導電性シェルがない非円形断面トカマク プラズマの垂直方向の安定性に対する有 限導電率の効果

正 員 桜 井 桂 一 (名 大)

正 員 田 中 裕 二 (原 研)

正 員 奥 田 孝 美 (名 大)

1. ま え が き

近年、トカマク装置を核融合炉として実用化するために工学的改良が検討され、種々の試みがなされている。例えば、プラズマの平衡を維持するために従来から用いられてきた導電性のシェルを取り除き、その代わりにプラズマの閉じ込め容器に装着した外部導体にプラズマの変動に応じた電流を流して磁界を制御し、平衡を維持すること⁽¹⁾、プラズマの断面形を非円形にすることによって平衡プラズマを高ベータ化し、効率的な閉じ込めを行なおうとすること⁽²⁾などである。更に、平衡プラズマに電磁流体力学的に高い安定性を与える立場から、平衡配位の磁気シアを高くし、磁気井戸を深くすることが考えられ、断面の形状をD形あるいは涙滴形にすることが考えられた⁽³⁾。名古屋大学工学部においても、導電性シェルなしで軸対称の外部磁界を付加することによって、非円形断面のトカマクプラズマを保持する装置 (HYBTOK-I) を製作し、四角形断面の平衡などについて実験を行なっている⁽⁴⁾。

これらの実験ではプラズマの断面形を従来の円形か

ら非円形にしており、この非円形の平衡プラズマが安定かどうか改めて検討する必要がある。

そこで、まず第一に必要な条件は位置安定性であり、平衡プラズマが水平および垂直方向の変位に対して復元力を生じなければならない。これは外部垂直磁界 (B_z) の曲率と密接な関係があって、安定であるためにはインデックスパラメータ ($n = -(r/B_z)(\partial B_z / \partial r)$) が $0 < n \leq 3/2$ の範囲にあれば十分である⁽⁵⁾。円形断面の場合には垂直磁界の適切な空間分布によって、この条件を満たしているが、非円形断面では必ずしも満たしてはいない。ここでは有限な導電率を持ったプラズマ柱の垂直方向の安定性について調べることにする。

プラズマの導電率が無限大の場合の垂直方向の安定性については、岡林氏らによって⁽⁶⁾⁽⁷⁾、プラズマ柱が変位する際に磁束が保存されることを用いて既に検討されている。そして、磁束を保存するために流れる誘導電流によって、垂直方向の安定性が改善されることが指摘されている。しかしながら、現実のプラズマは有限の導電率を持っており、更にプラズマ柱の電子温度の分布が放物形であることを考えると、プラズマ柱の表面近くは特に抵抗性を持つとすべきである。この論文では、プラズマに有限な導電率を仮定してその効果を検討した。

プラズマ柱の導電率を無限大と仮定した場合には、安定性を評価するために磁束の保存則を用いることができるが、有限の導電率の場合には適用できない。そこで、プラズマ柱を多数の円形導体におきかえて導電率を導入する回路モデルを考える。ここでは具体的な

Effect of Finite Conductivity on the Vertical Stability of a Tokamak Plasma Column with a Noncircular Cross Section without Conducting Shell. By Keiichi Sakurai, Member, (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University), Yuji Tanaka, Member, (Thermodynamic Fusion Laboratory, Japan Atomic Energy Research Institute) & Takayoshi Okuda, Member (Department of Electrical Engineering, Faculty of Engineering, Nagoya University).

桜井桂一: 正員, 名古屋大学大学院工学研究科博士課程
田中裕二: 正員, 日本原子力研究所東海研究所核融合研究室
奥田孝美: 正員, 名古屋大学工学部電気工学第二学科

例として、HYBTOK-I 装置で得られる四角形断面のプラズマ、および、このプラズマ柱が内側の方へ水平に変位した場合に生じる D 形断面のプラズマについて検討する。とりわけ後者のプラズマ柱では、プラズマ柱の断面上で平均したインデックスパラメータが負になっており、有限な導電率の場合に、もし誘導電流による安定化の効果が期待できない場合には垂直方向に不安定となるので、プラズマ柱の位置制御に重大な問題を生じることになる。

2. 計算方法

表面での導電率が有限のプラズマ柱では、磁界のしみ込みが起きるため、安定性を調べるための仮想変位と磁束の保存則を組合せることができない。そこで、プラズマ柱を分割し、相互インダクタンスで結合された多数の円形導体とみなして、その各々に自己インダクタンス、抵抗および導体が磁界を横切って運動するときに生じる誘導起電力（電界 $\mathbf{E} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ ）を考える（第 1 図参照）。このとき簡単のために、プラズマ柱は微小変位をする間では断面の形、すなわち円形導体の相互の距離が変わらないものとし、更に外部磁界は導電性のシェルがないために変化しないと仮定すれば、プラズマ柱に垂直方向の外力（ F_e ）が加えられたとき、このプラズマ柱に関する運動方程式は次のように書くことができる。 x はプラズマ柱の垂直方向の変位である。

$$M \frac{d^2 x}{dt^2} = F_e + F_0 + F_1 \dots \dots \dots (1)$$

$$\begin{pmatrix} L_1 & M_{12} \dots M_{1N} \\ M_{21} & L_2 \dots M_{2N} \\ \vdots & \vdots \vdots \vdots \\ M_{N1} & M_{N2} \dots L_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d I_1^{(1)}}{dt} \\ \frac{d I_2^{(1)}}{dt} \\ \vdots \\ \frac{d I_N^{(1)}}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -r_1 I_1^{(1)} + V_1 \\ \vdots \\ -r_N I_N^{(1)} + V_N \end{pmatrix} \dots \dots \dots (2)$$

L_i : 自己インダクタンス、 M_{ij} : 相互インダクタンス、 r_i : 抵抗、 V_i : 誘導起電力、 $I_i^{(1)}$: 誘導電流、 F_e : 外力、 B : 外部磁界、 I_p : プラズマ電流

第 1 図 回路モデルの模式図

Fig. 1. Schematic drawing of current filaments model.

$$V_i = 2\pi \frac{dx}{dt} B_i(x) R_i \dots \dots \dots (3)$$

$$F_0 = -2\pi \sum_{i=1}^N R_i I_i^{(0)} B_i(x) \dots \dots \dots (4)$$

$$F_1 = -2\pi \sum_{i=1}^N R_i I_i^{(1)} B_i(x) \dots \dots \dots (5)$$

$$L_i = \mu_0 R_i (\ln(8 R_i / R_s) - 2)$$

$$M_{ij} = \frac{2\mu_0}{k_{ij}} \sqrt{R_i R_j} \left\{ \left(1 - \frac{k_{ij}^2}{2} \right) K(k_{ij}) - E(k_{ij}) \right\}$$

$$k_{ij}^2 = \frac{4 R_i R_j}{(R_i + R_j)^2 + (Z_i - Z_j)^2}$$

ここで、 $K(k_{ij})$ および $E(k_{ij})$ はそれぞれ第 1 種および第 2 種の完全な円積分である。 $B_i(x)$ は i 番目のプラズマ導体のところに作られる外部磁界の水平方向成分、 $I_i^{(0)}$ はプラズマ柱が平衡にあるときプラズマ柱に流れているプラズマ電流であって、一定であると仮定する。従って、 F_0 はプラズマ電流と外部磁界の曲率によって生じる力であり、インデックスパラメータ n が正で垂直方向の変位に対して安定という条件は、 F_0 が負であることに対応する。 V_i は先に述べた誘導起電力である。この起電力によってプラズマ柱に $I_i^{(1)}$ の電流が誘起され、プラズマ柱が磁界を横切って動くのを妨げる力 F_1 を生じる。そのために、この力は常に負であり復元力となる。 N はプラズマ柱を分割した導体数、 M はプラズマの全質量、 L_i は分割された各導体の自己インダクタンス、 M_{ij} は導体間の相互インダクタンス、 r_i は各導体の抵抗、 R_i は各導体の大半径、 R_s は幾何学的平均距離である⁽⁸⁾。

例として、プラズマ柱の大半径 50 cm、小半径約 10 cm、プラズマの密度を $6 \times 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ として水素プラズマを仮定すると、プラズマの質量 M は約 10^{-8} kg になる。更にプラズマ電流を 30 kA、 N を約 50 として次章の計算を行なった。また、計算にあたってはインダクタンス行列が近似式のために回路のエネルギーが発散するので、計算の精度は多少悪くなるが、 R_s の値を 20% 減じて数値計算を確実にした。

3. 計算結果

上記の計算方法を適用する平衡配位として、断面の形状が第 2 図に示すような (a) 円形、(b) 四角形、(c) D 形の場合を考える。細線は外部磁界の磁力線である。これらは実際に平衡プラズマを実現する観点から次のような特徴を持っている。すなわち、(a) は金属リミッタで境界される通常の円形トカマク、(b) は磁

第2図 平衡プラズマの断面形と外部磁界

Fig. 2. Cross sections of equilibrium plasmas and external magnetic fields.

気中性点で境界が形成され、しかも位置安定性が良いと考えられるもの、(c)は縦長にした場合に位置安定性が問題になると考えられるものである。ここで、(b)と(c)は実際に HYBTOK-I 装置において得られる配位であり⁽⁹⁾、〈3・2〉節においてこれらの配位の垂直方向の安定性について議論する。なお、以下の計算においてプラズマ電流は一様分布を仮定しているが、平衡配位の計算には近似解法を用いているので、図中の a, b を用いた a/b の値には 10% 程度の誤差が生じる。

〈3・1〉 導電率が無限大の場合 (1)~(5)式の系で抵抗 r_i を零として計算すればよく、大きさ 10N の外力を $t=0$ でステップ状に加えて計算した結果を第1表に示した。このときの最大変位の大きさはプラ

第1表 導電率が無限大の場合の計算結果
Table 1. Numerical results in the case of infinite conductivity.

	断 面 形			
	円形(0.97) 第2図(a)	四角形(1.05) 第2図(b)	D形(1.15) 第2図(c)	D形(1.35) 第2図(c)
F_0	—	—	+	+
F_0+F_1	—	—	—	+
F_1/F_0	0.188	2.70	-3.25	-0.64
安定性	安 定	安 定	準安定	不安定

断面形 () 中は a/b の値を示す。

ズマ柱の小半径の約 10% で 1cm 程度である。また外力を 1N にしても F_1/F_0 は同じ結果を得ることができ、少なくとも 10% 程度の変位に対しては、変位に対する力の関係は線形性をもっている。そこで、以下の計算では外力の大きさをすべて 10N とした。

第1表に示した安定性については、(1)安定: F_0 , F_1 ともに復元力となる場合、(2)準安定: F_0 の復元力が F_0 の発散力より大きい場合、(3)不安定: F_0 の発散力が F_1 の復元力より大きい場合を示している。導電率が無限大の場合には、いずれも (F_0+F_1) が負になれば安定である。しかし、次節で示すように、有限な導電率の場合には F_1 が時間の経過と共に減少するので、(2)の場合には必ずしも安定とは限らないため準安定として区別した。

プラズマ柱が外力に対して復元力を生じ、垂直方向に安定である場合には、第3図(a)に示すように変位は振動解になる。逆に、不安定な場合には(b)に示すような発散解となって、およそ数 μs でプラズマ柱は発散する。

第1表の断面形の括弧内には参考までに a/b の値を示したが、岡林氏らの論文⁽⁶⁾からこの値に対応して円形と四角形の場合について F_1/F_0 を求めると、それぞれ約 0.13 と約 2.0 になり、表に得られた数値はそれらに近い。四角形の場合には形状に差があって単純には比較できないが、 F_1/F_0 が円形では小さく、四角形では大きいという傾向はよく一致している。また平衡解が近似解のために a/b が誤差を含むことを考慮すると、数値的にも良い一致を示すと言える。

(a) 安定および準安定の場合 (例) 四角形
(b) 不安定の場合 (例) D形 ($a/b=1.35$)

第3図 時間 t とプラズマ柱の垂直方向変位 x の関係Fig. 3. Vertical displacement of a plasma column x as a function of time t .

導電率が無限大のプラズマ柱では、第6図(a)に示すように誘導電流はプラズマ柱の表面に流れ、その分布は時間的に一定である。また、 F_1/F_0 の値も一定で時間的に変化しないことが計算される。

〈3・2〉導電率が有限の場合 前節の結果はプラズマの導電率を無限大とした場合であり、現実のプラズマは有限な導電率を持っているので、その影響を調べる必要がある。ここでは、どの程度の時間内ならば誘導電流 $I_i^{(1)}$ による安定化が期待できるのかについて、四角形とD形（準安定）断面のプラズマ柱を用いて検討する。

導電率が無限大の場合には、平衡配位は時間的に変化することなく定常的に実現できるが、導電率が有限の場合には、プラズマ粒子の磁力線への凍結が緩和されて圧力分布が変化したり、抵抗による電流の減衰のためにプラズマ電流が変化し、平衡配位は時間的に変化すると考えられる。しかし、変化しながらも放電の各時刻においては平衡状態が達成されていると考えられるので、前節と同様に時刻 $t=0$ においては第2図に示した平衡配位を仮定することができる。その後、プラズマ電流の分布 $I_i^{(0)}$ は変化するので、それに伴ってプラズマ柱の断面形は変化すると考えなければならない。しかしながら、トカマク装置では外部から電界を加えることによって、プラズマ電流をある程度一定に保っているため、簡単のために $I_i^{(0)}$ の分布およびプラズマの断面形は一定になるようにプラズマのパラメータが調節されていると仮定する。

また、以下の議論では導電率の分布を放物的であると仮定するので、特にプラズマ柱の表面に抵抗性の領域ができることになる。すると、前節で示したように誘導電流 $I_i^{(1)}$ はプラズマ柱の表面に局在して流れる電流であるため、この抵抗性の影響を強く受け、その結果、 F_1 を大きく変化させると予想される。しかし、プラズマ電流 $I_i^{(0)}$ はプラズマ柱に様に分布しているため、たとえプラズマ柱の表面領域において変化があったとしても、プラズマ柱全体としてはほとんど変化せず、 F_0 に大きな変化はないと考えられる。従って、導電率の分布を放物的であると仮定した場合に、 $I_i^{(0)}$ を不変とみなしても、 F_1/F_0 についての以下の議論に不都合は生じないと考えられる。そして、我々はプラズマ柱の表面領域に局在する誘導電流 $I_i^{(1)}$ の変化に着目する。

最後に、プラズマの導電率の分布は電子温度の分布に関係し、更に電子温度の分布は平衡配位のプラズマの圧力分布に関係している。そのために平衡配位は導電率の分布に無関係ではない。従って、厳密には導電

率によってプラズマ電流 $I_i^{(0)}$ は変化するが、ここでは $I_i^{(0)}$ の変化を調べるのが目的ではないので、導電率の分布は平衡配位とは独立に与えることにする。

具体的な数値計算を行なうために、まず導電率の分布（抵抗 r_i の分布）を決める。ここでは放物的であると仮定し、プラズマ柱の全抵抗を四角形とD形について、それぞれ $0.1\text{ m}\Omega$ と $0.15\text{ m}\Omega$ とした。両者の違いはプラズマ柱の断面積の違いによるもので、いずれもプラズマの平均導電率は約 $7.5 \times 10^5 \text{ }\Omega/\text{m}$ 、実効的なプラズマイオンの電荷数を1とすると平均電子温度は約 80 eV である。このような導電率を仮定するとき、プラズマ柱に捕捉される磁界の特性時間は約 4.5 ms ($t_c = \mu_0 \sigma a_p^2 / 2$, プラズマ柱の小半径 $a_p \approx 0.1\text{ m}$, σ は導電率) であり、これより十分短い間での現象としての安定性は十分議論できると考えられる。例として、四角形の場合の $A-A'$ 上〔第2図(b)参照〕での導電率の分布を第6図(c)に示した。

導電率の分布を用いて(2)式の r_i に抵抗値を入れ、前節と同様に計算した結果を第4図と第5図に示した。四角形とD形断面の場合について、それぞれ(a)図が時間 t と力の比 F_1/F_0 、(b)図が時間と垂直変位 x との関係を示している。ここで、 $t \rightarrow 0$ の極限では

プラズマ抵抗 $0.1\text{ m}\Omega$, プラズマの平均小半径 11.4 cm

第4図 四角形断面の場合の時間 t に対する力の比 F_1/F_0 とプラズマ柱の変位 x の関係

Fig. 4. Ratio F_1/F_0 and displacement of a plasma column x as a function of time t in the case of a rectangular cross section [Fig. 2 (b)].

プラズマ抵抗 $0.15 \text{ m}\Omega$, プラズマの平均小半径 9.3 cm

第 5 図 D形断面の場合の時間 t に対する力の比 F_1/F_0 とプラズマ柱の変位 x の関係

Fig. 5. Ratio F_1/F_0 and displacement of a plasma column x as a function of time t in the case of a D-shape cross section (Fig. 2(c)).

F_1/F_0 の値は導電率が無限大の場合と一致している。いずれの図からもわかるように、 $|F_1/F_0|$ の値が時間の経過と共に減少し、 $80 \mu\text{s}$ 後では導電率が無限大の場合に比べて約半分になっている。これは、一般的には時間が経つにつれて F_1 の復元力が弱くなり、岡林氏らの論文⁽¹⁾によれば許容される a/b の値が小さくなることを示している。

しかしながら、 F_1 は F_0 に比較して大きく、半減したとしてもその安定化の効果は強い。例えば、四角形断面の場合において F_1 が全くないとする、復元力はすべて F_0 によらなければならない。 F_0 の変位に対する復元力は 6.4 N/cm なので、外力 10 N につり合う必要な変位は約 1.5 cm である。従って、 F_1 がないとすると、変位は 1.5 cm を中心にして第 3 図に示したように正弦振動することになり、最大変位は 3 cm になる。しかし、第 4 図の波形では 1 cm にもならず、 F_1 が大きな復元力を生じていることがわかる。

ところで、この四角形断面のプラズマ柱は、たとえ F_1 が減少して零になったとしても、 F_0 が復元力を生じるので安定である。しかし、第 5 図に示した D 形断面のプラズマ柱では、 F_1 が減少して $|F_1/F_0|$ が 1 以

下になるとプラズマ柱は垂直方向に不安定になる。そこで、第 5 図の $|F_1/F_0|$ の曲線が直線的に減少すると仮定して、 $|F_1/F_0|$ が 1 になる時間を求めると約 $150 \sim 200 \mu\text{s}$ となる。すなわち、このプラズマ柱は誘導電流の安定化効果によって、少なくとも $150 \sim 200 \mu\text{s}$ の間は安定であると考えられる。

このことは HYBTOK-I 装置におけるプラズマ柱の位置制御に対して大きな意味を持っている。すなわち、四角形断面プラズマの水平位置の制御が不十分なために水平位置が内側に移動(この例では約 5 cm)し、インデックスパラメータが負の領域に入って D 形断面のプラズマになったとしても、 $150 \sim 200 \mu\text{s}$ の間は垂直方向に安定であり、水平位置を復元するための垂直磁界の制御系が $150 \sim 200 \mu\text{s}$ の時定数で応答すれば垂直方向の安定性は保たれることになる。このプラズマの平均電子温度は 80 eV であるが、更に電子温度が高くなれば、この D 形断面のプラズマ柱はより長い時間、例えば全放電時間にわたって垂直方向に安定になり得ると考えられる。

第 6 図は第 2 図(b)に示した四角形断面の A-A' 上について求めた、(a)導電率が無限大の場合の誘導電流 $I_i^{(1)}$ の分布、(b)導電率が有限の場合(第 4 図)の誘導電流の分布、である。明らかに(a)図は表面電

(a) プラズマの導電率が無限大の場合
(b) プラズマの導電率が有限の場合
(c) (b)図の場合の導電率の分布

第 6 図 誘導電流 $I_i^{(1)}$ の分布

Fig. 6. Distributions of the induced current $I_i^{(1)}$.

流を形成し、(b)図は時間と共に誘導電流が減衰し、電流分布のしみ込みが起きることを示している。このことは、時間と共に誘導電流の分布が更にしみ込むと、誘導電流はプラズマ柱の周辺の水平成分の強い磁場よりむしろ内側の水平成分の弱い磁界[第2図(b)参照]と作用することを示しており、抵抗による誘導電流の減衰と同様に、 F_1 の復元力を減少させると考えられる。また、第6図(c)は(b)図の場合に仮定した導電率の分布を示したもので、括弧の中は導電率に相当した電子温度を示している。(b)図と比較すると、75 μ s後には誘導電流 $I_1^{(1)}$ は、プラズマ柱の周辺の電子温度が15eVの領域から66eVの領域に大部分が移っている。すなわち、プラズマ柱の周辺温度が15eVでは約80 μ s経過すると、もはや誘導電流をプラズマ柱の表面に維持することはできず、 $I_1^{(1)}$ は減衰し、磁界はしみ込み、第4図(a)に示すように $|F_1/F_0|$ の値は約1.4に下がってしまう。このようなプラズマ柱の周辺の電子温度が15eV程度という状況は、現在ある小形の実験装置では十分あり得ることであり、この場合には100 μ s程度の時間で誘導電流はかなり減衰し、磁界がしみ込むと考える必要がある。なお、この磁界のしみ込みの特性時間については、プラズマ柱の表層にプラズマのシェルがあると考えることができる。実際、プラズマ柱の小半径 $a_p=0.1$ m、シェルの厚さ $t=0.02$ m、プラズマの導電率 $\sigma=5.8 \times 10^4$ Ω^{-1} /m とすると約70 μ s($t_s=\mu_0 \sigma a_p t/2$)である。

ところで、以上において計算してきた復元力は、プラズマ柱の表面に誘起される電流 $I_1^{(1)}$ と磁界との相互作用によって生じる力であるから、復元力がプラズマ柱の周辺部分の磁界の性質に強く依存することは容易に推察できる。ここでは取扱わなかったが、このことは同時にプラズマ電流 $I_1^{(0)}$ の分布の変化にも依存することを表わしている。実際、縦長断面のプラズマ柱では、プラズマ電流の分布が一様分布から放物形分布になると、復元力が減少することがわかっている⁽⁶⁾。従って今後においては、プラズマ柱の表面におけるプラズマの導電率の有限性だけでなく、更に断面の形状、

プラズマ電流の分布 $I_1^{(0)}$ の時間変化との関連において、この問題を検討することが必要と思われる。

4. む す び

トカマク形平衡プラズマの安定性の一つである垂直方向の位置安定性について、プラズマの導電率を無限大と仮定した方法とは違って、プラズマ柱を多数の円形導体に置き換えることによって導電率に適当な分布を与えたプラズマ柱の場合にも適用できる方法を示した。

計算の結果、プラズマ柱が磁界を横切るときに生じる起電力によってプラズマ柱に表面電流が流れ、プラズマの導電率が有限の場合には、時間が経過するにつれてこの表面電流が減衰し、その分布はプラズマ柱の内部にしみ込んでいくことがわかった。そのためにプラズマ柱に働く復元力は無限大の導電率を仮定した場合より減少するが、現実のプラズマパラメータから予想される導電率に対して計算した結果、この復元力は数百 μ sの間は垂直方向の安定化に寄与することがわかった。

なお、本論文の数値計算を行なうにあたっては、名古屋大学プラズマ研究所の HITAC 8500 を利用させていただきまして、ここに記して感謝の意を表します。

(昭和51年3月31日受付, 同51年11月11日再受付)

文 献

- (1) J. Hugill & A. Gibson: Nucl. Fusion **14**, 611 (1974)
- (2) T. Ohkawa: in Controlled Fusion and Plasma Phys. (Proc. 6th Europ. Conf. Moscow) 161 (1973)
- (3) H.P. Furth: Nucl. Fusion **15**, 487 (1975)
- (4) 田中, 他: 昭50電気関係学会東海支部連大 **2**, G-22
- (5) V.S. Mukhovatov & V.D. Shafranov: Nucl. Fusion **11**, 605 (1971)
- (6) M. Okabayashi & G. Sheffield: *ibid.* **14**, 263 (1974)
- (7) K. Lackner & A.B. Macmahon: *ibid.* **14**, 575 (1974)
- (8) 副島・堀内: 電磁気学 **231** (昭45) コロナ社
- (9) K. Sakurai, Y. Tanaka & T. Okuda: Plasma Phys. **17**, 261 (1975)