UDC 621.373.421:537.862

論 文

50-A32

時間遅れをもつ非線形系の強制振動

京都大学 上 田 院 亮

京都大学 井 上 嘉 明

1. ま え が き

時間遅れおよび飽和を含む閉ループ系の自励振動については既にいくつかの報告がある^{(1)~(10)}。それらの結果によれば、(1)正弦波に極めて近い自励振動が発生する。(2)周波数および振幅の異なる複数のモードの自励振動が存在しうる。すなわち、多モード発振の系であり、いずれのモードが現われるかは系の初期状態により決定される。(3)適当な入力信号によって現在のモードから他のモードへ移行させることができる。(4)遅れ時間を連続的に変化させると、ある値において現在のモードから他のモードへ跳躍し、この変化の過程はヒステリシス特性を示す。などが知られている。

この種の系の強制振動について、坂和・菅田両氏⁽⁹⁾は自励振動が存在しない場合の基本調波振動を、福岡・松原両氏⁽¹¹⁾は同じ場合に対し跳躍共振の可能性を論じられた。更に南雲⁽¹²⁾および松原⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾の両氏は一つの自励振動が存在する場合について、入力信号による自励振動の非同期抑制ならびに自励振動が抑制された状態における系の周波数応答などを論じられた。

本論文は時間遅れおよび飽和を含む系に正弦波入力を加えた場合の基本調波振動を論じるが、従来の報告に比べ次の二点において問題の設定が一般化されている。(1)従来の報告は、系に自励振動が存在しないか、あるいはただ一つ存在する場合を論じたのに対し、本論文は複数の自励振動が存在する系を扱う。多モード発振は時間遅れをもつ系の最も重要な特徴の

一つである。(2)従来の報告は、入力周波数と自励振動周波数が非同期的な場合のみを論じているのに対し、本論文はすべての入力周波数に対して基本調波振動を考察し、その大域的性質を明らかにする。

以下では、まず計算機実験により基本調波振動の周波数応答や安定限界を観測する。次に、実験結果に基づき基本調波振動は記述関数を、その安定性は増分記述関数を用いて解析する。終わりに、数値例を挙げて実験結果がよく説明されることを明らかにする。

2. 系の構成と自励振動

本章では考察の対象とする系を示す。この系の自励振動については既に報告されているが、本論文に用いる記号の導入を兼ねて、簡単に説明する⁽⁵⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

〈2・1〉 系の構成 本論文では第1図に示す系を考察の対象とする。すなわち、選択要素 $ks/(s^2+2\delta s+1)$ 、時間遅れ要素 e^{-sL} および飽和要素

$$f(v) = \begin{cases} v - \frac{1}{3}v^3 & |v| \leq 1 \\ \frac{2}{3}\operatorname{sgn} v & |v| \geq 1 \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

から成る閉ループ系に入力信号 $F \sin \nu t$ が加えられている。図に示した変数を用いれば第1図の系は二階非線形微分差分方程式

第1図 時間遅れおよび飽和を含む閉ループ系
Fig. 1. Closed loop system with time delay and saturation.

Forced Oscillations in a Nonlinear System with Time Delay.
By Y. UEDA, Member & Y. INOUE, Member (Faculty of
Engineering, Kyoto University).
上田院亮: 正員, 京都大学工学部
井上嘉明: 正員, 京都大学工学部

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\delta \frac{du}{dt} + u + k f(v) &= kF \sin \nu t \\ v(t) &= \frac{du(t-L)}{dt} \end{aligned} \right\} (2)$$

で記述される。特に $F=0$ とおけば、(2)式はミノルスキーの方程式として知られている⁽²⁾⁽⁹⁾⁽¹⁰⁾。

〈2・2〉 自励振動 自励振動を単一正弦波で近似し、その周波数 ω_0 および振幅 r_0 を求めよう*。飽和要素を記述関数 $N(r)$ で置き換えて得られる等価線形系の特性方程式は

$$\left. \begin{aligned} 1 + G(s)N(r) &= 0 \\ \text{ここに} \\ G(s) &= \frac{ks}{s^2 + 2\delta s + 1} e^{-sL} \\ N(r) &= \begin{cases} 1 - \frac{1}{4}r^2 & r \leq 1 \\ \frac{1}{\pi} \left\{ \left(\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2} \right) \sqrt{r^2 - 1} - \left(\frac{1}{2}r^2 - 2 \right) \sin^{-1} \frac{1}{r} \right\} & r \geq 1 \end{cases} \end{aligned} \right\} (3)$$

で与えられる。 ω_0 および r_0 は(3)式が虚軸上に根 $\pm j\omega_0$ をもつ条件、すなわち

$$1 + G(j\omega_0)N(r_0) = 0 \quad (4)$$

から決定される。(4)式はまた

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{G(j\omega)} &= A(\omega) + jB(\omega) \\ \text{ここに} \\ A(\omega) &= \frac{1}{k} \left(2\delta \cos \omega L + \frac{1-\omega^2}{\omega} \sin \omega L \right) \\ B(\omega) &= \frac{1}{k} \left(2\delta \sin \omega L - \frac{1-\omega^2}{\omega} \cos \omega L \right) \end{aligned} \right\} (5)$$

を用いて次のように表わされる。

$$A(\omega_0) + N(r_0) = 0, \quad B(\omega_0) = 0 \quad (6)$$

(6)式第二式を満たす周波数のうち、系の一巡位相推移を $2n\pi$ (n は整数) とするような無限個の周波数 ω_{i0} ($i=1, 2, 3, \dots$) はモード周波数と呼ばれている。モード周波数 ω_{i0} に対して(6)式第一式を満たす r_{i0} が存在すれば、それが自励振動の振幅となる。従って、モード周波数のうちのいくつかが自励振動周波数となる。

*: 本論文では飽和要素入力点における振動に注目する。従って、振動振幅もその点における値を表わす。

3. 飽和要素の増分記述関数

本章では第5章に行なう解析の準備として、まず文献(15)および(17)に従って飽和要素の増分記述関数を説明する。次に三信号効果として知られている飽和要素の性質を増分記述関数を用いて述べる。

飽和要素の入力信号が、振幅の大きい正弦波(大信号)とそれに重畳する微小振幅の正弦波(小信号)から成る場合を想定し、後者に対する記述関数を考える。このような記述関数は、特に増分記述関数と呼ばれ定常振動の安定性を調べるのに有用である^{(15)~(17)}。まず大信号 $c \sin \nu t$ に単一周波数成分の小信号 $\xi \sin(\omega t + \phi)$ が重畳する場合を考える*。飽和要素の入力信号

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin \nu t + \xi \sin(\omega t + \phi) \\ \text{ここに} \\ \xi &\ll 1, \quad \omega \approx \nu, \quad 3\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (7)$$

を(1)式に代入し、 ξ の二次以上の項を無視すれば、大信号に対する通常の記述関数

$$N(c) = 1 - \frac{1}{4}c^2 \quad (8)$$

および小信号に対する増分記述関数

$$N_i(c) = 1 - \frac{1}{2}c^2 \quad (9)$$

を得る。(8)、(9)両式を比較することにより、小信号の利得は大信号のそれよりも小さいことがわかる。この性質は飽和要素の小信号弁別 (Small signal discrimination) として知られている⁽⁴⁾⁽¹⁸⁾。

(7)式において大小両信号の周波数が等しい、すなわち $\nu = \omega$ なる場合を考える。このとき大信号に対する記述関数は(8)式で、小信号に対する増分記述関数は

$$\left. \begin{aligned} N_i(c, \phi) &= P(c) - Q(c)e^{-j2\phi} \\ \text{ここに} \\ P(c) &= 1 - \frac{1}{2}c^2, \quad Q(c) = \frac{1}{4}c^2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。(10)式は小信号が飽和要素を通過するに際し、振幅のみならず位相も変化することや、位相差 ϕ の値によって利得は(9)式の場合より大きくも小さくもなりうることを示している。

次に上の議論を小信号が二つの正弦波から成る場合に拡張する。そのために飽和要素の入力信号

$$\left. \begin{aligned} v &= c \sin \nu t + \xi_1 \sin(\omega_1 t + \phi_1) \\ &\quad + \xi_2 \sin(\omega_2 t + \phi_2) \\ \text{ここに} \quad \xi_1, \xi_2 &\ll 1, \quad \omega_1, \omega_2 \approx \nu, \quad 3\nu \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (11)$$

*: 以下では簡単のため $c < 1$ の場合についてのみ考察する。

を考える。上式において、大信号周波数 ν が小信号周波数 ω_1, ω_2 の和または差の半分に等しくない場合は、小信号相互間に干渉はなく、大信号の記述関数は(8)式で、小信号のいずれの成分の増分記述関数も(9)式で与えられる。次に(11)式において周波数の間に関係式

$$\omega_2 \pm \omega_1 = 2\nu \dots\dots\dots (12)$$

が成立する場合を考える。上式において和、差いずれが成立する場合も同様に議論できるので、以下では和の場合の増分記述関数を誘導する。(12)式を考慮し、(11)式を(1)式に代入し飽和要素出力の小信号成分を

$$\eta_1 \sin(\omega_1 t + \psi_1) + \eta_2 \sin(\omega_2 t + \psi_2) \dots\dots (13)$$

で表わせば、増分記述関数を次のように行列 $N_i(c, \psi)$ を用いて表わすことができる。

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{bmatrix} &= N_i(c, \psi) \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} P(c) & -Q(c)e^{-j\psi} \\ -Q(c)e^{-j\psi} & P(c) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここに $\psi = \psi_1 + \psi_2$ (14)

(14)式において特に $\xi_1 = \xi_2 = \xi$, $\psi = n\pi$ (n は整数)が成り立つ場合を考えよう。まず n が奇数のとき、入力信号(11)は変調度の微小な位相変調波であって、大信号が搬送波に、小信号が側帯波に対応する。このとき(14)式は、大小両信号はともに飽和要素から同じ

利得 $(1-c^2/4)$ を得ることを示している。この事実は位相変調波が飽和要素を通過しても変調度が不変なことに対応している。このように関係式(12)が成立するとき、二つの小信号の振幅および位相の間に適当な関係があれば、これらの小信号は単一小信号より容易に飽和要素を通過することがわかる[(9)式参照]。この現象は三信号効果(Three signal effect)として知られている⁽⁴⁾⁽¹⁸⁾⁽¹⁹⁾。次に n が偶数のとき、入力信号(11)は変調度の微小な振幅変調波であって、搬送波はやはり利得 $(1-c^2/4)$ を得るが、側帯波は(8), (9)両式の値より小さい利得 $(1-3c^2/4)$ しか得ることができない。

4. 計算機による基本調波振動の観察

本章ではアナログ計算機を用いて第1図の系に生じる基本調波振動を実験的に観測する。時間遅れ要素はアナログ・ディジタル変換装置を備えたミニコンピュータで実現した。

実験を行なうに際し系のパラメータ値は、(1)少なくとも2個のモードの自励振動が存在すること、(2)安定性の検討を容易にするため自励振動の振幅が1より小さいこと^{*}、(3)三信号効果による不安定性が明瞭に観測できるよう振幅のほぼ等しい二つの自励振動が存在すること、などの点を考慮することにより

^{*}: $k/2\delta < 4/3$ が成り立つときは、遅れ時間 L の値にかかわらず自励振動振幅は1より小さい。

第2図 計算機による基本調波振動の周波数応答曲線

Fig. 2. Frequency response curves of the harmonic oscillation obtained by computer-simulation.

第3図 $\nu = \omega_{10}$ に対する周波数応答曲線
Fig. 3. Frequency response curves for $\nu = \omega_{10}$.

第4図 $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ に対する周波数応答曲線
Fig. 4. Frequency response curves for $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$

$\delta = 1.0$, $k = 2.5$, $L = 5.8$ (15)
と選定した。この値に対して、(6)式を用いて算出したモード周波数 ω_{10} および自励振動振幅 r_{i0} のいくつかを次に挙げる。

$$\left. \begin{aligned} \text{モード 1: } \omega_{10} &= 0.621, r_{10} = 0.655 \\ \text{モード 2: } \omega_{20} &= 1.552, r_{20} = 0.697 \\ \text{モード 3: } \omega_{30} &= 2.566, \quad \quad \quad \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

系のパラメータ(15)に対してはモード1および2以外

の自励振動は存在しない。計算機によって観測した自励振動の周波数および振幅はこれらの値と良好な一致を示した。

次に基本調波振動の実験結果について述べる。第2図は周波数応答曲線(振幅 c はピーク値)を示す。図中、点IおよびIIはそれぞれモード1および2の自励振動を表わす。基本調波振動はモード周波数付近の入力周波数に対し共振現象を示している。入力周波数 ν のほぼ全域にわたって横軸に平行な安定限界 $c = 0.50$ の存在することが認められた。すなわち、この値より振幅の小さい領域には安定な基本調波振動は観測されない。更に、 $\nu = \omega_{10}, \omega_{20}, (\omega_{20} \pm \omega_{10})/2$ および $(\omega_{30} \pm \omega_{20})/2$ の付近で不安定領域の隆起が認められた。第3図は $\nu = \omega_{10}$ 付近、第4図は $\nu = (\omega_{20} + \omega_{10})/2$ 付近において不安定領域が隆起する模様を詳細に調べた結果である*。

なお、(15)式とは異なるいくつかの遅れ時間に対しても実験を行なったが、いずれの場合も上に述べたものと類似の結果を見た。

5. 基本調波振動とその安定性

本章では、はじめに基本調波振動を記述関数を用いて解析する。続いて、その安定性を増分記述関数を用いて考察する。最後に数値例と実験結果の比較を行い、解析の妥当性を示す。

〈5.1〉 基本調波振動 第1図の系に基本調波振動

$$v = c \sin(\nu t + \varphi) \quad \dots\dots\dots (17)$$

が持続しているとすれば、その振幅 c および位相 φ は

$$\left. \begin{aligned} \{A(\nu) + N(c)\}^2 + B^2(\nu) &= F^2 \\ \varphi &= -\tan^{-1} \frac{B(\nu)}{A(\nu) + N(c)} \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

で与えられる。

〈5.2〉 安定性の検討 上に求めた基本調波振動の安定性を、その振幅 c および各モードの自励振動振幅 r_{i0} がともに1より小さい場合について考察する。

前章の実験結果から、基本調波振動の安定限界に関して次のことがわかる。すなわち、安定限界における振幅の値は、(a)ほとんどの入力周波数に対して一定である(第2図)が、入力周波数が(b)自励振動周波数付近(第3図)および(c)二つのモード周波数の和

*: 第2図、第3図および第4図中の太線は、実験結果との比較のため、第5章の解析結果を描いたものである。

および差の半分付近（第4図）にある場合は（a）における値より大きい。次に、これらの各区間における安定限界について考察する。

まず（a）においては、入力周波数と自励振動周波数が非同期的な関係にあると考えることができる。従って、ここでの現象は南雲⁽¹²⁾および松原⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾の両氏が論じられた入力信号による自励振動の非同期抑制と見なされる。ゆえに、横軸に平行な安定限界は自励振動周波数をもつ成分が抑制される（基本調波振動は安定）か励起する（不安定）かの限界と考えられる。

次に（b）において見られるように、自励振動周波数付近で不安定領域が隆起する現象は、時間遅れをもたない強制自励振動系、例えば正弦波入力をもつファンデル・ポールの方程式で記述される系の基本調波振動などにおいては良く知られており、その安定限界は基本調波と同じ周波数をもつ成分が励起するかどうかの限界と説明されている⁽²⁰⁾。（b）における限界もこれと同じ性質をもつと考えられる。

最後に、（c）において不安定領域が隆起する現象は、周波数 ω_1 および ω_2 をもつ二成分——両周波数はそれぞれモード周波数に近い値をもち、 $\omega_2 \pm \omega_1 = 2\nu$ を満たす——が三信号効果により互いに他を強め合いながら同時に励起することによって考えられる。従って、（c）の安定限界はこれら二つの成分が同時に励起するか否かの限界と考えられる。

以上の考察をもとに、各場合の安定限界を増分記述関数を用いて誘導する。

（a）の場合：基本調波振動（大信号）に重畳する微小変分（小信号）として、一つの自励振動と同じ周波数 ω_{i0} をもつ単一正弦波を考え*、この変分を支配する系を求めよう。いま、両者の周波数は非同期的な関係にあるので、（9）式の増分記述関数を用いて第5図に示す系を構成する。このような系は、いわゆる変分方程式に対応するものであるから、以後、変分系と呼ぶ。この系の特性方程式

$$1 + G(s)N_i(c) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

は、（4）、（8）式および（9）式から

第5図 変分系

Fig. 5. Variational system.

*：複数個の自励振動が存在しても、それらの周波数と入力周波数の間に特定の関係が成立しない場合は、各自励振動周波数をもつ成分を独立に扱うことができる。

$$c = \frac{r_{i0}}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots (20)$$

のとき虚軸上に根 $\pm j\omega_{i0}$ をもつ。他の自励振動周波数をもつ変分に対しても、同じ議論が成り立つから、この場合の安定限界は

$$c = \max_i \frac{r_{i0}}{\sqrt{2}} \quad \dots\dots\dots (21)$$

で与えられる。

（b）の場合：微小変分として基本調波と同じ周波数をもつ単一正弦波を考え、（10）式の増分記述関数を用いて第5図と同様な変分系を構成する。この系の特性方程式は

$$1 + G(\sigma + j\nu)N_i(c, \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

であり、安定限界においては次式が成立する。

$$1 + G(j\nu)N_i(c, \phi) = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

（5）、（10）式を用いて上式から ϕ を消去して

$$\{A(\nu) + P(c) + Q(c)\} \{A(\nu) + P(c) - Q(c)\} + B^2(\nu) = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

を得る。応答曲線の垂直接線をもつ点がこの曲線上にあることは容易に確かめられる。

（c）の場合：微小変分として

$$\omega_1 + \omega_2 = 2\nu \quad \dots\dots\dots (25)$$

を満たす周波数 ω_1 および ω_2 をもつ二成分を考える*。このときの変分系を（14）式の増分記述関数を用いて構成する。この系において

$$\xi_1 = -G(\sigma + j\omega_1)\eta_1, \quad \xi_2 = -G(\sigma + j\omega_2)\eta_2 \quad \dots\dots\dots (26)$$

が成り立つから、（14）、（26）両式から安定限界において成り立つ次式を得る。

$$\begin{bmatrix} P(c) + \frac{1}{G(j\omega_1)} & -Q(c)e^{-j\psi} \\ -Q(c)e^{-j\psi} & P(c) + \frac{1}{G(j\omega_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

上式を（5）式を用いて実部と虚部に分離すれば次式を得る。

$$\left\{ \begin{array}{l} \begin{bmatrix} P + A_1 & -Q \cos \phi \\ -Q \cos \phi & P + A_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \\ \begin{bmatrix} B_1 & Q \sin \phi \\ Q \sin \phi & B_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} = 0 \end{array} \right\} \quad \dots\dots\dots (28)$$

ただし $P(c)$, $Q(c)$, $A(\omega_i)$ および $B(\omega_i)$ を P , Q , A_i および B_i ($i=1, 2$) と記した。（28）式を満たすいずれも零でない ξ_1, ξ_2 が存在するためには

*： $\omega_2 - \omega_1 = 2\nu$ の場合も同様に論じられる。

$$\frac{P+A_1}{Q \cos \phi} = \frac{Q \cos \phi}{P+A_2} = \frac{-B_1}{Q \sin \phi} = \frac{Q \sin \phi}{-B_2} \dots (29)$$

が成立しなければならない。これより次式が導かれる。

$$B_1(P+A_2)=B_2(P+A_1) \dots\dots\dots (30)$$

$$(P+A_1)(P+A_2)+B_1 B_2=Q^2 \dots\dots\dots (31)$$

(10)式から P, Q の間に $P+2Q=1$ が成り立ち、この関係と (30), (31) 両式から P, Q を消去して次式を得る。

$$\{(B_1-B_2)-(A_1 B_2-A_2 B_1)\}^2 = 4 B_1 B_2 \{(A_1-A_2)^2+(B_1-B_2)^2\} \quad (32)$$

上式と (25) 式から、 ν を与えれば安定限界における

(a) 基本調波振動の周波数応答曲線

(a) Frequency response curves of the harmonic oscillation.

(b) 基本調波同期化領域

(b) Region of the harmonic synchronization.

第 6 図

Fig. 6.

ω_1, ω_2 が決まり、これらを用いて(30)式から c の値が算出される。

ここで、 $\nu = (\omega_{i0} + \omega_{j0})/2$ が成り立つ場合を考えよう。このとき ω_1, ω_2 はそれぞれ ω_{i0}, ω_{j0} になるから $B_1 = B_2 = 0$ となり、(30)式から c の値を求めることはできない。しかしながら、このときは(28)式第二式から $\psi = 0$ または $\pm\pi$ となり、更に(28)式第一式は

$$(P + A_1)(P + A_2) - Q^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (33)$$

あるいは(6)式および(10)式を用いて

$$\left(c^2 - \frac{r_{i0}^2}{2}\right)\left(c^2 - \frac{r_{j0}^2}{2}\right) - \frac{c^4}{4} = 0 \quad \dots\dots\dots (34)$$

と表わされる。従って、(34)式からこの場合の安定限界における c の値を算出することができる*。

以上に求めた安定限界を与える諸式は、安定限界の必要条件——特性方程式が虚軸上に根をもつ——から導かれたものであって、これらから得られる曲線は、安定限界にならない部分を含んでいる。従って、どの部分が安定限界になるかは実験的に決めなければならない。

〈5・3〉 数値例 前章の計算機実験に用いたのと同じパラメータ値 [(15)式] に対し(18)式第一式を用いて計算した基本調波振動の応答曲線を第6図(a)に示す。図中IおよびIIはそれぞれモード1および2の自励振動を表わす。図には〈5・2〉節に誘導した安定限界(太線)をも併せ記し、応答曲線の安定な部分は実線で、不安定な部分は点線で描いた。前節には c が1を超える場合の安定性を論じていないが、計算機実験では $c > 1$ の範囲において不安定領域は観測されなかったので、第6図(a)では応答曲線の $c > 1$ の部分は安定であるとした。図の安定限界を $F\nu$ 平面上に描いたものが、第6図(b)の太線であって、これより上の領域が基本調波同期化領域となる。第6図(a)では $\nu = \omega_{10}, \omega_{20}, (\omega_{20} \pm \omega_{10})/2$ および $(\omega_{30} \pm \omega_{20})/2$ 付近において不安定領域が隆起し、第6図(b)では $\nu = (\omega_{20} \pm \omega_{10})/2$ および $(\omega_{30} \pm \omega_{20})/2$ 付近において同期化領域が侵食されている。次に、これらの部分を詳細に検討する。

第7図(a)は $\nu = \omega_{10}$ 付近の応答曲線ならびに安定限界(太線)を描いたものである。安定限界は(21)式で与えられる直線と(24)式で与えられる閉曲線との一部分からなる。他の一本の直線は(20)式から計算されたものである。この安定限界を $F\nu$ 平面上に描いたもの

*: モード周波数 ω_0 の自励振動が存在しないときは、 r_0^2 は(6)式第一式を形式的に満たす負数とする。

(a) $\nu = \omega_{10}$ に対する周波数応答曲線
(a) Frequency response curves for $\nu = \omega_{10}$.

(b) 基本調波引込領域
(b) Region of the harmonic entrainment.

第7図
Fig. 7.

のが第7図(b)に示す基本調波引込領域の境界(太線)である。

第8図(a)は $\nu = (\omega_{20} + \omega_{10})/2$ 付近の応答曲線ならびに(25), (30)および(32)式で与えられる安定限界(太線)を描いたものである。安定限界の下方にある曲線もこれらの式から得られるので、参考のために記入した。この安定限界を $F\nu$ 平面上に描いたものが第8図

(a) $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$ に対する周波数応答曲線
(a) Frequency response curves for $\nu = (\omega_{10} + \omega_{20})/2$.

(b) 基本調波同期化領域の侵食
(b) Erosion of the region of the harmonic synchronization.

第 8 図

Fig. 8.

(b) に示す同期化領域侵食の境界 (太線) である。

第 4 章の実験結果を示す第 2 図, 第 3 図および第 4 図中に, 本章に得た安定限界を描いたものが同図中の太線である。これらより本章の解析結果は実験結果と満足すべき一致を示すことが認められる。

6. むすび

本論文では時間遅れおよび飽和を含む閉ループ系に正弦波入力を加えたときの基本調波振動を論じ, 基本調波振動の安定性に関し, 次の三つが基本的な機構であることを指摘した。

(1) 最大振幅の自励振動と同じ周波数をもつ成分の励起による不安定性。

(2) 基本調波と同じ周波数をもつ成分の励起による不安定性。

(3) それぞれがモード周波数にほぼ等しい周波数をもつ二成分の同時励起による不安定性。

時間遅れをもつ系の強制振動に関し, (1) 項は既に報告されているが, (2) および (3) 項は従来明らかにされていないものである。また, 基本調波振動の大域的性質——すべての入力周波数における応答曲線と同期化領域——を明らかにした。この系の高調波・分数調波振動や概周期振動などについては稿を改めて論じる。

終わりに, 日ごろご指導をいただいている林千博教授に深く感謝の意を表わす。

(昭和 49 年 5 月 13 日受付, 同 49 年 12 月 25 日再受付)

文 献

- (1) N. Minorsky: J. Appl. Mech. **64**, A-65 (1942)
- (2) N. Minorsky: J. Appl. Phys. **19**, 332 (1948)
- (3) W. J. Cunningham: J. Franklin Inst. **261**, 5, 493 (1956)
- (4) V. Met: Proc. IRE **45**, 1119 (1957)
- (5) 松原: 電学誌 **80**, 271 (昭 35)
- (6) V. S. Kislyakov: Automatica i Telemekhanika **21**, 442 (1960)
- (7) V. N. Yakovlev: Radiotekhnika i Elektronika **6**, 1974 (1961)
- (8) 坂和: 制御工学 **6**, 1, 32 (昭 37)
- (9) 坂和・菅田: 電学誌 **83**, 2071 (昭 38)
- (10) 末崎・森・塚田: 信学誌 **49**, 1293 (昭 41)
- (11) 福岡・松原: 計測自動制御学会論文集 **1**, 4, 304 (昭 40)
- (12) 南雲: 信学会非直線委資料 (昭 35-1)
- (13) 松原: 電学誌 **80**, 1660 (昭 35)
- (14) 松原: 電学誌 **82**, 78 (昭 37)
- (15) J. C. West, J. L. Douce & R. K. Livesley: Proc. Instn. Elect. Engrs **103**, B, 463 (1956)
- (16) Z. Bonenn: Proc. IFAC, Basel, Switzerland p. 35 (1963)
- (17) A. Gelb & W. E. Vander Velde: Multiple-Input Describing Functions and Nonlinear System Design (1968) McGraw-Hill
- (18) W. A. Edson: Trans. IRE CT-2, 58 (1955)
- (19) B. N. Biswas: Indian J. Phys. **38**, 561 (1964)
- (20) C. Hayashi: Nonlinear Oscillations in Physical Systems (1964) McGraw-Hill