無限平板導体上に積層された二層誘電体中にある球電極の電界の表現

金沢大学 高 嶋 武
金沢大学 石 橋 鏖 造

1. ま え が き

球対平板電極は、材料の耐電圧あるいは破壊電圧試験電極としてよく利用されるが、その周囲媒質が一様な場合に限り、電界の解析方法は広く知られている。しかし、電極が二層誘電体の中に置かれた場合の電界を簡単にかつ正確に計算することはかなり困難である。例えば、差分法によればこの電界を計算することができるが⁽¹⁾、この方法では外部（遠方）境界の取り扱いを工夫しなければならず、格子間隔を小さくしても、電位に比べて電界強度はかなりの誤差を含むことが多い。

本文では、誘電体界面および平板電極面を鏡面として設定された影像電荷を用い、逐次影像法または電荷重じょう法によりこの電界を計算する方法を提案している。計算および実験によって静電容量を求め、これにより計算方法の検証を行なっている。また、球電極の支持棒（つり下げ棒）の影響も計算により明らかにしている。

2. 電極領域の構成と電界計算法

第1図に示すように導体球と金属平板を電極とし、平板電極と平行な界面によって接する二層誘電体中に両電極が置かれた場合の電界を考える。球がいずれか一方の誘電体中にある場合には、逐次影像法により球内の点電荷とその逐次影像電荷により電界を表現し、また誘電体界面が球と交差する場合には、影像法の助

第1図 二層誘電体中に置かれた球対平板電極

Fig. 1. A spherical conductor and a conducting plane in two dielectric layers.

けを借りてリング状電荷を用いた電荷重じょう法により電界を求める。

なお、電界は回転軸対称となるので、2次元で表現される場として取り扱ってよい。

〈2・1〉 $a \leq h - \rho_0$ の場合

(i) 領域Iの電界の表現 考察点 $S(z, r)$ を領域I内に置き、領域Iの電界を表現する影像を設定する。まず球の中心に点電荷 q を置く。次に q の誘電体境界面および導体平板への影像を設定する。この際、導体平板は点光源 (q) を完全反射する鏡面と考えるのに対し、誘電体境界面は q の一部を反射し一部を透過する半透明な面と考える。かくして、領域Iを表現するための影像を第2図のように定めることができる⁽²⁾。ただし各影像電荷の大きさは、第2図および第4図（後述）より境界条件を考慮して決定され、次のように表わされる。

$$q' = \alpha_1 q, q'' = -\beta_1 \beta_2 \alpha_1^{-1} q \dots\dots\dots (1)$$

Calculation of Electric Field of a Spherical Conductor in Two Dielectric Layers on Infinite Plane Conductor. By Takeshi Takashima, Member & Ryōzō Ishibashi, Member (Faculty of Engineering, Kanazawa University).

高嶋 武：正員，金沢大学工学部
石橋鏖造：正員，金沢大学工学部

第2図 領域Ⅰの電界を表現するための影像電荷 ($a < h$)

Fig. 2. Configuration of image charges for presenting the electric field in medium I ($a < h$).

第4図 領域Ⅱの電界を表現するための影像電荷 ($a < h$)

Fig. 4. Configuration of image charges for presenting the electric field in medium II ($a < h$).

$$\alpha_1 = \frac{\epsilon_1 - \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \beta_1 = \frac{2\epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}, \beta_2 = \frac{2\epsilon_1}{\epsilon_1 + \epsilon_2} \dots (2)$$

さて、第2図により q の影像を設定すると、これらの影像は導体球表面の境界条件（等電位面）を満たさなくなる。そこで、更にこれらの影像の球表面への影像を設定しなければならない。第3図の関係⁽³⁾を利用して、球内に影像を設定する。

球内に設定された影像のそれぞれについて、最初の q の場合と同様にして、第2図により誘電体界面および導体平板に対する影像を設定する。更に、これらの球表面に対する影像を球内に設定する。以下同様にして、順次繰り返して影像を設定し、 q およびその影像によって電界を表現することができる。

以上のようにして設定される影像電荷列が0に収束しなければ電界を算出することができない。(2)式より $|\alpha_1| < 1$ の関係があるから、

$$|\beta_1 \beta_2| = \frac{4\epsilon_1 \epsilon_2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} = 1 - \frac{(\epsilon_1 - \epsilon_2)^2}{(\epsilon_1 + \epsilon_2)^2} = 1 - \alpha_1^2 < 1$$

ゆえに、

$$\left| \frac{q_{n+1}''}{q_n''} \right| < 1, q_n'' (n \rightarrow \infty) \rightarrow 0$$

である。また第3図の影像関係でも $|q_0'| < |q_0|$ が成立する。以上のことから影像電荷列は0に収束し、従って電界を算出することができる。

(ii) 領域Ⅱの電界の表現 点電荷 q が領域Ⅰの $(h, 0)$ にあり、考察点 S が領域Ⅱにある場合の影像は第4図のように定められる⁽²⁾。すなわち、 $(h,$

第3図 点電荷 q_0 の導体球への影像

Fig. 3. Imaging of point charge q_0 in a sphere.

0) には q'' が、それより右側に q_n' なる影像列が、左側に q_n なる影像列がそれぞれ生ずる。ただし、各々の影像の大きさは、

$$\left. \begin{aligned} q'' &= \beta_1 q, & q_n' &= \beta_1 \alpha_1^n q \\ q_n &= -\beta_1 \alpha_1^{n-1} q \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

かくして、(i)項において球内に設定したすべての電荷に対して、第4図の方式によりそれらの影像を求めれば、これにより領域Ⅱの電界を表現することができる。

(iii) 数値例 一様媒質中に存在する点電荷 q による電位は、当然

$$V = \frac{q}{4\pi\epsilon r} \dots (4)$$

で表わされ、 r は考察点までの距離を示す。いま、数値例として $h=5.5$ cm, $\rho_0=2.5$ cm, $a=2.5$ cm, $\epsilon_1=\epsilon_0$, $\epsilon_2=4.7 \times \epsilon_0$ の場合の計算結果を第1表に示す。球内に最初に設定した電荷を 1×10^{-9} C として、その後球内に影像列として設定された点電荷を含めた電荷の総計は 2,025 個（電荷量総計 1.6338×10^{-9} C）である。誘電体界面における境界条件 ($V_1=V_2$, $\epsilon_1 E_{1z}=\epsilon_2 E_{2z}$) は高い精度（6 けた以上一致）で満足されるので、第1表には球表面における結果のみを示した。これらより、明らかに電位の誤差は $\pm 0.01\%$ 以下である。一方、電界強度については、球面における θ と $\tan^{-1}(E_r/E_z)$ との関係、および誘電体界面に直交する誘電束の連続性が高い精度で満足されることから、そ

第1表 球面上の境界条件（計算値）

Table 1. Boundary conditions on the surface of the sphere (calculative).

位 置 $\theta(\text{deg})$	電 位 (V)	電界強度 (V/cm)		$\tan^{-1}(E_r/E_z)$ (deg)
		E_z	E_r	
0	359.877	172.174	0.0	0.0
30	359.875	151.176	87.285	30.0010
60	359.869	91.594	158.659	60.0020
90	359.857	-0.981	204.185	90.0027
120	359.842	-128.097	221.847	120.0026
150	359.826	-335.846	193.889	150.0014
180	359.818	-541.232	0.0	180.0

$$h=5.5, \rho_0=2.5, a=2.5 \text{ cm}, \epsilon_2/\epsilon_1=4.7$$

第 5 図 領域 II の電界を表現するための影像電荷 ($a > h$)Fig. 5. Configuration of image charges for presenting the electric field in medium II ($a > h$).

の誤差は電位の誤差と同程度あるいはそれ以下であると推測される。なお、求められた電界の精度には、影像電荷の総数に関連することはいうまでもない。

〈2・2〉 $a \geq h + \rho_0$ の場合 導体球が領域 II (誘電率 ϵ_2) の中にある場合の電界を表現する。最初に領域 II の中の電界を、次に領域 I の中の電界を説明する。

(i) 領域 II の電界の表現 球の中心に点電荷 q を置く。さて、第 2 図を求めた場合と同様に考えれば、領域 II を表現するための影像が第 5 図のように定まる⁽²⁾。これを用いて、 q の導体平板および誘電体界面に対する影像を設定する。次に第 5 図において q を除いたすべての影像に対して、それらの球表面への影像を第 3 図により求める。球内に設定された影像電荷のそれぞれについて、再び第 5 図を利用して影像が設定される。以下、前節の場合と同様に、第 3 図と第 5 図を利用して順次影像が求められる。

(ii) 領域 I の電界の表現 点電荷 q が領域 II の $(h, 0)$ にあり、考察点が領域 I にある場合の影像は、第 6 図のように定められる。かくして、(i) 項において球内に設定したすべての電荷に対して、第 6 図を利用して影像を求めれば、これにより領域 I の電界を表現することができる。

なお、第 5 図および第 6 図の影像電荷の大きさは、境界条件を考慮して決定され、次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} q' &= -\alpha_1 q, \quad q_n' = -\alpha_1^{n+1} q, \quad q_n = \alpha_1^n q \\ p &= -q, \quad p' = \alpha_1 q, \quad p_n' = \alpha_1^{n+1} q, \quad p_n = -\alpha_1^n q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

$$\left. \begin{aligned} q'' &= \beta_2 q, \quad q_n'' = \beta_2 \alpha_1^n q \\ p'' &= -\beta_2 q, \quad p_n'' = -\beta_2 \alpha_1^n q \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (6)$$

(iii) 数値例 本節で取り扱う場合は、一見して明らかのように、前節の場合と同程度の精度を要するときには、より多数の電荷を考慮しなければならない。特に誘電体界面が球に接近した場合はこの傾向が強

第 6 図 領域 I の電界を表現するための影像電荷 ($a > h$)Fig. 6. Configuration of image charges for presenting the electric field in medium I ($a > h$).

第 7 図 電荷重じょう法

Fig. 7. Charge superposition method.

く、他は前節と同条件で $a = 8.0 \text{ cm}$ の場合には、球内に設定された点電荷は 20,043 個であった。

〈2・3〉 $h + \rho_0 > a > h - \rho_0$ の場合 誘電体境界面が球面と交差している場合の電界を考える。この場合には前の二つの節のようには具合よく順次影像を設定することができない。すなわち、逐次影像法を適用できない。そこで、電荷重じょう法⁽⁴⁾⁽⁵⁾を用いて電界を求める。

まず、第 7 図のように球内の真電荷としてリング(円環)電荷を設定する。中心が z 軸上にあり、リング電荷の作る面が誘電体界面と平行になるように置く。次に、電位係数を求めるに際しては、これらの真電荷の影像を考え、真電荷とそれらの影像とからの電位の和として電位係数を算出する。真電荷と影像の関係は、第 2 図、第 4 図～第 6 図の考え方を拡張して適用する

ことができる。

(i) 輪郭点 j が領域 I に、電荷 q_i が領域 I にある場合の電位係数 $(h, 0)$ に中心を持つリング状真電荷 q_i と、これの影像として、次のようなリング状影像電荷を考える。すなわち、(イ)影像のリングの半径は真電荷のそれと同一であり、(ロ)影像の中心の位置は第 2 図の q' および q_n'' と同一位置で、その面は真電荷の面と平行であり、(ハ)電荷量の関係は点電荷の場合と同じく (1) 式および (2) 式による。これらのリング状影像を q_i' および q_{in}'' とすれば、電位係数 $P_{j,i}$ は次のように表わされる。

$$P_{j,i} = P(q_i) + P'(q_i') + \sum_{n=1}^{\infty} P''(q_{in}'') \dots (7)$$

(ii) 輪郭点 j が領域 I に、真電荷 q_i が領域 II にある場合 第 2 図の代わりに第 6 図を用いる。ただし、 $(h, 0)$ にあるのは真電荷そのものではなく、その影像であることに注意を要する。

(iii) 輪郭点が領域 II で、真電荷が領域 I の場合 第 4 図を用いる。

(iv) 輪郭点が領域 II で、真電荷が領域 II の場合 第 5 図を用いる。

なおリング状電荷による電位は、第 1 種完全円積分を含む簡単な式で表わされる⁽⁶⁾。

以上より、電位係数 $P_{j,i}$ が決まれば、次の連立一次方程式を解くことにより、境界と条件 $V_1, V_2, \dots, V_n$ を満足させるための q_i が求まり、これによって電界が求められる。

$$\begin{pmatrix} P_{11} & P_{12} & \dots & P_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ P_{n1} & P_{n2} & \dots & P_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V_1 \\ \vdots \\ V_n \end{pmatrix} \dots (8)$$

数値例

(i) いま a の値の他は (2・1) 節と同条件とし、 $a=5.5\text{ cm}$ とする場合の計算例を第 2 表に示す。ただ

第 2 表 球面上の境界条件 (計算値)

Table 2. Boundary conditions on the surface of the sphere (calculative).

位 置 $\theta(\text{deg})$	電 位 (V)	電界強度 (V/cm)		$\tan^{-1}(E_r/E_z)$ (deg)
		E_z	E_r	
0	100.013	47.6531	0.0	0.0
30	99.998	41.6167	24.0213	29.9936
60	99.997	24.9766	43.2563	59.9974
90	99.997	0.0032	53.9432	89.9965
120	99.998	-28.3801	49.1538	120.0009
150	99.997	-53.7088	31.0026	150.0049
180	100.019	-65.4000	0.0	180.0

$h=5.5, \rho_0=2.5, a=5.5\text{ cm}, \epsilon_2/\epsilon_1=4.7$

第 8 図 リング電荷配置図

Fig. 8. Configuration of ring charges.

し、球の電位は 100V とし、リング電荷は球内の $\rho=2\text{ cm}$, $\theta=5^\circ, 15^\circ, \dots, 175^\circ$ に計 18 個設定した。輪郭点は $\rho=2.5\text{ cm}$, $\theta=5^\circ, 15^\circ, \dots, 175^\circ$ とした。第 1 表の場合と同様に、誘電体界面における境界条件は高い精度で満足されるので、第 2 表には球表面における計算値のみを示した。第 2 表より、球面における条件 (すなわち、球面上が等電位であること、および θ と $\tan^{-1}(E_r/E_z)$ が一致すること) がかなり高い精度で満足されていることがわかる。

(ii) 再び a の値の他は (2・1) 節と同条件で、 $a=4.25\text{ cm}$ とする場合の球内の電荷配置の例を第 8 図に (一部分のみ) 示す。この場合は $a=5.5\text{ cm}$ の場合のように単純な電荷配置では誤差が大きいく。精度を高めるには、第 8 図のように誘電体界面付近の電荷分布を密にし、配置にも工夫を要する。第 8 図では $a=5.5\text{ cm}$ の場合より全体で電荷を 4 個増加したにもかかわらず、誘電体界面と球面の交点付近の誤差は大きく、電位の誤差は最大 1% である。しかし、交点から少し離れたところでは、 $a=5.5\text{ cm}$ の場合と同程度の精度が得られる。

以上の事情は他の場合にも当てはまり、誘電体界面と球面の交差角度が直角からかなりはずれると、電荷分布に工夫を要し、それを実施しても両面の交点付近での精度は他所に比べて劣る。

3. 静電容量 (計算値と実験値の比較)

電荷 Q で帯電された導体球が平板電極に対する電位を V とすれば、両電極間の静電容量 C は次式により表わされる。

$$C = Q/V \dots (9)$$

前に示した計算方法を検証するために、静電容量を計算で求め、これを次のような実験による値と比較した。

$100 \times 100(\text{cm})$ の導体板を平板電極とし、また半径

第 9 図 静電容量の計算値と実験値

Fig. 9. Capacitances-theoretical and experimental.

2.5 cm の導体球を球電極とし、これら両電極を深さ 50 cm の木製バス中に配置し、媒質 I には空気を、媒質 II にはひまし油をそれぞれ用いた。静電容量および誘電率は Q メータにより 100 kHz にて測定した。

第 9 図に静電容量の実験値と計算値を示した。図に示すとおり、計算値と実験値がよく一致している。

4. 検 討

〈4・1〉 電極支持棒の影響 球対平板電極においては、球導体を何らかの方法で支持しなければならない。球が導体棒（円形断面）で支持（つり下げ）される場合について、その支持棒の影響を検討する。

支持棒は、第 1 図において導体球に取り付けられた z 軸を軸とする導体円筒とする。この場合の電界は電荷重じょう法により計算できる。すなわち、支持棒内部に真電荷として線電荷を、 z 軸上に数個ないし数 10 個設定する。これらに対する影像は〈2・3〉節におけると同様にして求める。かくして、電位係数は球内に設定されたリング電荷、支持棒内に設定された線電荷およびそれらの影像を考慮して計算される。

第 3 表に計算値の一例を示す。支持棒内の線電荷の長さは、いずれの場合も 1 個あたり 0.5 cm である。試験電極として使用されるときに最も注目される電界強度最大点、すなわち平板・球面間の至近点 ($z=3$ cm, $r=0$) における電界強度に対する支持棒の影響を、第 3 表の中で参考としてみる。支持棒なしの場合に比し、支持棒の長さ 15 cm、半径 0.75 cm の場合でも、 $a=5.5$ cm のとき -0.23%、 $a=8$ cm のとき -0.20% の影響を与えるにすぎない。支持棒はこの点の電界強度に影響を与えないと言えよう。なお、 a

第 3 表 電極支持棒の影響

Table 3. Influences of suspension rod.

a (cm)	支持棒		静電容量 (PF)	電界強度 (V/cm)	
	長さ(cm)	半径(cm)		$E_z(z=3 \text{ cm}, r=0)$	$E_r(z=5.5 \text{ cm}, r=2.5 \text{ cm})$
5.5	0	0	11.155	65.400	53.943
"	5.0	0.25	11.551	65.354	53.410
"	"	0.75	11.895	65.317	52.973
"	10.0	0.25	12.133	65.320	53.079
"	"	0.75	12.720	65.274	52.578
"	15.0	0.25	12.723	65.301	52.913
"	"	0.75	13.511	65.252	52.395
8.0	0	0	14.372	64.814	47.068
"	5.0	0.25	14.693	64.778	46.655
"	15.0	0.75	16.569	64.683	45.750

$h=5.5$, $\rho_0=2.5$ cm, $\epsilon_2/\epsilon_1=4.7$, 導体=100 V

が大きいときには支持棒の影響は小さくなることもわかる。

〈4・2〉 逐次影像法と電荷重じょう法 球対平板電極で構成される場の電界の表現方法として、本文では誘電体界面と球面が交差する場合には電荷重じょう法を用い、そうでない場合には逐次影像法を用いた。一般的に言えば、電荷重じょう法は逐次影像法に比べて適用範囲は広く、〈2・1〉節および〈2・2〉節の場合には電荷重じょう法によっても電界を求めることができる。ここで、この 2 方法の特徴を比較してみる。

(i) 電荷重じょう法では文献⁽⁵⁾にも指摘されているように、電荷の配置に経験が必要であり、条件によっては精度を高めるために幾度かの試行が必要である。逐次影像法では、プログラムが完成すれば条件のいかに問わず機械的に計算することができ、精度を高めるには考慮する影像の数を（プログラムに含まれた条件を制御して）増加するだけでよい。

(ii) 誘電体界面が球面に近い場合には、逐次影像法では考慮に入れるべき影像の数がかなり多く、特に $a \geq h + \rho_0$ のときにはその傾向が大きい。これに対し電荷重じょう法では、電荷の配置を工夫しなければならない。特に $a \leq h - \rho_0$ のときに周到を要する。

以上を考慮すれば、誘電体界面が球面に近い場合（交差していない場合）には、 $a \leq h - \rho_0$ のときには逐次影像法を、 $a \geq h + \rho_0$ のときには電荷重じょう法を用いるのが有利と思われる。

5. 結 論

試験電極としてよく用いられる球体平板電極が二層誘電体中にある場合の電界の表現方法を提案した。球電極は導体棒で支持（つり下げ）されることが多いが、最大電界強度部分（球・平板間の最短部）の電界強度はこの支持棒の影響をほとんど受けない。支持棒

のない場合の電界は影像法を応用して、逐次影像法または電荷重畳法により計算できる。その場合に得られる精度は、電位についてはもちろんのこと、電界強度についても満足できるものである。なお、二つの方法はそれぞれ特徴を有するので、場合により、どちらかを選択すればよい。静電容量を求める実験により計算方法の正しさを確認した。(昭和50年9月23日受付)

文 献

- (1) D.F. Binns, et al.: Proc. Instn Elect. Engrs **114**, 1521 (1967)
- (2) R. Ishibashi, et al.: Japan J. Appl. Phys. **9**, 1132 (1970)
- (3) Plonsey & Collin: Principles and Application of Electromagnetic Fields p. 67 (1961) McGraw-Hill
- (4) H. Steinbigler: Electrotech. Z. (ETZ-A) **90**, 663 (1969)
- (5) 宅間: 電学誌 **93**, 362 (昭 48-5)
- (6) 増田・松本: 電気学会論文誌 **93-A**, 305 (昭 48-7)

正 誤

奥村典男・犬石嘉雄: 不平等電界における紙の隔壁効果 [Vol. 96-A, No. 3, Mar. 1976, p. 127 掲載]

ペ ー ジ	行	誤	正
127	左上から 10	90~100 cm	90~100 mm
127	左上から 12	16~30 cm	16~30 mm
127	右下から 3	1 辺 10 cm	1 辺 10 mm
134	右下から 5	(10×100 cm)	(10×10 mm)