left\{ \frac{3^{5/3}}{5} \left(J_0 + \frac{1}{12} \right)^{5/3} - \frac{1}{30} \right\} \dots (16)$$

となる。第1図と第2図の点線はそれぞれこれらの結果を示したものである。(15)式を書き直せば

$$I_0 = (9\mu_0/32\pi)(V_p^2/R_s^3) \dots (17)$$

となり、Cobine 氏の結果⁽²⁾に帰する。また(16)式において $J_0 \rightarrow \infty$ の極限においては

$$\zeta \rightarrow (3^{5/3}/5)J_0^{2/3}$$

したがって

$$I_0 \rightarrow \left\{ \frac{5}{3} \right\}^{3/2} \frac{\eta_0}{6\pi} \frac{V_p^{3/2}}{R_s^{5/2}} \left\{ \dots (18) \right.$$

$$\eta_0 \equiv \mu_0 / a^{1/2}$$

という Forman 氏の結果⁽³⁾に帰する。すなわち、Cobine, Forman 両氏らの結果はそれぞれ

第3図 移動度の近似曲線(点線)

Fig. 3. Approximated curve of the mobility. (dotted line)

第4図 平板の場合の $aE \leq 1$ の領域図
Fig. 4. Domain of $aE \leq 1$ for the plane.

$J_0 \leq 1/4$, $J_0 \gg 1/4$ という条件の下における近似解であることがわかる。

〈3・2〉 空間電荷電界の性質 前節の結果を用いれば移動度が近似的に電界に比例する, すなわち, (10)式で表わされ得る電極間の空間領域 ($aE \leq 1$) を規定することができる。それは (13) 式から

$$r/R_s \geq 1 - 1/4J_0 \dots\dots\dots (19)$$

で与えられる。これを図示したものが第4図である。したがって, $J_0 \leq 1/4$ では全空間 $aE = 1$ に相当する。また, 第4図から $J_0 \geq 10$ では全空間ほとんど $aE \geq 1$ と考えてよいこともわかる。

〈3・1〉 節で取り扱われた近似的な方法による解は真の解に対してただか 10% の誤差しか示さないことがわかる。またそれは以上の検討から明らかなように, 従来の解との関連性および空間電荷電界と種々の放電条件との関係を明確にするのに有用である。したがって, 以下の円筒電極と球電極の場合はこの近似方法によって得られた解について議論する。

4. 円筒電極における近似解

この場合と次章の球電極の場合は, 荷電粒子の放出源が外側電極 (半径 R_s) かまたは内側電極 (半径 R_p) かのそれぞれについて考察しなければならない。

Poisson 方程式は次式で与えられる。

$$r \frac{dE}{dr} + E = \mp \begin{cases} \frac{2I_1}{\mu_0} \frac{1}{E} & (0 \leq E \leq E_0) \dots (20) \\ \frac{2I_1}{\mu_0} \frac{(aE)^{1/2}}{E} & (E_0 \leq E) \dots (21) \end{cases}$$

右辺の-と+はそれぞれ放出源電極が外側と内側に対応する。

〈4・1〉 外側放出源電極 (20), (21) 式を解けば電界の解として,

$$aE = J_1^{1/2} \{(R_s/r)^2 - 1\}^{1/2} \quad (0 \leq E \leq E_0)$$

第5図 円筒(外側放出源)の場合の空間電荷電界
Fig. 5. Space charge field for the cylinder (outer emission)

$$aE = J_1^{2/3} \{ (1 + 1/J_1)^{1/4} (R_s/r)^{3/2} - 1 \}^{2/3} \dots\dots\dots (22)$$

$$(E_0 \leq E) \dots\dots\dots (23)$$

$$J_1 \equiv 2I_1 a^2 / \mu_0 \dots\dots\dots (24)$$

が得られる。第5図は J_1 をパラメータとした電界の空間分布を示したものである。それから $aE \leq 1$ の範囲においては曲線は J_1 には依存しないことがわかる。(22) 式から $aE \leq 1$ の領域は

$$r/R_s \geq \{J_1/(J_1+1)\}^{1/2} \dots\dots\dots (25)$$

で与えられ, この限界を第6図に示す。この図から明らかなように, $J_1 \geq 10$ では全空間ほぼ $aE \geq 1$ であることがわかる。

電圧電流特性は (22), (23) 式で与えられた電界を $r = R_p$ から R_s まで積分すれば得られる。その結果は次のように与えられる。

第6図 円筒(外側放出源)の場合の $aE \leq 1$ の領域図
Fig. 6. Domain of $aE \leq 1$ for the cylinder (outer emission)

第 7 図 円筒 (外側放起源) の場合の電圧電流特性

Fig. 7. Voltage-current characteristics for the cylinder. (outer emission)

$$J_1 \leq 1/(q^2 - 1):$$

$$\zeta_{Rp} \equiv V_p a / R_p = J_1^{1/2} [q \ln \{q + (q^2 - 1)^{1/2}\} - (q^2 - 1)^{1/2}] \quad (26)$$

$$J_1 \geq 1/(q^2 - 1):$$

$$\zeta_{Rp} = J_1^{1/2} q \left[(1 + J_1)^{1/6} \left\{ \ln \left[\frac{A_1^{1/3}}{1 - (1 - A_1)^{1/3}} \right] \times \frac{1 - (1 - B_1)^{1/3}}{B_1^{1/3}} \right\} - (1 - A_1)^{2/3} \right]$$

第 8 図 円筒 (内側放起源) の場合の空間電荷電界

Fig. 8. Space charge field for the cylinder. (inner emission)

$$-\frac{2}{\sqrt{3}} \left\{ \tan^{-1} \frac{1 + 2(1 - A_1)^{1/3}}{\sqrt{3}} - \tan^{-1} \frac{1 + 2(1 - B_1)^{1/3}}{\sqrt{3}} \right\} + \ln \left\{ \frac{1 + (1 - B_1)^{1/3}}{B_1^{1/3}} \right\} \quad (27)$$

$$A_1 \equiv \{J_1 / (J_1 + 1)\}^{1/4} / q^{3/2}, \quad B_1 \equiv J_1 / (J_1 + 1),$$

$$q \equiv R_p / R_p$$

q をパラメータとした ζ_{Rp} 対 J_1 の図表を第 7 図に示す。図の点線は $J_1 = 1/(q^2 - 1)$ に対応する曲線でその曲線の左側は (26) 式で表わされる。すなわち、全空間 $aE \leq 1$ の領域に相当する。(26) 式は Sherman 氏⁽⁶⁾ の論文の (9) 式に等しい。第 6 図において J_1 が大きい場合は全空間 $aE \geq 1$ と考えてよいことを前に述べた。(27) 式において $J_1 \rightarrow \infty$ の極限值は

$$\zeta_{Rp} \rightarrow J_1^{2/3} \left\{ \frac{2q}{\sqrt{3}} \left(\frac{\pi}{6} \right) - \tan^{-1} \frac{2(q^{3/2} - 1)^{1/3} + q^{1/2}}{\sqrt{3} q^{1/2}} \right\} - q \ln \{q^{1/2} - (q^{3/2} - 1)^{1/3}\} - (q^{3/2} - 1)^{2/3} \quad (28)$$

で表わされ、Sherman 氏⁽⁶⁾ の結果における (16) 式に帰する。

<4.2> 内側放起源電極 (20), (21) 両式を解けばそれぞれ

$$aE = J_1^{1/2} \{1 - (R_p/r)^2\}^{1/2} \quad (0 \leq E \leq E_0) \quad (29)$$

$$aE = J_1^{2/3} [1 - (R_p/r)^{3/2} \{1 - (1/J_1)\}^{1/4}]^{2/3} \quad (E_0 \leq E) \quad (30)$$

第 9 図 円筒 (内側放起源) の場合の $aE \leq 1$ の領域図

Fig. 9. Domain of $aE \leq 1$ for the cylinder. (inner emission)

第 10 図 円筒(内側放出源)の場合の電圧電流特性
Fig. 10. Voltage-current characteristics for the cylinder. (inner emission)

が得られる。第 8 図の実線は $J_1 \{1 - (R_p/r)^2\}$ 対 aE で表わした電界の空間分布である。この図の鎖線は $r \rightarrow \infty$ における限界値である。すなわち、外側電極の半径がきわめて大きい場合には、その表面の電界はある定まった値を持つということに相当する。その値は

$$aE = J_1^{2/3} \quad (31)$$

で与えられる。(29)式から $aE \leq 1$ の領域は

$$r/R_p \leq \{J_1/(J_1 - 1)\}^{1/2} \quad (32)$$

で与えられる。この限界図を第 9 図に示す。この図から明らかのように、 $J_1 \leq 1$ では全空間 $aE \leq 1$ と考えてよい。電圧電流特性は同様に (29), (30) 式の電界を積分して得られ、その結果は

$$J_1 \leq q^2/(q^2 - 1):$$

$$\zeta_{Rp} = J_1^{1/2} \{ (q^2 - 1)^{1/2} - \tan^{-1}(q^2 - 1)^{1/2} \} \quad (33)$$

$$J_1 \geq q^2/(q^2 - 1):$$

$$\begin{aligned} \zeta_{Rp} = J_1^{1/2} & \left[(J_1 - 1)^{1/6} \left\{ \ln \left[\frac{(A_2 - 1)^{1/3} + 1}{A_2^{1/3}} \right] \right. \right. \\ & \times \frac{B_2^{1/3}}{(B_2 - 1)^{1/3} + 1} \left. \left. + (A_2 - 1)^{2/3} \right. \right. \\ & - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\tan^{-1} \frac{2(A_2 - 1)^{1/3} - 1}{\sqrt{3}} \right. \\ & \left. \left. - \tan^{-1} \frac{2(B_2 - 1)^{1/3} - 1}{\sqrt{3}} \right) \right] \end{aligned}$$

第 11 図 球(外側放出源)の場合の空間電荷電界
Fig. 11. Space charge field for the sphere. (outer emission)

$$-\tan^{-1}(B_2 - 1)^{1/2} \Big] \quad (34)$$

$$A_2 \equiv \{J_1/(J_1 - 1)\}^{1/4} q^{3/2} \quad B_2 \equiv J_1/(J_1 - 1)$$

で与えられる。この図表を第 10 図に示す。図の点線は同様に $J_1 = q^2/(q^2 - 1)$ に対応する曲線で、その左側は (33) 式で表わされる。(33) 式は Sherman 氏⁽⁶⁾の結果における (10) 式に対応する。また $J_1 \rightarrow \infty$ の極限値は次式のようなになる

$$\begin{aligned} \zeta_{Rp} \rightarrow J_1^{2/3} & \left\{ (q^{3/2} - 1)^{2/3} + \ln \frac{(q^{3/2} - 1)^{1/3} + 1}{q^{1/2}} \right. \\ & \left. - \frac{2}{\sqrt{3}} \left[\frac{\pi}{6} + \tan^{-1} \frac{2(q^{3/2} - 1)^{1/3} - 1}{\sqrt{3}} \right] \right\} \quad (35) \end{aligned}$$

5. 球電極における近似解

Poisson 方程式は

$$r^2 \frac{dE}{dr} + 2rE = \mp \begin{cases} (I_2/\mu_0) 1/E & (0 \leq E \leq E_0) \\ \dots\dots\dots (36) \end{cases}$$

$$\begin{cases} (I_2/\mu_0) \{(aE)^{1/2}/E\} & (E_0 \leq E) \\ \dots\dots\dots (37) \end{cases}$$

で与えられる。右辺の符号 $-$ と $+$ は前と同様に荷電粒子の放出源電極がそれぞれ外側と内側の場合に対応する。

<5・1> 外側放出源電極 (36), (37) 式を解けば電界はそれぞれ

$$aE = J_2^{1/2} \frac{\{1 - (r/R_s)^3\}^{1/2}}{(r/R_s)^2} \quad (0 \leq E \leq E_0)$$

第 12 図 球 (外側放出源) の場合の $aE \leq 1$ の領域図

Fig. 12. Domain of $aE \leq 1$ for the sphere. (outer emission)

..... (38)

$$aE = \frac{\left[\frac{9}{8} J_{20} \{ (r_0/R_s)^2 - (r/R_s)^2 \} + (r_0/R_s)^3 \right]^{2/3}}{(r/R_s)^2} \quad (E_0 \leq E) \dots (39)$$

$$J_{20} = (r_0/R_s)^4 / \{ 1 - (r_0/R_s)^3 \} \dots (40)$$

$$J_{20} \equiv 2I_2 a^2 / 3\mu_0 R_s \dots (41)$$

で与えられる。この空間分布は第 11 図に示される。この図から明らかなように、電界は全空間ほとんど距離の 2 乗に逆比例し、 $r \approx R_s$ で急に零になることがわかる。 $aE \leq 1$ を満たす空間は

$$J_{20} \leq (r/R_s)^4 / \{ 1 - (r/R_s)^3 \} \dots (42)$$

で与えられ、その限界図を第 12 図に示す。この図の実線は (40) 式の r_0/R_s に相当する。この図から J_{20} がかなり小さい値でないと、全空間が $aE \leq 1$ であることは望めそうもない。

電圧電流特性は (38), (39) 式を積分して得られる。その結果は下記のようなものである。

$$\frac{r_0}{R_s} \leq \frac{1}{q} : \zeta_{R_p} = J_{20}^{1/2} q \int_{1/q}^1 \frac{(1-x^3)^{1/2}}{x^2} dx \dots (43)$$

$$\begin{aligned} \frac{r_0}{R_s} \geq \frac{1}{q} : \zeta_{R_p} = J_{20}^{1/2} q \left\{ \int_{r_0/R_s}^1 \frac{(1-x^3)^{1/2}}{x^2} dx \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{9}{8}} \int_{\sqrt{9/8} J_{20}^{1/2} (r_0/R_s)}^{(C_1 - x^2)^{2/3}} \frac{dx}{x^2} \right\} \dots (44) \end{aligned}$$

ここに、 r_0/R_s は J_{20} の関数として (40) 式で与えら

第 13 図 球 (外側放出源) の場合の電圧電流特性 ζ_{R_p} 対 J_{20}

Fig. 13. Voltage-current characteristics for the sphere (outer emission), ζ_{R_p} versus J_{20} .

れ (第 12 図), また C_1 は

$$C_1 = \left\{ (9/8) J_{20} + r_0/R_s \right\} (r_0/R_s)^2 \dots (45)$$

で表わされる。(43), (44) 式を数値積分し、 ζ_{R_p} を J_{20} の関数としてプロットすれば第 13 図のように電圧電流特性が得られる。同様に点線から左側の領域は全空間 $aE \leq 1$ 領域で電圧電流特性は (43) 式で与えられる。また、 $J_{20} \rightarrow \infty$ では $r_0/R_s \rightarrow 1$ であるから (44) 式は

$$\zeta_{R_p} \rightarrow \sqrt{\frac{9}{8}} J_{20}^{1/2} q \int_{\sqrt{9/8} J_{20}^{1/2} q}^{\sqrt{9/8} J_{20}^{1/2}} \frac{(C_1 - x^2)^{2/3}}{x^2} dx$$

$$C_1 = (9/8) J_{20} + 1 \rightarrow (9/8) J_{20}$$

となり、これに $x = \sqrt{9/8} J_{20}^{1/2} t$ と置換すれば

$$\zeta_{R_p} = \left(\frac{9}{8} J_{20} \right)^{2/3} q \int_{1/q}^1 \frac{(1-t^2)^{2/3}}{t^2} dt \dots (46)$$

となって Sherman 氏⁽⁶⁾の結果に帰する。なお、いまの場合 J_{20} は (41) 式で定義される。プラズマ中に浸された球電極周囲の正イオンさや内における正イオンの空間電荷電導を考えると R_s はイオンさやの半径に相当し、これは電極の電圧により変化する。したがって、 ζ_{R_p} 対 J_{20} の特性はこの場合の電圧電流特性を論ずる場合は不適当である。しかし

$$J_{2i} = 2I_2 a^2 / 3\mu_0 R_p = J_{20} (R_s/R_p) = J_{20} q \dots (47)$$

であるから、この場合は ζ_{R_p} 対 J_{2i} の特性をプロットすればよい。第 14 図はそれを示したものである。

第 14 図 球(外側放出源)の場合の電圧電流特性 ζ_{R_p} 対 J_{2i}

Fig. 14. Voltage-current characteristics for the sphere (outer emission), ζ_{R_p} versus J_{2i} .

第 15 図 球(内側放出源)の場合の $aE \leq 1$ の領域図

Fig. 15. Domain of $aE \leq 1$ for the sphere. (inner emission)

<5・2> 内側放出源電極 (36), (37)式を解けば電界の解として

$$aE = J_{2i}^{1/2} \{ (r/R_p)^3 - 1 \}^{1/2} / (r/R_p)^2 \quad (0 \leq E \leq E_0) \dots (48)$$

$$aE = \frac{\left[\frac{9}{8} J_{2i} \left\{ \left(\frac{r}{R_p} \right)^2 - \left(\frac{r_0}{R_p} \right)^2 \right\} + \left(\frac{r_0}{R_p} \right)^3 \right]^{2/3}}{(r/R_p)^2} \quad (E_0 \leq E) \dots (49)$$

$$J_{2i} = (r_0/R_p)^4 / \{ (r_0/R_p)^3 - 1 \} \dots \dots \dots (50)$$

が得られる。 r_0/R_p は $aE \leq 1$ の限界点でこれを J_{2i} の関数としてプロットしたものが第 15 図である。ここで非常に興味のあることは、同一の J_{2i} の値に対し

第 16 図 球(内側放出源)の場合の空間電荷電界
Fig. 16. Space charge field for the sphere. (inner emission)

て r_0/R_p の値が二つあること $\{ (r_0/R_p)_1 \text{ と } (r_0/R_p)_2 \}$ である。これは $r=R_p$ から増加するときに電界は $aE < 1$ から出発し、ある r の値で $aE=1$ に達し、それから $aE > 1$ の領域に入るが、さらに r を増加させると電界は最大値を経てから減少し、ある r の値で再び $aE \leq 1$ の領域に入ることの意味する。しかし、ここで注意を要することは、 r の小さい範囲における $aE=1$ を満たす r/R_p の値は第 15 図の示す r_0/R_p 中の $(r_0/R_p)_{\min}$ より小さいほうの値 $(r_0/R_p)_1$ に相当するが、 r の大きい範囲において再び $aE \leq 1$ の領域に入る r/R_p の値は決して第 15 図の r_0/R_p の大きいほうの値 $\{ (r_0/R_p)_2 \geq (r_0/R_p)_{\min} \}$ ではないことである。それは $r/R_p \geq (r_0/R_p)_1$ では電界はすでに (49)式に従っているからである。したがって、 r の大きい範囲で再び $aE \leq 1$ の領域に入る r/R_p は (49)式の aE を 1 に等しく置くことにより得ることができる。これを求めると

$$\left(\frac{r_0}{R_p} \right)_3 = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{9}{8} J_{2i} - \left(\frac{r_0}{R_p} \right)_1 \right] + \sqrt{\left[\frac{9}{8} J_{2i} - \left(\frac{r_0}{R_p} \right)_1 \right] \left[\frac{9}{8} J_{2i} + 3 \left(\frac{r_0}{R_p} \right)_1 \right]} \right\} \dots \dots \dots (51)$$

となる。第 15 図の右側の実線は $(r_0/R_p)_3$ に相当する。したがって、 $r/R_p \geq (r_0/R_p)_3$ の範囲における aE の表式が (48) 式により与えられないことはいうまでもない。それは電界の微分方程式(36)を解くときの境界条件が異なるからである。結果は

$$aE = \frac{[J_{2i}(r/R_p)^3 - (r_0/R_p)_3^3 \{J_{2i} - (r_0/R_p)_3\}]^{1/2}}{(r/R_p)^2} \quad (0 \leq E \leq E_0) \dots (52)$$

で与えられる。第 16 図は (48), (49), (52)式をプロットした電界の空間分布である。すべての J_{2i} の値において r/R_p がほぼ 2 の値の点で電界は最大値を持

つことがわかる。 J_{2i} が大きいほど最大点の r/R_p はや増加する。第 15 図の実線は空間における $aE \leq 1$ の限界図表とも見なせるので、 $J_{2i} \leq 4^{4/3}/3$ では全空間 $aE \leq 1$ であることがわかる。このように空間電荷電界に最大値が存在するのは内側放出源球電極に限る。

電圧電流特性は r のそれぞれの範囲に応じて (48), (49), (52) 式を積分することにより求められる。結果をまとめると次式のようになる。

$$J_{2i} \leq 4^{4/3}/3 (=2.116):$$

$$\zeta_{R_p} = J_{2i}^{1/2} \int_1^q (x^3 - 1)^{1/2} dx / x^2 \quad \dots\dots\dots (53)$$

$$J_{2i} \geq 4^{4/3}/3:$$

$$q \leq (r_0/R_p)_1 \quad \zeta_{R_p} = J_{2i}^{1/2} \int_1^q (x^3 - 1)^{1/2} dx / x^2 \quad \dots\dots\dots (54)$$

$$(r_0/R_p)_1 \leq q \leq (r_0/R_p)_3$$

$$\begin{aligned} \zeta_{R_p} = J_{2i}^{1/2} & \left\{ \int_1^{(r_0/R_p)_1} \frac{(x^3 - 1)^{1/2}}{x^2} dx \right. \\ & \left. + \sqrt{\frac{9}{8}} \frac{(\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} q - (r_0/R_p)_1)}{(\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} (r_0/R_p)_1)} \frac{(x^2 - C_2)^{2/3}}{x^2} dx \right\} \quad \dots\dots\dots (55) \end{aligned}$$

$$C_2 \equiv \left\{ (9/8) J_{2i} - (r_0/R_p)_1 \right\} (r_0/R_p)_1^2 \quad \dots (56)$$

$$(r_0/R_p)_3 \leq q:$$

$$\begin{aligned} \zeta_{R_p} = J_{2i}^{1/2} & \left\{ \int_1^{(r_0/R_p)_3} \frac{(x^3 - 1)^{1/2}}{x^2} dx \right. \\ & + \sqrt{\frac{9}{8}} \int_{\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} (r_0/R_p)_3}^{\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} (r_0/R_p)_1} \frac{(x^2 - C_2)^{2/3}}{x^2} dx \\ & \left. + \int_{(r_0/R_p)_3}^q \frac{(x^3 + C_3)^{1/2}}{x^2} dx \right\} \quad \dots\dots\dots (57) \end{aligned}$$

第 17 図 球 (内側放出源) の場合の電圧電流特性
Fig. 17. Voltage-current characteristics for the sphere. (inner emission)

$$C_3 \equiv \left\{ \frac{1}{J_{2i}} \left(\frac{r_0}{R_p} \right)_3 - 1 \right\} \left(\frac{r_0}{R_p} \right)_3^3 \quad \dots\dots\dots (58)$$

ζ_{R_p} の特性は

第 17 図に示される。点線 AOB の左側の範囲は $aE \leq 1$ の領域で (53), (54) 式から計算され、 AOC の右側の範囲は $aE \leq 1$ と $aE \geq 1$ が共存する領域で (54) 式から計算される。また、 BOC の範囲は電界に最大値が存在する領域で (57) 式から計算されたものである。(53), (54) 式は Sherman 氏⁽⁶⁾の低い電界の場合の式に相当する。また、 $J_{2i} \rightarrow \infty$ では ζ_{R_p} は (56) 式から計算され、 $(r_0/R_p)_1 \rightarrow 1$ であるから

$$\zeta_{R_p} \rightarrow J_{2i}^{1/2} \sqrt{\frac{9}{8}} \int_{\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2}}^{\sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} q} \frac{(x^2 - C_2)^{2/3}}{x^2} dx$$

$$C_2 = (9/8) J_{2i} - 1 \rightarrow (9/8) J_{2i}$$

となり、 $x = \sqrt{9/8} J_{2i}^{1/2} t$ とおけば

$$\zeta_{R_p} = \left(\frac{9}{8} J_{2i} \right)^{2/3} \int_1^q \frac{(t^2 - 1)^{2/3}}{t^2} dt \quad \dots\dots\dots (59)$$

となり Sherman 氏⁽⁶⁾の高電界の場合の式に帰する。

6. 終わりに

以上、荷電粒子のドリフト速度が移動度で支配されるような高ガス圧空間における空間電荷電導に関して、Frost 氏の移動度の実験式およびその近似式を用いて平板、円筒、球それぞれの電極の解析を行なった。そして電界の空間分布、電圧電流特性を計算し、それらのガスの種類、ガス圧 (μ_0 , a は普通ガス圧 p に逆比例する)、電極寸法などの放電条件に関する多くの興味のある性質を明らかにすることができた。また、各方面で引用されている従来の解との関連が明らかとなった。本研究結果は最近とみに放電応用機器に利用されるようになった高ガス圧放電プラズマの諸性質の研究、特に電流電圧特性の解析および、たとえばグロー放電の陰極降下、プローブシースの電導、陽光柱の管径方向のイオンの流れなどの放電の諸問題に貢献するものと思われる。これらの応用に関しては別の機会に報告する予定である。

終わりに、本研究の遂行にあたり貴重なご議論をいただいた当所主任研究員 小島昌治氏、具体的な計算の補助をいただいた東京理科大実習生 塚本庸夫君に感謝いたします。(昭和 48 年 6 月 1 日受付)

文 献

- (1) I. Langmuir: Phys. Rev. **2**, 450 (1913)
- (2) J. D. Cobine: Gaseous Conductors p. 129 (Dover Publications, Inc. New York, 1958)
- (3) R. Forman: Phys. Rev. **123**, 1537 (1961)
- (4) 小林・渡辺: 電学誌 **74**, 278 (昭 29-3)
- (5) 渡辺・小林: 電学誌 **74**, 388 (昭 29-4)
- (6) C. Sherman: J. Appl. Phys. **37**, 4902 (1966)
- (7) L. S. Frost: Phys. Rev. **105**, 354 (1957)