UDC 621.318.423.013: 537.811
681.3

論 文

52-A 31

電子計算機による空心円筒形多層 ソレノイドの磁界分布の計算

正 員 海 保 勝 之 (電 総 研)

正 員 小 原 健 司 (電 総 研)

正 員 小 山 健 一 (電 総 研)

非会員 南 波 孝 治 (武蔵工大)

1. ま え が き

超電導線を使った空心電磁石により強磁界を定常的に発生させることが容易になってきた。超電導線の臨界電流は経験している磁界強度によって変わることで、また大形電磁石になると電磁力が大きくなることなどのため、超電導電磁石においては磁界発生空間における磁界分布のほかに、超電導線の巻線部の磁界分布を正確に知る必要がある。

超電導電磁石は空心円筒形多層ソレノイド（以下、簡単にソレノイドと呼ぶ）形の巻線形状が最も多く用いられているが、このようなソレノイドの磁界分布を電子計算機によって計算する方法について述べる。

ソレノイドによる磁界分布を求める方法として、計算式が複雑であるため、大別して次のような二方法がとられてきた。あらかじめ電子計算機により定数を計算して数表を作成し、それら数表の組合せにより観測点の磁界強度を算出する方法と⁽¹⁾⁽²⁾、プログラムを作成し直接電子計算機により磁界の値を計算する方法がある⁽³⁾⁽⁴⁾。

前者は数表のみにより磁界分布を算出することができる利点があるが、一点の磁界強度を計算するのにかなりの手間がかかるため、多数の点の磁界の値を計算

するにはかなりの時間がかかり、あまり有効ではない。また数表として与えられているため、数表にない点の磁界強度を計算するのに精度が悪くなるなどの欠点がある。

これに対して、後者は常に電子計算機を使用しなければならないという欠点があるが、多数の点の磁界強度を計算するのに計算時間が速く、任意の点の値を精度良く計算できる利点がある。

最近では、電子計算機の使用が手軽になってきたため、後者による計算法が便利であると考えられる。しかし、次章で述べるようにソレノイドの磁界分布を計算する場合、従来の計算法では被積分関数が特異点を有する積分を実行する必要があるため、被積分関数の特異点（以下、単に特異点と呼ぶ）近傍については、くり抜き法により特異点近傍の値を零として取扱ってきた。このため、特異点での磁界強度を精度良く求めるにはかなりの手間がかかる。しかも、これらの特異点は巻線部の磁界の値を計算する場合に生ずるため、超電導電磁石の運転条件を正確に知るのが非常に重要な問題になる。本論文では、被積分関数が特異点を有する場合に、あらかじめ被積分関数の変形を行ない、全く特異点を含まない関数にした後に電子計算機により計算する方法について述べる。ここで述べる方法によると、任意の点の磁界強度が容易に求められ、全体的に計算時間を短縮でき、磁界強度の計算の精度の向上が容易になるなどの利点がある。

2. 磁界計算式

ソレノイドの軸対称性を考慮すると、任意の点の磁界強度を表わすためには、第1図に示すような $x-y$

Calculation of Magnetic Field Distribution of Solenoid Coil by Computer. By Katsuyuki Kaiho, Member, Takeshi Ohara, Member, Ken-ichi, Koyama, Member (Electrotechnical Laboratory, Ministry of International Trade and Industry) & Takaharu Nanba, Non-member (Musashi Institute of Technology).

海保勝之：正員，電子技術総合研究所
小原健司：正員，電子技術総合研究所
小山健一：正員，電子技術総合研究所
南波孝治：非会員，武蔵工業大学

第 1 図 ソレノイドの座標

Fig. 1. Coordinates of a multi-layer cylindrical solenoid.

座標を選べばよい。第 1 図において、ソレノイドの中心軸は y 軸上にあり、その内半径および外半径の大きさを A_1, A_2 として、軸方向の上端と下端の y 座標をそれぞれ $B_1, -B_1$ とする。

電流はソレノイド断面内に一様に流れているとし、その平均電流密度を J とすれば、任意の点 (x, y) における x 方向の磁界成分 H_x , y 方向の磁界成分 H_y は次式のように表わされる⁽³⁾⁽⁵⁾。

(1) y 軸上

$$H_x = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$H_y = H_{ay}(A, B) \left| \begin{matrix} A_2 & B_1 \\ A_1 & -B_1 \end{matrix} \right| \quad \dots\dots\dots (2)$$

但し、 μ_0 を真空の透磁率として

$$H_{ay} = \frac{\pi}{5\mu_0} \times 10^{-3} J (B-y) \times \ln(\sqrt{A^2 + (B-y)^2} + A) \quad \dots\dots\dots (3)$$

である。

ここで、(2) 式の表示法は次式の関係を意味する。

$$H_y = H_{ay}(A_2, B_1) - H_{ay}(A_2, -B_1) - H_{ay}(A_1, B_1) + H_{ay}(A_1, -B_1) \quad \dots\dots\dots (4)$$

以下、同様の表示法により示すことにする。

(2) y 軸上以外

$$H_x = \{H_{x1}(A, B) + H_{x2}(A, B)\} \left| \begin{matrix} A_2 & B_1 \\ A_1 & -B_1 \end{matrix} \right| \quad \dots\dots\dots (5)$$

$$H_y = \{H_{y1}(A, B) + H_{y2}(A, B) + H_{y3}(A, B)\} \left| \begin{matrix} A_2 & B_1 \\ A_1 & -B_1 \end{matrix} \right| \quad \dots\dots\dots (6)$$

ここで、 $H_{x1}, H_{x2}, H_{y1}, H_{y2}, H_{y3}$ は次式のような。

$$H_{x1} = K \int_0^{2\pi} R \cos \theta \cdot d\theta \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$H_{x2} = K \int_0^{2\pi} x \cos^2 \theta \ln(R + A - x \cos \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$H_{y1} = K \int_0^{2\pi} (B-y) \ln(R + A - x \cos \theta) d\theta \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$H_{y2} = \frac{K}{2} \int_0^{2\pi} \frac{B-y}{|B-y|} x \times \cos \theta \ln \left(\frac{R - |B-y|}{R + |B-y|} \right) d\theta \quad \dots\dots (10)$$

$$H_{y3} = -K \int_0^{2\pi} x \sin \theta \times \tan^{-1} \left\{ \frac{(A - x \cos \theta)(B-y)}{R x \sin \theta} \right\} d\theta \quad \dots\dots\dots (11)$$

以上の式において、定数 K および変数 R は次式を表わす。

$$K = \frac{10^{-3}}{\mu_0} J \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$R = \sqrt{A^2 - 2Ax \cos \theta + x^2 + (B-y)^2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

(1)~(13) 式により特異点を除けば、容易に電子計算機により磁界分布が計算できることはすでに示されている⁽³⁾。しかし、被積分関数が特異点を含む場合については、このままでは電子計算機による数値積分が実行しにくい。あらかじめ被積分関数が特異点を含む場合には関数の変形を行ない、特異点がない関数にしたのち積分を実行する。

中心軸上の磁界分布を与える (1), (2) 式には積分は含まれていず、数値を代入し計算するだけでよい。これに対して、中心軸上以外の点の磁界分布を与える (5), (6) 式には特異点を含む積分が含まれているため、以下に述べるように特異点を除く工夫をする。計算式が多くて複雑であるから、各項別に検討を進める。また対称性を考慮し、 $x \geq 0, y \geq 0$ の領域についてのみ検討を進める。

(a) H_{x1} について H_{x1} を与える (7) 式においては特異点はない。従って、任意の点について、このままで数値積分が実行できる。

(b) H_{x2} について (8) 式において、対数関数の真数が零となる場合は被積分関数が発散する。従って、観測点 (x, y) に依存して被積分関数が発散する可能性がある。

被積分関数が発散する条件は

$$R + A - x \cos \theta = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

である。(13) 式を使って (14) 式を変形すると次式を得る。

$$x^2(1-\cos^2\theta)+(B-y)^2=0 \dots\dots\dots (15)$$

但し,

$$x>0 \dots\dots\dots (16)$$

$$A-x\cos\theta\leq 0 \dots\dots\dots (17)$$

である。従って、特異点となる条件は

$$\cos\theta=1 \dots\dots\dots (18)$$

$$y=B \dots\dots\dots (19)$$

$$x\geq A \dots\dots\dots (20)$$

である。このとき(8)式は次のように変形することができる。

(i) $x=A$ のとき (8)式に $A=x, B=y$ を代入して計算すると,

$$\begin{aligned} H_{x2}(A, B) &= K \int_0^{2\pi} x \cos^2 \theta \\ &\quad \times \ln x (\sqrt{2(1-\cos\theta)} + 1 - \cos\theta) d\theta \\ &= Kx \left\{ \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \ln x d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \frac{1}{2} \cos^2 \theta \ln(1-\cos\theta) d\theta \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \ln(\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\theta}) d\theta \right\} \\ &= Kx \left\{ \pi \ln x - \frac{\pi}{4} (1+2\ln 2) \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \ln(\sqrt{2} + \sqrt{1-\cos\theta}) d\theta \right\} \\ &= Kx \{0.5821470 + \pi \ln x\} \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

但し、(21)式の計算においては次の公式を使った。

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 \theta \ln(1-\cos\theta) d\theta = -\frac{\pi}{2} (1+2\ln 2)$$

(21)式の計算には特異点は含まれていず、数値計算は容易である。

(ii) $x>A$ のとき (8)式に $B=y$ を代入して計算する。 $\cos\theta$ の周期性を考慮すれば、 $0\sim\pi$ の積分値を2倍すればよいから

$$\begin{aligned} H_{x2}(A, B) &= 2Kx \\ &\quad \times \left\{ \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln \frac{x^2(1-\cos^2\theta)}{R-A+x\cos\theta} d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \ln(R+A-x\cos\theta) d\theta \right\} \\ &= 2Kx \left\{ \frac{\pi}{2} \ln x + 2 \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln \sin \theta d\theta \right. \\ &\quad - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln(R-A+x\cos\theta) d\theta \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \ln(R+A-x\cos\theta) d\theta \right\} \\ &= 2Kx \left\{ -1.8741908 + \frac{\pi}{2} \ln x \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\quad \left. - \int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln(R-A+x\cos\theta) d\theta \right. \\ &\quad \left. + \int_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 \theta \ln(R+A-x\cos\theta) d\theta \right\} \\ &\quad \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

但し、(22)式の計算においては次の公式を使った。

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2 \theta \ln \sin \theta d\theta = -\frac{\pi}{8} (1+2\ln 2)$$

(22)式には特異点は含まれていない。また、(22)式において R に含まれている B の値を y とすることはいうまでもない。これ以後の式においても、これに準ずる。

(c) H_{y1} について この場合には特異点はないが、次のような場合分けができる。

(i) $y\neq B_1$ のとき：特異点がないから数値積分はこのまま実行できる。

(ii) $y=B_1$ のとき： $H_{y1}(A_1, -B_1)$, $H_{y1}(A_2, -B_1)$ の数値積分はこのまま実行できるが、 $H_{y1}(A_1, B_1)$, $H_{y1}(A_1, B_1)$ は恒等的に零となるから数値積分を実行する必要がない〔(付1)式参照〕。

(d) H_{y2} について (10)式において $y=B$ の場合には被積分関数は零となるから、 $y\neq B$ の場合のみにについて考える〔(付2)式参照〕。

被積分関数が発散する可能性があるのは、対数関数の真数が零となるときである。従って、被積分関数が発散する条件は次式のようにになる。

$$R-|B-y|=0 \dots\dots\dots (23)$$

(13)式を使って(23)式を変形すると次式を得る。

$$A^2-2Ax\cos\theta+x^2=0 \dots\dots\dots (24)$$

従って、特異点となる条件は

$$\cos\theta=1 \dots\dots\dots (25)$$

$$x=A \dots\dots\dots (26)$$

である。このとき、(10)式は次のように変形することができる。(10)式に $A=x$ を代入して計算すると

$$\begin{aligned} H_{y2}(A, B) &= \frac{K}{2} \frac{B-y}{|B-y|} \int_0^{2\pi} x \cos \theta \ln \frac{2x^2(1-\cos\theta)}{(R+|B-y|)^2} d\theta \\ &= \frac{K}{2} \frac{B-y}{|B-y|} x \left\{ \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln 2x^2 d\theta \right. \\ &\quad + \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln(1-\cos\theta) d\theta \\ &\quad \left. - \int_0^{2\pi} 2 \cos \theta \ln(R+|B-y|) d\theta \right\} \\ &= -K \frac{B-y}{|B-y|} \end{aligned}$$

$$\times x \left\{ \pi + \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln(R + |B - y|) d\theta \right\} \quad \dots\dots\dots (27)$$

となる。但し、(27)式の計算においては次の公式を使った。

$$\int_0^{2\pi} \cos \theta \ln(1 - \cos \theta) d\theta = -2\pi$$

(27)式において、 $B \neq y$ 、 $R > 0$ であるから、被積分関数に特異点は含まれていない。

(e) H_{y3} について この場合には特異点はないが、電子計算機で計算をする場合に、 $Rx \sin \theta$ が零になる場合については、あらかじめ $\tan^{-1}$ の値を $\pi/2$ としてプログラムを作る必要がある。

3. 磁界計算用基礎式と適用条件のまとめ

前章で述べた磁界計算式を電子計算機により数値積分すればよい訳であるが、計算式の場合分けが多くて

第 1 表 磁界の計算式の場合分け

Table 1. Combination of equation for magnetic field calculation according to the measured point.

(a)

y の範囲	$y=B_1$					$y \neq B_1$
x の範囲	$x < A_1$	$x = A_1$	$A_1 < x < A_2$	$x = A_2$	$x > A_2$	任 意
記 号		m_1	m_2	m_3	m_4	
$H_{x2}(A_1, B_1)$	(8)	(21)	(22)	(22)	(22)	(8)
$H_{x2}(A_2, B_1)$	(8)	(8)	(8)	(21)	(22)	(8)
$H_{x2}(A_1, -B_1)$	(8)	(8)	(8)	(8)	(8)	(8)
$H_{x2}(A_2, -B_1)$	(8)	(8)	(8)	(8)	(8)	(8)

注: H_{x1} はすべて(7)式が適用される。

(b)

y の範囲	$y=B_1$	$y \neq B_1$
x の範囲	任 意	任 意
記 号	n_1	
$H_{y1}(A_1, B_1)$	零	(9)
$H_{y1}(A_2, B_1)$	零	(9)
$H_{y1}(A_1, -B_1)$	(9)	(9)
$H_{y1}(A_2, -B_1)$	(9)	(9)
$H_{y3}(A_1, B_1)$	零	(11)
$H_{y3}(A_2, B_1)$	零	(11)
$H_{y3}(A_1, -B_1)$	(11)	(11)
$H_{y3}(A_2, -B_1)$	(11)	(11)

(c)

y の範囲	$y=B_1$			$y \neq B_1$		
x の範囲	$x=A_1$	$x=A_2$	$x \neq A_1, A_2$	$x=A_1$	$x=A_2$	$x \neq A_1, A_2$
記 号	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	
$H_{y2}(A_1, B_1)$	零	零	零	(27)	(10)	(10)
$H_{y2}(A_2, B_1)$	零	零	零	(10)	(27)	(10)
$H_{y2}(A_1, -B_1)$	(27)	(10)	(10)	(27)	(10)	(10)
$H_{y2}(A_2, -B_1)$	(10)	(27)	(10)	(10)	(27)	(10)

複雑と思われるのでまとめてみる。

中心軸上の磁界分布を計算する場合には、すべての点で(1),(2)式が適用できる。

これに対して、中心軸上以外の点における磁界分布の計算式は(5),(6)式が適用できるわけであるが、 H_{xi} , H_{yi} などの計算式は (x, y) の座標により異なる。これらをまとめると第1表のようになる。

第1表(a)は磁界の x 方向成分を求める計算式の番号を示している。

第1表(b),(c)は磁界の y 方向成分を求める計算式の番号を示している。また、各式に含まれる A, B の値として、第1表に表わされている $A_1, A_2, B_1, -B_1$ などを代入して計算することはいうまでもない。

第2図は、第1表に示されている各場合分けとソレノイドの磁界観測点との対応を示したものである。座標のとり方は第1図と同じで、ソレノイド中心軸を y 軸にし、ソレノイド中央部を x 軸にしてある。また図は対称性を考慮し、第一象限のみを示している。第2図(a)は磁界の x 方向成分を計算する場合を示しており、第2図(b)は y 方向成分を計算する場合を示している。

第2図において、 m_i, n_i などの符号は第1表に示されている場合分けを示しているが、 m_2, m_4, n_4, n_5, n_6

第 2 図 磁界計算式と観測点との対応

Fig. 2. The relation between the equation of magnetic field distribution and the measured point.

など、直線により示されている場合については○印部は除き、●印部は含むことを意味している。第2図に示されている各領域は、(5)、(6)式を(7)～(11)式によりそのまま計算すると、特異点が現われる場合になる。

4. 数値計算例

以上に述べた計算式により磁界計算プログラムを作成し、計算した結果について述べる。

計算結果を比較するため、岩本氏が計算したソレノイドと同一形状を選び、その磁界分布を調べる⁽¹⁾。ソレノイドの内径は2.5cm、外径は5cm、長さは6cmで、その平均電流密度は10,000 A/cm²とする。

第3図はソレノイドによる磁界分布をベクトルで方向と大きさを示したものである。破線は岩本氏が数表により算出した結果を示している。全体的に両者は良い一致を示していると言える。

第3図 円筒形多層ソレノイドの磁界分布計算例

Fig. 3. Example of the magnetic field distribution of a multi-layer cylindrical solenoid calculated by our method.

第4図 円筒形多層ソレノイドの $y=0$ 上の軸方向磁界の計算例

Fig. 4. Example of the magnetic field distribution in the middle plane of a multi-layer cylindrical solenoid.

第4図は $y=0$ 、つまりソレノイドの中央部での y 方向の磁界分布を示している。ここで、中心 ($x=0$)、ソレノイド内側表面 ($x=2.5$)、ソレノイド外側表面 ($x=5.0$) での磁束密度 ($\mu_0 H_y$) の値はそれぞれ1.9804 Wb/m²、2.2139 Wb/m²、 -0.44038 Wb/m² となり、 $x=5.0$ での値は計算されていないため比較できないが、 $x=0$ 、 $x=2.5$ での値は岩本氏の計算結果と一致した。

なお、数値積分は次数12のガウス積分法により5けたの精度をもたせ実行したが、第3図に示す96点の磁界の値を計算するのに、電子技術総合研究所の電子計算機 (FACOM 230-75 MV) で8.8秒を要した。

5. むすび

電子計算機を使って、空心多層円筒形ソレノイドの任意の点の磁界強度を計算するための簡単で精度の良い方法を示した。

ここで述べた方法は、磁界計算をするための基礎式の特異点を含まない一次の定積分に変形したことに特徴がある。このため、従来、磁界計算上、非常に手間がかかった特異点の処理上の手続きが省け、かつ特異点での磁界強度の精度も容易に上げて計算することができるようになった。

今後、超電導電磁石が大形化するにつれて、巻線部に加わる電磁力を詳細に検討する必要があると予想されるが、そのような場合、ここで述べた方法による計算が非常に便利となるであろう。

なお、製作した磁界計算プログラムは別の機会に報告する予定である⁽⁶⁾。(昭和51年9月13日受付)

文 献

- (1) 岩本：電学誌 85, 1550 (昭40-9)
- (2) 黒河・家安：同上 89, 2123 (昭44-11)
- (3) 伊原，他：電気試験所彙報 31, 5, 653 (昭42-5)
- (4) 島本：低温工学 5, 6, 295 (昭45-12)
- (5) T. F. Yang, et al : Proc. Fifth International Conference on Magnet Technology p. 203 (1975-4)
- (6) 南波，他：電子技術総合研究所彙報に投稿

付 録

[I] $y=B$ の場合の H_{y1} の値について

(9)式において被積分関数を f_{y1} とおく。

$$f_{y1} = (B-y) \ln(R+A-x \cos \theta) \dots (付1)$$

f_{y1} は $y=B$ の場合には対数関数 ∞ の場合に零となる。対数関数が無限大となるのは真数が零のとき、すなわち第2章(b)項で述べたと同様に $\cos\theta=1$, $x \geq A$ のときであり、このときの値は次のようになる。

(1) $x=A$ のとき

$$\lim_{y \rightarrow B} f_{y1} = \lim_{y \rightarrow B} (B-y) \ln |B-y| = 0 \dots (\text{付2})$$

(2) $x > A$ のとき

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow B} f_{y1} &= \lim_{y \rightarrow B} (B-y) \ln \frac{(B-y)^2}{R-A+x} \\ &= \lim_{y \rightarrow B} \{2(B-y) \ln |B-y| \\ &\quad - (B-y) \ln (R-A+x)\} = 0 \\ &\dots\dots\dots (\text{付3}) \end{aligned}$$

従って、 H_{y1} の被積分関数 f_{y1} の値は $y=B$ の場

合は恒等的に零となる。

(II) $y=B$ の場合の H_{y2} の値について

(2)式において被積分関数を f_{y2} とおく。

$$f_{y2} = \frac{B-y}{|B-y|} x \cos \theta \ln \left(\frac{R-|B-y|}{R+|B-y|} \right) \dots\dots\dots (\text{付4})$$

(付4)式において、 $y \rightarrow B$ の極限では f_{y2} は次式のようになる。

$$\lim_{y \rightarrow B} f_{y2} = \lim_{y \rightarrow B} \frac{B-y}{|B-y|} x \cos \theta \ln 1 = 0 \dots\dots\dots (\text{付5})$$

従って、 H_{y2} の被積分関数 f_{y2} の値は $y=B$ の場合は恒等的に零となる。