流体モデルによる磁化プラズマ中の波動のシミュレーション

名古屋大学 萩 野 竜 樹
名古屋大学 武 田 進

1. ま え が き

プラズマのシミュレーションに用いられるモデルは大きく分けて粒子モデルと流体モデルがある⁽¹⁾⁽²⁾。これらの間の大きな違いは、前者が粒子の運動を常微分方程式である Newton の運動方程式で記述するのに対して、後者は偏微分方程式である流体の輸送方程式で記述する点である。粒子モデルには、電子とイオンの電荷がそれぞれのシートに集中しているとした Buneman 氏⁽³⁾のモデル以来、イオンが均一に分布しているとした Dawson モデル⁽⁴⁾に発展し、更に Birdsall 氏らによって数値的な雑音を小さくするために有限の大きさを持つ荷電粒子を扱った CIC (Clouds-in-cells) モデル⁽⁵⁾に拡張された。

流体の輸送方程式を差分で解く場合、系を数値的に安定化させるために、Euler 座標系から流体の流れに乗った Lagrange 座標系に変換して計算すること⁽¹⁾⁽²⁾が多い。衝突項と温度を零に仮定してこの変換を行えば、流体の輸送方程式は Newton の運動方程式に一致する。この点に注目して、元来、流体モデルとして出発した⁽⁶⁾PIC (Particle-in-cells) モデルは一つの Cell 内に異なった速度を持つ多くの粒子の塊があると考えることにより粒子モデルに拡張された⁽¹⁾⁽⁷⁾。この PIC と CIC モデルは全く異なった考え方で発展したにもかかわらず計算の方法は一致しているので⁽¹⁾、最近ではこの二者は区別されず、ともに粒子モデルとしてシミュレーションに多く用いられ⁽⁸⁾⁻⁽¹⁰⁾、非線形現象および加熱機構の解明に一翼を担っている。磁界の無いプラズマに対しては、PIC および CIC モデルで波数

スペクトルの問題⁽¹¹⁾を除けば十分なモデルが作られている。

磁界を含めた一次元モデルは、長谷川氏ら⁽¹²⁾によって Dawson モデルを拡張して作られ、電子およびイオンサイクロトロン波などに対してのシミュレーションが行われてきたが⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾、そのモデルは波の位相速度が光速に近いか、それより速い波に対しては適用できなかった⁽¹²⁾。従って、高域混成波が小さい波数にて共鳴周波数から離れる効果⁽¹⁵⁾は現われなかった。

一方、流体モデルは磁界を含んでいるが、 θ ピンチなど⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾個々の境界条件に規定したモデルがほとんどで、Maxwell 方程式を厳密に解いている例はまだ見かけない。粒子モデルより流体モデルが計算機の記憶容量と計算時間の点で有利だから、一般的な流体モデルでプラズマの現象をどこまで表現できるかを明らかにすることは興味ある問題である。流体モデルは一般に Lagrange 座標系で計算したほうが数値的安定性は良いが、電磁界は Euler 座標系で計算するほうが簡単であることを考慮すると、密度と電流は一度 Euler 座標系への変換が必要で、計算時間短縮の点で不利である。更に大振幅波動現象では、Euler 座標系に変換したとき、解が2個になって物理的に意味のない場合⁽¹⁸⁾も起こり得る。従って、Euler 座標系で数値的に安定なモデルを作ることも重要である。

本論文では、静磁界がある場合に電子と一価イオンからなる均質なプラズマ中の電磁界を自己無盾なく閉じた形に含んでいて、衝突が支配的な場合に適用される従来の流体モデルと異なって、無衝突プラズマに対しても数値的不安定を起ささないでシミュレーションできるような一つの流体モデルを提案する。二成分プラズマのシミュレーションでは、計算時間短縮のために通常イオンと電子の質量比 $\gamma \equiv m_i/m_e$ を小さくする。そのとき分散関係を決定する他の独立なパラメー

Computer Simulation by a Fluid Model for the Waves in Magneto-Plasmas. By T. OGINO, Associate & S. TAKEDA, Member (Department of Electrical Engineering, Nagoya University).
萩野竜樹：准員、名古屋大学大学院電気工学専攻
武田 進：正員、名古屋大学工学部電気工学科

タとして光速と電子の熱速度の比 c/v_{Te} および静磁界の強さ B_0 (または電子サイクロトロン周波数 ω_{ce}) があるが、それも後述のようにスケールリングして扱えば、線形の分散関係の特性をほとんど変化させずにモデルを作ることができる。このモデルは光速より位相速度の速い波についても適用できて、有限 β 値効果を含む。

計算の結果、小振幅波動の分散関係に対しては、理論値^{(19)~(21)}と良い一致が得られた。またクーロン衝突項を零にしても系の数値的安定性は良く、保存則も十分に保証されている。以下、第2章は出発点となる基礎方程式を述べ、第3章はモデルの概要を、第4章は第3章で述べた流体モデルを用いてシミュレーションを行ない、小振幅波動に対する分散関係と大振幅波動に対する周波数および波数スペクトル求めて理論との比較を行ない、第5章で結果について討論する。

2. 基礎方程式

温度は等方的と仮定し、MKS 単位系を用いて各荷電粒子の連続の式、運動量およびエネルギー輸送の式と Maxwell 方程式は次式のように書ける。

$$\frac{\partial n_\mu}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu = 0 \quad \dots\dots\dots (1a)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{V}_\mu n_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}_\mu \mathbf{V}_\mu + \mathbf{I} v_{T\mu}^2) n_\mu \\ - \frac{e_\mu}{m_\mu} (\mathbf{E} + \mathbf{V}_\mu \times \mathbf{B}) n_\mu \\ = -\nu_{\mu\nu} (\mathbf{V}_\mu n_\mu - \mathbf{V}_\nu n_\nu) \quad \dots\dots\dots (1b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{V}_\mu^2 + 3v_{T\mu}^2) n_\mu + \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \cdot (\mathbf{V}_\mu^2 \\ + 5v_{T\mu}^2) \mathbf{V}_\mu n_\mu - \frac{2e_\mu}{m_\mu} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu \\ = -\nu_{e\mu} (3v_{Te}^2 n_e - 3\gamma v_{Ti}^2 n_i) \quad \dots\dots\dots (1c) \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0 \quad \dots\dots\dots (1d)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B}/\partial t \quad \dots\dots\dots (1e)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (1f)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \{ \mathbf{J} + \epsilon_0 (\partial \mathbf{E}/\partial t) \} \quad \dots\dots\dots (1g)$$

ここに、 $\rho = e(n_i - n_e)$ 、 $\mathbf{J} = e(\mathbf{V}_i n_i - \mathbf{V}_e n_e)$ で、添字 μ と ν は e または i でそれぞれ電子とイオンを表わし、 $e_i = e$ 、 $e_e = -e$ で e は単位電荷を示す。 n_μ 、 $\mathbf{V}_\mu$ および $v_{T\mu}$ は流体の密度、速度および熱速度を、 $\mathbf{E}$ と $\mathbf{B}$ は電界と磁界を示す。また $\mathbf{V}_\mu \mathbf{V}_\mu$ はテンソルで、 $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。 ν_{ei} はクーロン衝突周波数^{(22) (23)}であり、 $\nu_{ie} = \gamma^{-1} \nu_{ei}$ 、 $\nu_{eq} = \nu_{eq} = 2\gamma^{-1} \nu_{ei}$ および $\nu_{eq}^i = -\gamma^{-1} \nu_{eq}^e$ の関係式が成り立つ。

3. 流体モデル

すべての変数は x 方向のみに変化するような一次元を考え、静磁界は $\mathbf{B}_0 = (B_{x0}, 0, B_{z0})$ のように xz 平面内にとり、 x 軸となす角度を θ とする。このとき (1e)、(1f) 式より $\partial B_x/\partial t = \partial B_x/\partial x = 0$ となり $B_x = B_{x0} = \text{一定}$ になる。

以下、すべての変数を規格化して無次元にする。すなわち、密度は平均密度 n_0 で、速度は初期の電子の熱速度 $\langle v_{Te0} \rangle$ で、距離はデバイ長 k_{De}^{-1} で、時間は電子プラズマ周波数の逆数 ω_{pe}^{-1} で、電界は $E_S \equiv n_0 e/\epsilon_0 k_{De} = \sqrt{m_e \langle v_{Te0} \rangle^2 n_0/\epsilon_0}$ で、磁界は $B_S \equiv E_S/c$ で規格化する。ここで、ブラケット $\langle \rangle$ は空間平均を示す。ボルツマン定数を k_B 、初期の平均電子温度を $\langle T_{e0} \rangle$ としたとき、 $\langle v_{Te0} \rangle \equiv \sqrt{k_B \langle T_{e0} \rangle / m_e}$ 、 $\omega_{pe} \equiv \sqrt{n_0 e^2 / \epsilon_0 m_e}$ 、 $k_{De} \equiv \omega_{pe} / \langle v_{Te0} \rangle$ および $\omega_{ce} \equiv e B_0 / m_e$ である。このとき周波数は ω_{pe} で、波数は k_{De} で規格化されたことになる。規格化された変数は $\sim$ の記号を付けて表わすと次式のとおりになる。

$$\left. \begin{aligned} \tilde{n}_\mu &= n_\mu / n_0, \quad \tilde{\mathbf{V}}_\mu = \mathbf{V}_\mu / \langle v_{Te0} \rangle \\ * \quad \tilde{v}_{T\mu} &= v_{T\mu} / \langle v_{Te0} \rangle, \quad \tilde{x} = k_{De} x \\ \tilde{t} &= \omega_{pe} t, \quad \tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} / E_S, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} / B_S \\ \tilde{\omega}_{p\mu} &= \omega_{p\mu} / \omega_{pe}, \quad \tilde{\omega}_{ce\mu} = \omega_{ce\mu} / \omega_{pe} \\ \tilde{\nu}_{\mu\nu} &= \nu_{\mu\nu} / \omega_{pe}, \quad \tilde{c} = c / \langle v_{Te0} \rangle \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

従って、時間、距離、速度は $\tilde{\omega}_{pe}^{-1} = \tilde{k}_{De}^{-1} = \langle \tilde{v}_{Te0} \rangle = 1$ を単位に取ったことになり、 $\tilde{B}_0 = \tilde{c} \tilde{\omega}_{ce}$ の関係式が成り立つ。このときプラズマ中の波動の分散関係は γ 、 $\tilde{c}$ 、 $\langle \tilde{v}_{Ti0} \rangle$ 、 $\tilde{\omega}_{ce}$ 、 θ の五つのパラメータで決定される⁽²¹⁾。

次に、人工的イオンの質量 $\hat{m}_i$ を導入し、 $\hat{\gamma} \equiv \hat{m}_i / m_e$ を用いる。記号へはシミュレーションで扱う変数に付ける。このとき、波動の分散関係の特性を変化させないように他のパラメータもスケールリングする。

$\langle T_{i0} \rangle$ と $\hat{\gamma}$ が決まれば $\langle \tilde{v}_{Ti0} \rangle$ は決まり、角度 θ はスケールリングに無関係だから、 $\tilde{c}$ と $\tilde{\omega}_{ce}$ を $\log \hat{\gamma} \tilde{\omega}_{ce} \equiv \log \gamma \tilde{\omega}_{ce}$ 、 $\log \hat{\gamma} \tilde{c} \equiv \log \gamma \tilde{c}$ より決めれば分散関係の特性を保存したまま時間と空間の次元を縮小できる。結局、シミュレーションに用いる変数は $\sigma \equiv \log_{10} \hat{\gamma} / \log_{10} \gamma$ とすれば次式になる。

$$\tilde{c} = (\tilde{c})^\sigma, \quad \tilde{\omega}_{ce} = (\tilde{\omega}_{ce})^\sigma, \quad \tilde{\nu}_{ei} = (\tilde{\nu}_{ei})^\sigma \quad \dots\dots\dots (3)$$

残りの変数は質量比が $\hat{\gamma}$ で、更に $\tilde{B}_0 = \tilde{c} \tilde{\omega}_{ce}$ の関係式があることを考慮していれば、(2) 式の定義で記号 $\sim$ を $\hat{\sim}$ に置き換えてそのまま使用できる。

シミュレーションで用いる変数は $\hat{\sim}$ を記したが、改めて $\hat{\sim}$ を除し、(1) 式を次のように書き直す。

$$\frac{\partial n_\mu}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial x} V_{\mu x} n_\mu \dots\dots\dots (4a, b)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_{\mu x} n_\mu &= -\frac{\partial}{\partial x} (V_{\mu x}^2 + v_{T\mu}^2) n_\mu \\ &+ \gamma_\mu^{-1} \left(E_x + \frac{V_{\mu y}}{c} B_z - \frac{V_{\mu z}}{c} B_y \right) n_\mu \\ &- \gamma_\mu^{-1} v_{ei} J_x \dots\dots\dots (4c, d) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_{\mu y} n_\mu &= -\frac{\partial}{\partial x} V_{\mu y} V_{\mu x} n_\mu \\ &+ \gamma_\mu^{-1} \left(E_y + \frac{V_{\mu z}}{c} B_x - \frac{V_{\mu x}}{c} B_z \right) n_\mu \\ &- \gamma_\mu^{-1} v_{ei} J_y \dots\dots\dots (4e, f) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} V_{\mu z} n_\mu &= -\frac{\partial}{\partial x} V_{\mu z} V_{\mu x} n_\mu \\ &+ \gamma_\mu^{-1} \left(E_z + \frac{V_{\mu x}}{c} B_y - \frac{V_{\mu y}}{c} B_x \right) n_\mu \\ &- \gamma_\mu^{-1} v_{ei} J_z \dots\dots\dots (4g, h) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (V_\mu^2 + 3v_{T\mu}^2) n_\mu &= -\frac{\partial}{\partial x} (V_\mu^2 \\ &+ 5v_{T\mu}^2) V_{\mu x} n_\mu + 2\gamma_\mu^{-1} \mathbf{E} \cdot \mathbf{V}_\mu n_\mu \\ &+ \gamma_\mu^{-1} v_{eq} (3v_{Te}^2 n_e - 3\gamma v_{Ti}^2 n_i) \dots (4i, j) \\ \partial E_x / \partial t &= -J_x \dots\dots\dots (4k) \\ \partial E_y / \partial t &= -J_y - c(\partial B_z / \partial x) \dots\dots\dots (4l) \\ \partial E_z / \partial t &= -J_z + c(\partial B_y / \partial x) \dots\dots\dots (4m) \\ \partial B_y / \partial t &= c(\partial E_z / \partial x) \dots\dots\dots (4n) \\ \partial B_z / \partial t &= -c(\partial E_y / \partial x) \dots\dots\dots (4o) \end{aligned}$$

ここに、 $\gamma_i = \gamma_e = -1$ および $\mathbf{J} = \mathbf{V}_i n_i - \mathbf{V}_e n_e$ となる。以上の 15 個の非線形偏微分方程式を差分方程式に直して変形 2step Lax-Wendroff 法⁽¹⁾⁽²⁴⁾で解く。ただし、 E_x の初期値はポアソン式から決定する。基本の変数を $(n_\mu, \mathbf{V}_\mu, v_{T\mu}, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ から $\Phi \equiv (\delta n_\mu, \mathbf{M}_\mu, W_\mu, \mathbf{E}, \mathbf{B})$ に移して Φ を変数とする。ここで

$$\delta n_\mu \equiv n_\mu - 1 \dots\dots\dots (5a)$$

$$\mathbf{M}_\mu \equiv \mathbf{V}_\mu n_\mu \dots\dots\dots (5b)$$

$$W_\mu \equiv (V_\mu^2 + 3v_{T\mu}^2) n_\mu \dots\dots\dots (5c)$$

である。(4a)~(4o)式の方程式は次式の形

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{F}(\Phi) + \mathbf{G}(\Phi) \dots\dots\dots (6)$$

にまとめられるので、差分の時間および空間の幅をそれぞれ Δt と Δx として

$$\begin{aligned} \Phi(t + \Delta t/2, x + \Delta x/2) &= \Phi(t, x + \Delta x/2 \\ &+ (\Delta t/2 \Delta x) \{ \mathbf{F}(t, x + \Delta x) - \mathbf{F}(t, x) \} \\ &+ (\Delta t/2) \mathbf{G}(t, x + \Delta x/2) \dots\dots\dots (7a) \end{aligned}$$

$$\Phi(t + \Delta t, x) = \Phi(t, x) + \frac{\Delta t}{\Delta x} \left\{ \mathbf{F} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, x \right. \right.$$

$$\begin{aligned} &+ \frac{\Delta x}{2} \Big) - \mathbf{F} \left(t + \frac{\Delta t}{2}, x - \frac{\Delta x}{2} \right) \Big\} \\ &+ \Delta t \mathbf{G}(t + \Delta t/2, x) \dots\dots\dots (7b) \end{aligned}$$

なる 2step の中心差分を用いる。 $c\Delta t/\Delta x < 1$ とすれば線形の範囲ではこの系は数値的に安定である⁽¹⁾⁽²⁴⁾。また以下に行なった実際の計算でも安定であった。境界条件には周期的境界条件を与える。このときは(4)式の方程式系は電子とイオンの間で交換される運動量またはエネルギーを表わす項を除いては保存形に最も近い形に表現されているので、全空間で粒子数、運動量およびエネルギー保存は精度良く満足されている。

プラズマには常に熱揺動があり、あるモードが不安定になる場合も、その起源に熱揺動が必要であることが多いので、次の方法でそれを取り入れる。プラズマに集団運動が励起されていないときの熱揺動は系の自由度を f_0 としたとき

$$\frac{1}{2} \varepsilon_0 \langle \mathbf{E}^2 \rangle \Big/ \frac{1}{2} n_0 k_B \langle T_e \rangle = \langle \hat{\mathbf{E}}^2 \rangle \doteq 1/\sqrt{f_0}$$

と与えられる⁽²⁵⁾。したがって、中心値が零で分散が $1/\sqrt{f_0} \doteq 1/\sqrt{n_0}$ の正規乱数を発生させて、時間空間の各点で(4i, j)式に加えることにより最低の熱揺動を導入する。

4. 計算の方法と結果

<4・1> 小振幅波動の分散関係 第3章で述べたモデルを用いて、磁化プラズマ中の波動の伝搬を調べた。プラズマ長を L 、空間の分割数を N 、時間と空間の差分の幅をそれぞれ Δt と $\Delta x = L/N$ とする。計算のパラメータは $N=128$, $\Delta x = 2\pi/2^m$ (m は整数), $\Delta t = \Delta x/16$ を用いた。

初期条件は次の方法で与える。温度は一様と仮定して、(4a)~(4h)式および(4k)~(4o)式を用いる。変数を $\mathbf{X} = (n_e, n_i, V_{ex}, V_{ix}, V_{ey}, V_{iy}, V_{ez}, V_{iz}, E_x, E_y, E_z, B_y, B_z)$ と置き、 $\mathbf{X}$ を平均値 $\mathbf{X}_0$ とそれからの摂動分 $\delta \mathbf{X}$ に分離して線形化し、 $\delta \mathbf{X}$ を $|\delta \mathbf{X}| e^{-i\omega t + ikx}$ なる平面波に分解すると

$$\mathbf{A} \delta \mathbf{X} = \omega \delta \mathbf{X} \dots\dots\dots (8)$$

なる永年方程式が求まる。(8)式を解くことにより l 番目の固有値 ω^l と ω^l に属する最大値を1に規格化した固有ベクトル $\delta \mathbf{X}(k, \omega^l)$ が求まる⁽²¹⁾。実空間の $\delta \mathbf{X}(x, t)$ はこの $\delta \mathbf{X}(k, \omega^l)$ と定数 $a(k, \omega^l)$ を用いてフーリエ逆変換することにより

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{X}(x, t) &= \text{Re} \left\{ \sum_{\omega^l} \sum_k a(k, \omega^l) \delta \mathbf{X}(k, \omega^l) \right. \\ &\times e^{i\omega^l t - ikx} \Big\} \dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

と書ける。初期値には k と ω^l に属する単色平面波

$$\delta \mathbf{X}(x, 0) = \text{Re} \{a \delta \mathbf{X}(k, \omega^i)\} \cos kx \\ + \text{Im} \{a \delta \mathbf{X}(k, \omega^i)\} \sin kx \quad \dots\dots\dots (10)$$

を与える。ここで Re と Im はそれぞれの変数の実部と虚部を示す。また $a(k, \omega^i)$ は波の振幅を示し、以下、正の定数として扱い単に a と書く。(10)式の $\delta \mathbf{X}(x, 0)$ から $\Phi(x, 0)$ を計算して後者を初期値として用いた。この手法を用いたために、それぞれの波を他の波からほとんど分離できて伝搬特性が明瞭になった。

初期値 $\Phi(x, 0)$ から繰り返し計算して時間的发展の様子を調べる。まず、次式でフーリエ係数 $A^j(k, t)$, $B^j(k, t)$ と位相角 $\theta^j(k, t)$ を求める。

$$A^j(k, t) = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \delta X^j(x_I, t) \cos kx_I \quad \dots\dots\dots (11a)$$

$$B^j(k, t) = \frac{1}{N} \sum_{I=1}^N \delta X^j(x_I, t) \sin kx_I \quad \dots\dots\dots (11b)$$

$$\theta^j(k, t) = \tan^{-1} \{B^j(k, t)/A^j(k, t)\} \quad \dots\dots\dots (11c)$$

ここで、 x の右下の添字はメッシュの番号で、変数の右上の添字はベクトルの成分を示す。

モード番号 I 番目の波の波数 k_I は $2\pi I/L$ 、波長 λ_I は $2\pi/k_I$ であるから、時刻 t と $t+\Delta t$ における位相角の差 $\Delta\theta^j = \theta^j(k_I, t+\Delta t) - \theta^j(k_I, t)$ を計算することにより ω_I を求める。ただし、 $|\Delta\theta^j| < 2\pi$ である。第1図に示すように時刻 t と $t+\Delta t$ の間に波の進んだ距離を $\Delta\lambda$ 、波の位相速度を V_{ph} とすると

$$\Delta\lambda = \lambda_I \Delta\theta^j / 2\pi \quad \dots\dots\dots (12a)$$

$$V_{ph} = \Delta\lambda / \Delta t = \Delta\theta^j / k_I \Delta t \quad \dots\dots\dots (12b)$$

$$\omega_I = V_{ph} k_I = \Delta\theta^j / \Delta t \quad \dots\dots\dots (12c)$$

となり、波数 k_I に対する周波数 ω_I が求まる。初期値として与えた単色平面波は $a \ll 1$ の場合は時間を経ても、波形がほとんどひずまず、分散関係が精度良く計算できた。

第2図(a)~(c)はその結果をまとめたもので、それぞれ $\theta=0^\circ, 45^\circ, 90^\circ$ の場合の分散関係を示し、実線が

第1図 波の伝搬

Fig. 1. Propagation of wave.

第2図 (a) $\theta=0^\circ$, (b) $\theta=45^\circ$ および (c) $\theta=90^\circ$ の場合の分散関係

Fig. 2. Dispersion relation for (a) $\theta=0^\circ$, (b) $\theta=45^\circ$ and (c) $\theta=90^\circ$.

線形化された MHD-Maxwell 方程式系から得た理論値⁽²¹⁾で、丸印がシミュレーションから得た結果を示す。周波数、波数および速度は、それぞれ ω_{pe} , k_{De} , $\langle v_{Te,0} \rangle$ で規格化されている。プラズマパラメータは $T_e = T_i = 10^6 \text{ K}$, $n_0 = 10^{18} \text{ m}^{-3}$, $\gamma = 1,836$, $\hat{r} = 16$, $\hat{\omega}_{ce} = 2.0$, $\hat{c} = 7.6$, $\hat{\nu}_{ei} = 4.02 \times 10^{-2}$ およびアルフベン速度 $\hat{V}_A = \hat{\omega}_{ci} \hat{c} / \hat{\omega}_{pi} = 3.8$ である。初期の波の振幅として $a = 10^{-4}$, 10^{-3} , 10^{-2} の場合を計算したが、ほとんど差異はなかった。 k_I を与えたとき ω_I は $\delta \mathbf{X}$ の 13 個の成分から各々計算されるが、その中で振幅の比較的大きい成分から計算された ω_I を集めるとほぼ 3% 以内の相対誤差で一定値になるので、その平均値を注目している波の ω_I と決定した。

第 2 図 (a) で (1) は電子プラズマ波, (2) はイオン音波, (3) は Fast right wave (FR 波), (4) は Fast left wave (FL 波), (5) は電子サイクロトロン波 (EC 波), (6) はイオンサイクロトロン波 (IC 波), 第 2 図 (b) で (10) は速い磁気音波, (11) はアルフベン波, (12) は遅い磁気音波, 第 2 図 (c) で (13) は異常波, (14) は正常波, (15) は高域混成波, (16) は低域混成波の各ブランチをそれぞれ表わす⁽²¹⁾。第 2 図から明らかなように、シミュレーションの結果から得られた分散関係は $\omega/k \geq c$ の領域まで含めて実線で示す理論値と良い一致を示す。第 2 図 (c) から明らかなように、(15) のブランチに対するしゃ断周波数は高域混成共鳴周波数から離れて低くなっている。この効果は長谷川氏のモデル⁽¹²⁾では現われていない。

第 2 図 (a) の破線は、第 3 図の例で示されるようなシミュレーションから得られた電子プラズマ波の減衰より決まる $\hat{\nu}_{ei}$ を記したもので、Spitzer 氏の理論⁽²²⁾から計算した値 0.0402 に近い。第 3 図は $a = 10^{-2}$, $k = 1/8$ の単一モードの初期条件より出発した電子プラズマ波の $x = L/2$ の点における時間的変化の様子を示したもので、縦軸は $\log_{10} |\Phi|$ である。 $|E_x|$ と $|M_{ex}|$

第 3 図 $x = L/2$ における電子プラズマ波の時間的変化

Fig. 3. Time history for the electron plasma wave at $x = L/2$.

はほぼ一定の減衰率で減衰しているのがわかる。

$|E_x|$ は絶対値をとっているから、2 個のピーク値間隔の時間が $k = 1/8$ の電子プラズマ波の 1 周期に相当する。また $|M_{ix}| \equiv \hat{r}^{-1} |M_{ex}|$ であるのがわかる。

<4.2> 大振幅波動の周波数および波数スペクトル

第 4 図 (a), (b) は $\theta = 0^\circ$, $a = 0.5$, $k = 1/8$, $\nu_{ei} = 0$ に対する大振幅電子プラズマ波を初期値に与えたときの $t = 2\pi$ と $t = 32\pi$ における空間的変化の様子を示したものである。第 4 図 (a) では初期値に近く、それぞれの物理量 Φ は三角関数で示されるような波形をしているが、第 4 図 (b) では波形がひずみ高調波が発生している。 $t = 20\pi$ で同図に近い波形が形成され、その後は波形はあまり変化せずに基本波の位相速度で左のほうへ伝搬する。 E_x が下方へ急しゅんするのは、 δn_e が高密度側へ急しゅんであることを示していて理論でも示されている⁽²⁶⁾。同図の条件は、電子プラズマ波の群速度 $\hat{V}_G \equiv (\partial \omega / \partial k) \equiv 1/8$ がイオン音波の速度 $\hat{c}_s \equiv \sqrt{2}/4$ より小さくて、崩壊不安定の共鳴条件は成立しない領域である⁽²⁷⁾。

第 5 図 (a), (b) は $\theta = 0^\circ$, $a = 0.5$, $k = 1/8$, $\nu_{ei} = 0$ の電子プラズマ波に近い初期条件を与えたときの $t = 0$ と $t = 62\pi$ の間の周波数スペクトルと、 $t = 32\pi$ から

第 4 図 (a) $t = 2\pi$ および (b) $t = 32\pi$ のときの大振幅電子プラズマ波の空間的変化

Fig. 4. Spatial patterns of the large amplitude electron plasma wave for (a) $t = 2\pi$ and (b) $t = 32\pi$.

第 5 図 大振幅電子プラズマ波で励起したときの (a) 周波数スペクトルおよび (b) 波数スペクトル

Fig. 5. (a) Frequency spectra and (b) Wave number spectra of the waves excited by the large amplitude electron plasma wave.

$t=64\pi$ までの平均の波数スペクトルを示す。第 5 図 (b) は $k=1/8, 2/8, 3/8, \dots$ の値に分離したピーク値をもつスペクトルになっていて、文字が重なる場合はアルファベットの後位の文字を右へ移している。A, B, C, D, E はそれぞれ $\delta n_e, \delta n_i, E_z, M_{ex}, M_{ix}$ に相当し、その位置が大きさを示す。

第 5 図 (a) にて初期値として 1 のピーク値に相当する大振幅電子プラズマ波を与えている。2 と 3 のピーク値はそれぞれ第二および第三調波である。4 のピーク値においては $\omega=1/16$ で δn_i と δn_e がほぼ等しい。第 5 図 (b) にて B で示される δn_i は $k=1/8$ のときに大きい。第 2 図 (a) 上で $(k, \omega)=(1/8, 1/16)$ の点はイオン音波のブランチに近い。更に 4 のピーク値における Φ の相対比はイオン音波の固有ベクトルのそれ⁽²¹⁾に近いことから考えると、4 のピーク値の波は $k=1/8$ のイオン音波である。同様に、6 のピーク

第 6 図 大振幅イオン音波、イオンおよび電子サイクロトロン波で励起したときの (a) 周波数スペクトルおよび (b) 波数スペクトル

Fig. 6. (a) Frequency spectra and (b) Wave number spectra of the waves excited by the large amplitude ion-acoustic, ion and electron cyclotron waves.

は $(k, \omega)=(1/8, 1/4)$ のイオン音波であると推測される。5 の矢印の周波数は 1 と 4 の差の周波数に一致するので、1 の低周波数側の側帯波である。非線形のために高調波、他のモードおよび側帯波が強く励起され

いて、波数においても $k=1/8$ なる基本波の高調波が顕著に現われている。

第6図(a), (b)は $\theta=0^\circ$, $k=1/4$, $a=0.2$, $\nu_{ei}=0$ にして, 1, 3, 4 のピーク値で示されるイオン音波, IC 波および EC 波の三つの波を重ねて初期値として与えたときの $t=0$ から 32π までの周波数スペクトルと $t=28\pi$ から 32π までの平均の波数スペクトルを示している。第6図(b)は $k=1/4, 2/4, 3/4, \dots$ の分離したスペクトルになっていて, A, B, C, D, E, F, G はそれぞれ $\delta n_e, \delta n_i, E_x, E_y, E_z, B_y, B_z$ を示す。励起波が大振幅なので他の波も非線形で強く励起されている。 Φ が $k=1/4$ で大きいので第2図(a)の $k=1/4$ における波の周波数と第6図(a)における各ピーク値の周波数を比較することと, 各ピーク値が Φ のいずれの成分に主として現われているかを調べることで, それぞれの番号のピーク値を示す波は2が電子プラズマ波, 5がFL波, 6がFR波と結論される。

第6図(b)で $k=0$ にて E_y と E_z の値が有限であることと, 第2図(a)の分散関係からみて, 第6図(a)の7と8のピーク値はFL波とFR波のしゃ断周波数である。 $k=0$ の振動は三つの波を初期値に重ねて与えたために生じたものである。初期値は1, 3, 4のピーク値をもつ平面波の重ね合わせであるが, 大振幅のために励起波と同じ波数 $k=1/4$ の他の固有波動である2, 5および6のピーク値をもつ波が強く励起されている。

第7図(a), (b)は $\theta=90^\circ$, $k=1/4$, $a=1.0$, $\nu_{ei}=0$ にて1のピークの低域混成波と3のピークの正常波を重ねて初期値として与えたときの $t=0$ から 32π までの周波数スペクトルおよび $t=28\pi$ から 32π までの平均の波数スペクトルを示している。第7図(b)は第6図(b)と同じ記号を用いた。これも第2図(c)の分散関係にて各ブランチ上の $k=1/4$ における周波数と比較してみることで2と4のピーク値の波は高域混成波および異常波であると結論される。第7図(b)で $k=0$ にて E_x, E_y, E_z が有限の値をもつことと, 第2図(c)からみて, 5, 6, 7のピーク値の周波数はそれぞれ高域混成波, 正常波および異常波のしゃ断周波数であるとわかる。次に8のピーク値の周波数は, 第7図(b)の波数スペクトルを考慮したとき, 直接第2図(c)のブランチ上には該当するものがない。しかし, 1と2の周波数の和に一致し, 振動の成分も1と2の低域および高域混成波の成分とほぼ等しいことから, 1と2のビート波であると考えられる。

初期値が $a=1$ と非常に大振幅であるから, 第7図(a)では1と3の高調波および1のピーク値だけ高周

(a)

(b)

(b)図の記号は第6図(b)と同じ

第7図 大振幅低域混成波および正常波で励起したときの波の(a)周波数スペクトルおよび(b)波数スペクトル

Fig. 7. (a) Frequency spectra and (b) Wave number spectra of the waves excited by the large amplitude lower hybrid and ordinary waves.

波数側または低周波数側にずれた側帯波が小さなピークとなって現われている。第7図(b)から明らかなように, $k=1/4$ の励起波に対する波数の高調波の振幅もかなり大きい。3のピーク値で示される正常波の振幅 a を初期値で零にしても, 他のスペクトルはほとんど変化しないので, 正常波と他の波の相互作用は弱い。

5. 討 論

第5図(a), (b) から明らかなように, 崩壊不安定を起こさない大振幅の電子プラズマ波は, 励起波に対する波数および周波数の高調波を非線形のために励起する。すなわち, 崩壊不安定と逆の現象——波数および周波数スペクトルにおいて低いほうから高いほうへの流れを作り出すと思われる。しかし, この現象が顕著になるのは, 非線形の程度を示す α の値はかなり大きい必要がある。 $\alpha=1$ で電子プラズマ波の振動エネルギーは電子の運動エネルギーに等しくなる。第5図の条件の逆の場合, すなわち電子プラズマ波の群速度 V_G が c_s より大きいときには, 崩壊不安定が起こるはずである⁽²⁷⁾。 $c_s \propto \gamma^{-1/2}$ であるから $\gamma=16$ の代わりに例えば $\gamma=1836$ とすると, $V_G \leq c_s$ を満たす境界の波数は小さくなる。しかし, その条件を満たす領域においては上に述べてきた現象が起こると期待される。

第6図, 第7図からわかるように, 大振幅の低周波を空間的に一様に励起すれば, 同じ波数で励起波より高い周波数の固有な波も同時にかなり強く励起される。また波数スペクトルから明らかなように, 波数における高調波も強く励起される。

大振幅で励起した波より高周波数側に, 励起波と共通な振動成分をもつ波のブランチが存在しなければ, 励起波の高調波が主として発生し, その振幅は励起波の振幅より小さい。励起波より高周波数側に, 励起波と共通な振動成分をもつ波のブランチが存在すれば, 励起波の高次の高調波が時間とともに強く励起されて主に励起波と同じ波数の高周波数の固有な波に振動エネルギーが移って安定になると考えられる。励起波より低周波数側に波のブランチが存在すれば, まずイオンまたは電子による誘導散乱⁽²⁸⁾でイオンまたは電子に低周波数の振動が起こり, その振動が主として励起波と同じ波数の固有な低周波に移って行って安定になると考えられる。この現象は共鳴条件を満たさなくても励起波が大振幅になれば顕著になる。

6. む す び

流体の輸送方程式と Maxwell 方程式を非線形のまま変形 2 step Lax-Wendroff 法で初期値問題として解き, $\hat{r}, \hat{c}$ および $\hat{\omega}_{ce}$ を導入することにより線形化された MHD-Maxwell 方程式系で記述されるすべての波に対してシミュレーションを行ない, 分散関係を求めて理論値と良く一致することを示した。流体モデルではあるが, $\omega/k \geq c$ の領域の波を閉じた形で厳密に取り入れたのは, 長谷川氏のモデル⁽¹²⁾の一つの拡張に

なっていて, 有限 β 値効果も含んでいる。

次に崩壊不安定の起こらない条件下で, 大振幅波動のシミュレーションを行ない, 高調波の励起, 更に励起波と同じ波数での高周波数および低周波数の固有な波の励起および波数における高調波の励起の現象を明らかにした。なお, 粒子数, 運動量およびエネルギーの保存則および数値的な安定性は実際の計算でも十分に保証されていた。

今後の課題として, 崩壊不安定, ソリトンおよび乱流スペクトルなどの興味ある現象に, ここで述べたモデルを用いることができる。

計算には名古屋大学プラズマ研究所の計算機センターおよび名古屋大学大型計算機センターを利用した。

終わりに, 日頃懇切に討論していただく名古屋大学の宮島重喜助教授, 名古屋大学プラズマ研究所の上村鉄雄助手, 渡辺二太助手および計算の前半を手伝っていただいた卒研究生の加藤 昇氏(現, トヨタ自工(株))に厚くお礼申し上げる。(昭和49年6月4日受付)

文 献

- (1) B. Alder, et al.: *Methods in Computational Physics* 9, Academic press, New York (1970)
- (2) 例えば, 川上: プラズマ若手夏の学校テキスト(昭44, 昭48)
- (3) O. Buneman: *Phys. Rev.* 115, 503 (1959)
- (4) J. M. Dawson & R. Shanny: *Phys. Fluids* 11, 1506 (1968)
- (5) S. K. Birdsall & D. Fuss: *J. Comp. Phys.* 3, 494 (1969)
- (6) F. H. Harlow: *Proc. Symposia in Applied Mathematics*, Amer. Math. Soc. 15, 269 (1963)
- (7) R. L. Morse & C. W. Nielson: *Phys. Fluids* 12, 2418 (1969)
- (8) W. L. Kruer & J. M. Dawson: *ibid.* 15, 446 (1972)
- (9) R. L. Morse & C. W. Nielson: *ibid.* 16, 909 (1973)
- (10) R. J. Mason: *ibid.* 15, 845 (1972)
- (11) 奥谷: 核融合研究 18, 440 (昭42)
- (12) A. Hasegawa & H. Okuda: *Phys. Fluids* 11, 1995 (1968)
- (13) A. Hasegawa & T. Kamimura: *ibid.* 11, 2004 (1968)
- (14) A. Hasegawa: *ibid.* 15, 870 (1972)
- (15) H. Oya: *Radio Sci.* 6, 1131 (1971)
- (16) K. Hain: *Nuclear Fusion Suppl.* Pt. 2, 561 (1962)
- (17) D. Duchs: *Phys. Fluids* 11, 2010 (1968)
- (18) 例えば B. B. Kadomtsev & V. I. Karpman: *Soviet Phys. Uspekhi* 14, 40 (1971)
- (19) T. H. Stix: *The theory of Plasma Waves*, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York (1962)
- (20) A. I. Akhiezer, et al.: *Collective Oscillation in a Plasma*, The M. I. T. Press, Cambridge (1967)
- (21) 荻野・武田: 電気学会論文誌 94-A, 381 (昭49-9)
- (22) L. Spitzer: *Theory of Physics of Fully Ionized Gases*, Interscience Publishers, New York (1956)
- (23) N. Suzuki, A. Funahashi & S. Itoh: *JAERI-M* 4726 (1972)
- (24) P. D. Lax & B. Wendroff: *Commun. pure Appl. Math.* 17, 381 (1964)
- (25) 例えば, 市村: 統計力学 118 (昭46) 裳華房
- (26) R. C. Davidson: *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Academic press, New York and London p. 38 (1972)
- (27) 例えば, A. A. Galeev & R. Z. Sagdeev: *Nucl. Fusion* 13, 603 (1973)
- (28) V. N. Tsytovich: *Nonlinear effects in Plasma*, Plenum press, New York-London, p. 73 (1970)