電子エネルギー分布関数の球関数展開における二項展開近似の妥当性について

正員 酒井 洋 輔 (北 大)

准員 北 守 一 隆 (北 大)

正員 田 頭 博 昭 (北 大)

正員 坂 本 三 郎 (大 大)

1. ま え が き

弱電離気体中において、電子エネルギー分布関数 $F(\epsilon)$ (ϵ : 電子エネルギー) は、電子の微視的な衝突素過程を特徴づける衝突断面積と、速度 (またはエネルギー) 空間で定義される電子移動速度・拡散係数ならびに電離係数・電子付着係数などの巨視的パラメータとを関係づける重要な役割を果たしている⁽¹⁾。更に、最近ボルツマン方程式解析によって衝突電離の無視できない高 E/P では、定常タウンゼント法 (以後 SST と略記する) やパルスタウンゼント法 (以後 PT と略記する) といった観測方法の違いによって、 $F(\epsilon)$ の値が異なること、また $F(\epsilon)$ は time of flight 実験 (以後 TOF と略記する) で観測されるなだれの分布の重心の移動速度や広がりなどの輸送係数を位置の関数としても与えることのできる基礎であることが知られている⁽²⁾⁽³⁾。

$F(\epsilon)$ は、多くの場合ボルツマン方程式解析 (以後 BE と略記する) やモンテカルロ・シミュレーション (以後 MS と略記する) などの理論的な方法、ならびに Retarding Potential 法 (平行平板電極の陽極に開けた小さな穴から放電空間の電子をアナライザ領域に

導き、その減速電圧の関数として測定された電流値から $F(\epsilon)$ を決める方法⁽⁴⁾⁻⁽⁷⁾; 以後 RP と略記する) といった実験的方法によって求められてきた。

$F(\epsilon)$ は本来、電子速度が v と $v+dv$ 間にある電子数 $g(v)dv$ ($g(v)$: 電子速度分布関数) をエネルギー空間に書き直したものである。電界中では一般に $g(v)$ が球対称からずれているために、多くの場合これを球関数で展開し、その零次と一次の2項のみをとった BE⁽⁸⁾ (以後 (BE)_{TA} と略記する) や RP の解析⁽⁷⁾ が行なわれてきた (この近似は、欧米では two-term expansion と言われているようである⁽⁹⁾) ので、本論文ではこれを二項展開近似と呼ぶこととする)。しかし、近年、電離や励起などの非弾性衝突が無視できない高 E/P_0 (E : 電界強度, P_0 : 0°C におけるガス圧力) においては $g(v)$ の等方性からのずれが大きくなり、その結果、二項展開近似を BE に適用することに問題が残るという指摘が (BE)_{TA} をもとになされた⁽¹⁰⁾。

筆者らは、本論文において二項展開近似による BE の妥当性の検討を行なうが、そのためにはこの近似によらないで $F_l(\epsilon)$ (電子エネルギー分布関数の球関数展開における l 次の項) を知る必要があると考え、まず基本的にはすべての $F_l(\epsilon)$ が考慮されている MS および二項展開近似をとらない BE (以後 (BE)_{NA} と略記する) を用いてアルゴンガス中における $F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$) を求めた。

MS や (BE)_{NA} は現在のところ (BE)_{TA} に比べて数値計算時間が数百倍程度かかり、多くのガス中の電子輸送係数を求めるうえで計算費用の点から必ずしも実用的ではない。そこで、次に (BE)_{TA} において従来

Validity of the Two-term Spherical Harmonics Expansion for the Electron Energy Distribution Function. By Yousuke Sakai, Member, Kazutaka Kitamori, Associate, Hiroaki Tagashira, Member & Saburo Sakamoto, Member (Faculty of Engineering, Hokkaido University).

酒井洋輔: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

北守一隆: 准員, 北海道大学工学部電気工学科博士後期課程

田頭博昭: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

坂本三郎: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

とられてきた仮定 ((5・1) 節参照) に検討を加え、より仮定の少ない (BE)_{TA} から決定した F_l ($l=0, 1, 2$) と MS や (BE)_{NA} の F_l 、ならびに F_l から決定されることの各種の輸送係数を比較検討した。その結果、Ar ガスでは速度分布がかなり等方からずれていると考えられる $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ においても、十分よい精度で二項展開近似を BE に適用できることを明らかにした。また、拡散係数は F_2 にも依存するようであるが、電離周波数などと同程度の精度でこれを得ることができることを示した。

2. ボルツマン方程式解析

<2・1> ルジャンドル多項式による二項展開近似

(BE)_{TA} 平等電界 $E(\text{V} \cdot \text{cm}^{-1})$ の下では、電子速度分布関数 $g(t, \mathbf{r}, \mathbf{v})$ (t : 時間, $\mathbf{r}$: 位置ベクトル) が速度空間で電界方向を軸として回転対称性をもつことに着目し、これをルジャンドルの多項式 $P_l(\mu)$ で展開する⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾。すなわち、

$$g(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) = \sum_{l=0}^{\infty} p_l(\mu) g_l(t, \mathbf{r}, \mathbf{v}) \dots\dots\dots (1)$$

$$\mu = \cos \theta, \quad v = |\mathbf{v}|$$

ここで、 θ は $\mathbf{E}$ の逆方向 (これを z 方向とする) と $\mathbf{v}$ との成す角である。このとき添字 l について整理されるボルツマン方程式は文献 (10) 中の (14) 式で示される。電子と中性粒子間の各種衝突の際、等方散乱を仮定すれば、この式の右辺第 1 項が 0 ($l=0$) または $-g_l v N Q_m$ ($l \geq 1$) と簡単化され、従来とられてきたこの項を無視するという近似をとらなくてよいことになる。すなわち、 $l=0, 1, 2$ に対して、

$$l=0$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_0}{\partial t} + \frac{v}{3} \frac{\partial}{\partial z} (g_1) + \frac{a}{3} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^2 g_1) \\ &= \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \{ N Q_m(v) v^4 g_0 \} \\ &+ \sum_j \left\{ \frac{v_j''^2}{v} N Q_j(v_j'') g_0(v_j'') \right. \\ &- v N Q_j(v) g_0(v) \} \\ &+ \frac{1}{A} \frac{v_d''^2}{v} N Q_i(v_d'') g_0(v_d'') + \frac{1}{1-A} \frac{v_{1-d}''^2}{v} \\ &\times N Q_i(v_{1-d}'') g_0(v_{1-d}'') - v N Q_i(v) g_0(v) \\ &\dots\dots\dots (2) \end{aligned}$$

$$l=1$$

$$\frac{\partial g_1}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \left(g_0 + \frac{2}{5} g_2 \right)$$

$$\begin{aligned} &+ a \left\{ \frac{\partial g_0}{\partial v} + \frac{2}{5} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} (v^3 g_2) \right\} \\ &= - \frac{2}{3} \frac{m}{M} \frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \{ N Q_m(v) v^4 g_1 \} \\ &- v N Q_T(v) g_1 \dots\dots\dots (3) \end{aligned}$$

$$l=2$$

$$\begin{aligned} & \frac{\partial g_2}{\partial t} + v \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{2}{3} g_1 + \frac{3}{7} g_3 \right) + a \left\{ \frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_1}{v} \right) \right. \\ &+ \left. \frac{3}{7} \frac{1}{v^4} \frac{\partial}{\partial v} (v^4 g_3) \right\} = - v N Q_T(v) g_2 \\ &\dots\dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $A/(1-A)$ は電離衝突後に二つの電子に分配されるエネルギーの分配比であり、 A は (0-1) 間の値を等しい確率でとるものと仮定して計算した。 $Q_m(v)$ は運動量変換断面積、 $Q_j(v)$ は j 番目の単位への励起断面積、 $Q_i(v)$ は電離断面積、 $Q_T(v) = Q_m(v) + \sum_j Q_j(v) + Q_i(v)$ 、 $a = |eE/m|$ 、 e は電子電荷、 m, M はそれぞれ電子と気体分子の質量、 $v_j'' = [v^2 + (2/m) \varepsilon_{exj}]^{1/2}$ 、 $v_d'' = [(v/A)^2 + (2/m) \cdot \varepsilon_i]^{1/2}$ 、 $v_{1-d}'' = [(v/(1-A))^2 + (2/m) \varepsilon_i]^{1/2}$ 、 ε_{exj} 、 ε_i はそれぞれ j 番目の単位への励起および電離エネルギーである。

PT では十分時間がたつと、電子速度分布関数の形は時間に依存せず、 $\partial g_l / \partial t = R_i g_l$ ($l=0, 1, 2$) と書ける⁽¹²⁾。ここに、 R_i は PT における電離周波数である。PT において g_l ($l=0, 1$) を求めるためには、

g_0, g_1 のみを考慮し、 g_2 以下を無視の下に (3) 式を

$$g_1 = - \frac{v \frac{\partial}{\partial z} g_0 + a \frac{\partial}{\partial v} g_0}{R_i + N v Q_T(v)} \dots\dots\dots (5)$$

と簡単化する。ただし、(3) 式の右辺第 1 項は $m/M \ll 1$ なので無視した。

(1) 式と (5) 式から g_0, g_1 が決定される。

更に、 g_2 は (4) 式の g_3 を含む項も無視しているから、

$$g_2 = - \frac{\frac{2}{3} v \frac{\partial}{\partial z} g_1 + \frac{2}{3} a v \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{g_1}{v} \right)}{R_i + N v Q_T(v)} \dots\dots\dots (6)$$

として近似的に与えられる。

SST では、 g_l は時間に依存しないために、(2)~(4) 式中の $\partial g_l / \partial t = 0$ 、またその結果 (5) 式および (6) 式中の $R_i = 0$ としたものとなる。

<2・2> 球関数展開によらない解法 (BE)_{NA} PT モデルに対しては球関数展開を行なわない BE の解法が報告されている⁽¹⁾。解 $g(t, \mathbf{v})$ は次の関係で示される特性曲線上を積分することによって与えられる。

$$g(t+\Delta t, \mathbf{v}) = g(t, \mathbf{v} - \mathbf{a}\Delta t) + R\Delta t \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここに、 R は単位時間あたり衝突によって $(\mathbf{v}, \mathbf{v} + d\mathbf{v})$ 空間に入ってくる電子数である。

(7)式の $\mathbf{v}$ を極座標 (v, θ) で表わせば、方位角 (φ) 方向への対称性を仮定して、

$$g(t+\Delta t, v, \theta) = g(t, v, \theta) + \frac{\partial g}{\partial t} \cdot \Delta t + \left\{ -a \left(\cos \theta \frac{\partial^2 g}{\partial v \partial t} - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial^2 g}{\partial \theta \partial t} \right) \right\} \frac{(\Delta t)^2}{2} \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial t} &= -a \left(\cos \theta \frac{\partial g}{\partial v} - \frac{\sin \theta}{v} \frac{\partial g}{\partial \theta} \right) + R \\ R &= -v N Q_T(v) g \\ &+ \frac{1}{2} \int_0^\pi \left\{ v' N Q_m(v') g(t, v', \theta) \right. \\ &+ \sum_j \frac{v_j'^2}{v} N Q_j(v_j'') g(t, v_j'', \theta) \\ &+ \frac{1}{\Delta} \frac{v_d'^2}{v} N Q_i(v_d'') g(t, v_d'', \theta) \\ &\left. + \frac{1}{1-\Delta} \frac{v_{1-d}''^2}{v} N Q_i(v_{1-d}'') g(t, v_{1-d}'', \theta) \right\} \\ &\times \sin \theta d\theta \end{aligned}$$

となる。ここで、 $v' = v \left\{ 1 - \frac{m}{M} (1 - \cos \theta) \right\}$ 、 v_j'' 、 v_d'' 、 v_{1-d}'' は〈2・1〉節に示したものと同一のものである。

$t=0$ において任意の初期分布 $g(0, v)$ を与えてやれば、(8)式から E/P_0 で定まる $g(v)$ が収束値として決定される。 $g(v)$ が与えられれば、ルジャンドルの多項式展開項の l 番目 $g_l(v)$ は次式によって与えられる。

$$g_l(v) = \frac{2l+1}{2} \int_{-1}^1 P_l(\mu) g(v) d\mu \quad \dots\dots\dots (9)$$

μ は $\cos \theta$ である。

3. モンテカルロ・シミュレーションによる解法 MS

電子運動のシミュレーション手法、ならびに電子とアルゴン原子間の弾性、励起、電離の各衝突断面積は文献(13)に従った。各断面積は BE においても全く同じ値のものをを用いている点に注意しておく。電子の平均自由行程 $\lambda(\varepsilon)$ は、

$$\lambda(\varepsilon) = [N Q_T(\varepsilon)]^{-1}$$

として与えた。電子軌道は原則として $l=\lambda/10$ ごとの直線近似によって計算した。しかし、 $\varepsilon < 1\text{eV}$ では

Ramusauer-Townsend 効果により λ が非常に長くなるために、 $l=\lambda/10$ では軌道計算の際の誤差が大きくなる。そこで、 l 内で電界から得るエネルギーが 0.5eV 以上になるときには l を更に小さくとり、この間で得るエネルギーを 0.5eV 以下におさえた。

電子と中性粒子間で弾性衝突が起こるときの電子エネルギーの損失は無視したが、励起衝突では励起エネルギーを減じ、電離衝突では電離エネルギーを減じた後、二つの電子にエネルギーを $\Delta/1-\Delta$ (Δ は $0-1$ 間の一様乱数) の比に配分した。また衝突は等方散乱とした。

$F_l(\varepsilon)$ は(9)式を次のように書き直してサンプルすることができる。

SST に対しては、

$$F_l(\varepsilon) = \frac{2l+1}{2} \sum_{j=1}^n \Delta t_j P_l(\mu_j) \left/ \sum_{i=1}^N \Delta t_i \right.; \quad (\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon) \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 Δt_j はサンプル空間で $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ 間のエネルギーをもち j 番目にサンプルされる電子の滞在時間、 μ_j はそのとき v_j と $-E$ との成す方向余弦 $\cos \theta_j$ 、 n はその数、また Δt_i はサンプル空間での i 番目にサンプルされる電子の滞在時間、 N はその総数である。 ε をパラメータとした電子速度の角度分布 $F_\varepsilon(\mu)$ は、

$$F_\varepsilon(\mu) = \sum_{j=1}^{n'} \Delta t_j \left/ \sum_{i=1}^{N'} \Delta t_i \right.; \quad (\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon, \mu, \mu + d\mu) \dots\dots\dots (11)$$

ここで、 Δt_j はサンプル空間で $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ のエネルギーと $(\mu, \mu + d\mu)$ の方向をもち j 番目にサンプルされる電子の滞在時間、 n' はその数、また Δt_i は $(\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon)$ 間のエネルギーをもち i 番目にサンプルされる電子の滞在時間、 N' はその総数である。

PT に対しては、

$$F_l(\varepsilon) = \frac{2l+1}{2} \sum_{j=1}^n P_l(\mu_j) \left/ \sum_{i=1}^N 1 \right.; \quad (\varepsilon, \varepsilon + d\varepsilon) \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 μ_j 、 n 、 N はそれぞれ時刻 t における量であり、SST の記号と同じである。

4. 計算結果

結果はすべて次の関係を用い、エネルギー空間に変換したものについて論ずる。(2)~(6)式は $F_l(\varepsilon)$ で表現した方程式にも変換できる。それゆえ、二項展開近似の是非をエネルギー空間においても、速度空間で行なう場合と等価に論ずることができるものと考えられる。なお、 P_0 (0°C におけるガス圧) は 1Torr に

第 1 図 SST におけるアルゴンガス中の電子エネルギー分布関数の球関数展開成分 $F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$)
 Fig. 1. Components in the spherical harmonics expansion of the electron energy distribution function $F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$) in SST in argon gas.

とった。

$$\begin{aligned}
 F_l(\epsilon) d\epsilon &= \int_{\Omega} P_l(\mu) g(v) dv \\
 &= \int_0^\pi 2\pi \sin\theta P_l(\mu) \sum_j P_j(\mu) \\
 &\quad \times g_j(v) d\theta v^2 dv \dots\dots\dots (13)
 \end{aligned}$$

(BE)_{TA} および (BE)_{NA} の数値解析方法は、それぞれ文献 (2) および (1) に従った。

$E/P_0=50, 100, 200, 400 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{Torr}^{-1}$ (SST) に対する MS と (BE)_{TA} から求めた $F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$) を第 1 図に示す。また、 $E/P_0=200 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{Torr}^{-1}$ において、(11) 式から計算した ϵ をパラメータとした角度分布 $F_\epsilon(\mu)$ と $\mu=\cos\theta$ との関係を図 2 に示す。第 3 図は、PT ($E/P_0=200 \text{ V}\cdot\text{cm}^{-1}\cdot\text{Torr}^{-1}$) における MS, (BE)_{NA} および (BE)_{TA} の三者の方法から求めた

$F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$) を示したものである。

$F(\epsilon)$ は $\int_0^\infty F_0(\epsilon) d\epsilon=1$ により規格化してある。また、 $F_l(\epsilon)$ ($l=0, 1, 2$) から決定された諸パラメータを第 1 表に示す。

5. 考察および二項展開近似に対する検討

〈5・1〉 電子エネルギー分布関数 $F_l(\epsilon)$ 二項展開近似を BE に導入する際、これまでは次の三つの仮定

- (i) $g_0(v) \gg g_1(v), g_2(v)$ (または $F_0 \gg F_1, F_2$)
- (ii) $\partial g_1 / \partial t = 0$ (または $\partial F_1 / \partial t = 0$)
- (iii) $Q_m(v) \gg Q_i(v), Q_j(v)$

がとられてきた⁽⁸⁾⁽¹⁰⁾。しかし、より厳密に考察すると、上記仮定のうち (ii) 項ならびに衝突の際等方散乱を仮定すると (iii) 項を除くことができる。等方散

第2図 $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ に対するアルゴンガス中のエネルギー ε をパラメータとした角度分布 $F_e(\mu)$ と μ の関係

Fig. 2. Angular distribution $F_e(\mu)$ against μ as a parameter ε for $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ in argon gas.

第3図 $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ に対するPTでのアルゴンガス中の電子エネルギー分布関数の球関数展開成分 $F_l(\varepsilon)$ ($l=0, 1, 2$)

Fig. 3. Components in the spherical harmonics expansion of the electron energy distribution function $F_l(\varepsilon)$ ($l=0, 1, 2$) in PT for $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ in argon gas.

乱の仮定は、これまでにArを始めとして多くのガスに対して採用されている。このとき散乱の確率を与えるものとして、微分断面積から決定される運動量変換断面積が用いられる⁽¹⁾⁽²⁾⁽¹³⁾。また、微分断面積を用い非等方散乱を仮定した場合と、運動量変換断面積を用いて等方散乱を仮定した場合とでは、境界の影響を受けない空間で平均電子エネルギーおよび移動速度に

第1表 P_0 (0°C のガス圧力) = 1 Torr における電子諸パラメータの値

Table 1. Values of electron swarm parameters at $P_0=1 \text{ Torr}$ (0°C).

(a) SST

E/P_0 ($\text{V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$)		50	100	200	400
$\alpha(\text{cm}^{-1})$	MS	0.658	1.87	4.29	7.80
	(BE) _{TA}	0.669	1.92	4.30	8.04
$V_d(\text{cm} \cdot \mu\text{s}^{-1})$	MS	10.5	18.8	33.5	58.5
	(BE) _{TA}	9.97	17.6	31.9	60.6
$\bar{\varepsilon}(\text{eV})$	MS	7.25	8.67	10.7	14.8
	(BE) _{TA}	7.16	8.22	10.2	14.6
$D_V(\text{cm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1})$	MS	1.71	1.69	1.76	2.15
	(BE) _{TA}	1.90	1.86	1.90	2.28
$D_V(\text{cm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1})$	MS	1.82	1.86	2.09	2.78
	(BE) _{TA}	1.65	1.61	1.60	1.83

(b) PT ($E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$)

	R_l (μs^{-1})	$\bar{\varepsilon}$ (eV)	W_V ($\text{cm} \cdot \mu\text{s}^{-1}$)	D_V ($\text{cm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}$)	D_V ($\text{cm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}$)	D_V ($\text{cm}^2 \cdot \mu\text{s}^{-1}$)
MS	187	11.4	39.0	1.70	2.02	1.54
(BE) _{NA}	186	10.9	36.6	1.74	1.92	1.65
(BE) _{TA}	184	10.9	36.7	1.73	—	—

は著しい違いはないようであるということが報告されている⁽¹⁴⁾。

また、仮定 (i) 項は(3)式の $g_2(v)$ を含む項を無視するために導入されたものであるから、単に

(i)' g_0, g_1 (または F_0, F_1) のみを考慮し, g_2 (または F_2) 以下を無視

としてよいと考えられる。その代わり、方程式解析結果の g_0, g_1 (または F_0, F_1) を二項展開近似をとらない結果と比較検討する必要がある。(3)式中の $\partial g_1 / \partial t$ は、〈2.1〉節にも述べたように SST では0であり、PT では平衡分布 $g(v)$ の形が時間に依存しない(〈2.1〉節参照)ことを考えると、 $\partial g_1 / \partial t = R_l g_1$ と書けるので、(ii) 項を仮定する必要がなくなる⁽¹²⁾。仮定 (iii) 項を採用した場合は、(5)、(6)式の $Q_T(v)$ が $Q_m(v)$ となり、非弾性衝突の無視しえない高 E/P_0 では誤差が生ずる恐れがある。結局、本論文の(BE)_{TA} では、等方散乱の仮定のほかには(i)' の仮定 (g_2 または F_2 以下を無視) のみを考慮している。なお、文献(7)や(10)を含む多くの従来の(BT)_{TA} による解析においては、等方散乱の近似を用いながら、(iii)項の仮定を採用している。

SST の $F_0(\varepsilon), F_1(\varepsilon)$ に関しては、第1図に示すように (BE)_{TA} と MS から得た値が、 $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ 程度までは良く一致し、二項展開近似を

用いることにはほぼ問題がないように思われる。

$E/P_0 = 400 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ になると $(\text{BE})_{\text{TA}}$ と MS の間で $F_0(\varepsilon)$ のずれがいくらか大きくなる。また、 $\varepsilon < 2 \text{ eV}$ では両者の $F_1(\varepsilon)$ が大きく離れてくる。なお、各 E/P_0 において、MS の $F_0(\varepsilon)$ は $(\text{BE})_{\text{TA}}$ のそれよりもわずかに高エネルギー側へずれる傾向がある。この最も大きな原因として次のことが考えられる。平等電界中の電子は放物線軌道を描きながら運動するが、ここで用いた MS では、これを直線近似として計算する。このとき放物軌道の先端付近では、実際よりも必ず内側（陽極側）にずれてくるような軌道となり、その結果エネルギーの小さい状態（放物軌道の先端付近）にある電子の滞在時間が小さく評価され、電子エネルギー分布関数は高エネルギー側へずれてくるものと考えられる⁽¹⁵⁾。

$F_2(\varepsilon)$ は各 E/P_0 ともに $\varepsilon \leq 3 \text{ eV}$ および $\varepsilon \geq 20 \text{ eV}$ で $F_2(\varepsilon) \approx F_0(\varepsilon)$ となったが、それ以外のエネルギー範囲では $F_2(\varepsilon) < F_0(\varepsilon)$ となった。 $(\text{BE})_{\text{TA}}$ では (6) 式から F_2 を計算したわけであるが、MS の結果と比較すると $\varepsilon < 3 \text{ eV}$ で大きく異なる点を除いては、両者は良く一致している。

$E/P_0 = 200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ において、 $F_2(\varepsilon) \approx F_0(\varepsilon) \approx F_1(\varepsilon)$ となる $\varepsilon < 6 \text{ eV}$ (第 1 図 (c)) では、第 2 図に示すように角度分布 $F_\varepsilon(\mu)$ が μ の一次式で近似できないが、 $\varepsilon > 8 \text{ eV}$ では $F_\varepsilon(\mu)$ と μ はおおよそ直線関係を示すことがわかる。

以上を整理すると、MS の結果は電子数のかなりの割合を占める $\varepsilon \leq 6 \text{ eV}$ で $F_2(\varepsilon) \approx F_1(\varepsilon) \approx F_0(\varepsilon)$ となる関係、すなわち F_0 , F_1 (または q_0, q_1) に対して F_2 (または q_2) は決して無視しえない関係を示しているにもかかわらず、 $(\text{BE})_{\text{TA}}$ の $F_0(\varepsilon)$ と $F_1(\varepsilon)$ は MS の結果と良く一致しているということがわかる。

この一見矛盾した結果は、 $(\text{BE})_{\text{TA}}$ の際の (3) 式の $q_2(v)$ を含む項を無視したとき、この近似が (3) 式に与える効果が $q_2(v)$ の大きさそのものではなく、 $2/5 \cdot q_2(v)$ に減ぜられたものであり、この項が q_0, q_1 値に与える影響が小さいことが考えられること、また MS の $q_2(v)$ はさきに述べた軌道先端における誤差により低エネルギー領域において実際の値より大きく見積っている (第 3 図参照) 可能性があることの二点から理解できる。

PT ($E/P_0 = 200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$) に対しては、 $(\text{BE})_{\text{TA}}$, MS のほかに $(\text{BE})_{\text{NA}}$ によって第 3 図に示すような $F_l(\varepsilon)$ ($l=0, 1, 2$) を得た。MS と $(\text{BE})_{\text{TA}}$ との結果はほぼ SST の場合と同様の傾向を示している。二項展開近似をとらない MS と $(\text{BE})_{\text{NA}}$ 両者の結果

の相違の主たる原因は、さきにも述べた MS の際の放物電子軌道の先端付近で生ずる誤差によるものと考えられる。しかし、両者間で違いの最も大きい $F_2(\varepsilon)$ においてさえも、 $3 \sim 4 \text{ eV}$ 付近で最大値をとる傾向は一致している。

$(\text{BE})_{\text{TA}}$ と $(\text{BE})_{\text{NA}}$ 両者から得た $F_0(\varepsilon)$ と $F_1(\varepsilon)$ は線の太さ程度で良く一致している。この結果は、MS の際の誤差が取り除かれれば、第 1 図に示した $(\text{BE})_{\text{TA}}$ と MS の $F_l(\varepsilon)$ 間の一致も更に良くなる方向に向かうことを示唆していると考えてよいであろう。

〈5・2〉 電子輸送係数 二項展開近似の BE の適用の是非を各種輸送係数の決定精度の観点から検討する。

電離周波数 R_i , 電離係数 α , 平均速度 $V_d(\text{SST})$, $W_V(\text{PT})$, 平均エネルギー $\bar{\varepsilon}$, 拡散係数 D_V , ならびに電界と平行および直角方向の拡散係数 $D_{V\parallel}$, $D_{V\perp}$ は F_l ($l=0, 1, 2, \dots$) を用いて、

$$\left. \begin{aligned} R_i &= V_1 N \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} Q_i(\varepsilon) F_0(\varepsilon) d\varepsilon \\ V_d(W_V) &= V_1 \int_0^\infty \varepsilon^{1/2} F_1(\varepsilon) d\varepsilon \\ \alpha &= R_i / V_d \\ \bar{\varepsilon} &= \int_0^\infty \varepsilon F_0(\varepsilon) d\varepsilon \\ D_{V\parallel} &= \frac{V_1}{3} \int_0^\infty \varepsilon \left(F_0 + \frac{2}{5} F_2 \right) \\ &\quad \left| (R_i / V_1 + \varepsilon^{1/2} N Q_T(\varepsilon)) d\varepsilon \right. \\ D_{V\perp} &= \frac{V_1}{3} \int_0^\infty \varepsilon \left(F_0 - \frac{1}{5} F_2 \right) \\ &\quad \left| (R_i / V_1 + \varepsilon^{1/2} N Q_T(\varepsilon)) d\varepsilon \right. \\ D_V &= \frac{1}{3} (2 D_{V\perp} + D_{V\parallel}) \end{aligned} \right\} \dots (14)$$

として与えられる。ここで、 V_1 は 1 eV の電子速度 ($5.93 \times 10^7 \text{ cm/s}$) である。 R_i , $\bar{\varepsilon}$ などは $F_0(\varepsilon)$, V_d (拡散を考慮した移動速度 $= W - \alpha D$) は $F_1(\varepsilon)$ のみによって決まるが、 D は $F_0(\varepsilon)$ のほかに $F_2(\varepsilon)$ にも依存する⁽¹¹⁾。

α , $\bar{\varepsilon}$, R_i の値は第 1 表に示すように、本論文の E/P_0 の範囲では直接サンプリングによって求めた MS と (14) 式から計算した $(\text{BE})_{\text{TA}}$ 間で最大 5% 以内の差で一致している。一方、 D_V の違いは最大 10% に増加している。MS と $(\text{BE})_{\text{TA}}$ 間の諸係数の違いは、 E/P_0 が増しても必ずしも増加してはいない。例えば、 V_d , $\bar{\varepsilon}$ の違いはそれぞれ 5.0, 4.9% (E/P_0 ,

第4図 $\bar{\epsilon}$, $\overline{\Delta\epsilon}$ および $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon}$ と E/P_0 との関係

Fig. 4. $\bar{\epsilon}$, $\overline{\Delta\epsilon}$ and $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon}$ against E/P_0 .

=200) から 3.5, 1.4% ($E/P_0=400$) へと減少している。

諸係数を決める際 MS では $\bar{\epsilon}$, α , R_i の統計変動が約 2% 以内, また BE では緩和計算におけるこれらの値の収束条件を 1% 以内とした。しかし, MS ではさきに示した軌道計算の際の誤差が一部のパラメータに影響するものと考えられる。PT ($E/P_0=200$) において, (BE)_{TA} と (BE)_{NA} 間では R_i , $\bar{\epsilon}$, W_V が 1% 以内で非常に良く一致している。また D_V は $F_2(\epsilon)$ にも依存するパラメータではあるが, 他の値と同様に 1% 以内の違いしか生じなかった。

(BE)_{TA} が成立する条件の一つに, $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon} \approx \overline{\Delta\epsilon}$; 平均自由行程間に得る平均電子エネルギー, $\bar{\epsilon}$; 無秩序エネルギーが十分小さいことがあげられている⁽¹⁰⁾。しかしながら, 今回の結果は

(1) $F_0(\epsilon)$, $F_1(\epsilon)$ は $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ 位まで

(2) $F_0(\epsilon)$, $F_1(\epsilon)$ で決まるパラメータは 5~6% 程度の精度で, 電離や励起の著しい $E/P_0=400 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ 位まで (BE)_{TA} が成立する

ことを示している。従って, $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon} \approx 0.5$ (第4図) という大きな値となっても今回の条件では (BE)_{TA} が妥当であることを示唆している。

これに対し, $E/P_0 > 50 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ では, 二項展開近似の成立に対し疑問を投げかけた真壁氏らは⁽¹⁰⁾, 仮定 (iii) をとったために $Q_T = Q_m$ (筆者らは $Q_T = Q_m + Q_{ex} + Q_i$) とし, 高い E/P_0 で重要となる励起 Q_{ex} や電離 Q_i の断面積を (5) 式および (6) 式において無視し, 結果として F_1 を大きく見積りすぎたこと, また MS において⁽¹⁶⁾ 非等方散乱を仮定し精密な計算を行なっていないながら, 電子エネルギー分布関数のサンプリング方法が本論文の方法とは異なっているため, BE の結果と直接比較できるものではないこと, 更にこれは重要な点であるが, (BE)_{TA}⁽¹⁰⁾ で用いた Q_m

は MS⁽¹⁶⁾ に用いた微分断面積から誘導されるもの⁽¹⁷⁾ とは異なる値のものであって, 従って定量的比較を行なうことに疑問があることなどに原因して, 本論文とは異なった結論に達したものと考えられる。もし, これらの点が万全であれば, 文献 (10) は Q_m を用い等方散乱を仮定する従来の方法と, 更に正確な微分断面積を用いる方法とのユニークな比較検討を与えることになったであろうと考えられる。

6. 結 論

電子エネルギー分布関数を球関数で展開する際, 始めの二項のみで近似する方法をボルツマン方程式に導入した場合, この近似がどの程度成立するかを Ar ガスに例を取り $E/P_0=50$ から $400 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ にわたって検討した。その結果, 二項展開近似を導入したボルツマン方程式から $F_0(\epsilon)$, $F_1(\epsilon)$ を求めるとき, 従来しばしば行なわれるように運動量変換断面積を用い等方散乱を仮定すれば, これまでとられてきた仮定 (A) $\partial F_1/\partial t=0$, (B) $Q_m \gg Q_{ex}$, Q_i を考慮する必要がないこと, 更にこの条件の下でボルツマン方程式を解析すると,

(a) MS や (BE)_{NA} の結果と F_0 , F_1 が $E/P_0=200 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ 程度まで良く一致した,

(b) R_i , α , V_a , W_V など F_0 および F_1 から計算される諸係数は, 電離, 励起衝突の著しい $E/P_0=400 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ まで 5~6% 以内の違いで MS や (BE)_{NA} の結果と一致する,

(c) (a), (b) 項の結果から $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon} \approx 0.5$ においても (BE)_{TA} が成立する,

のことが明らかとなった。すなわち, 二項展開近似では $D_{V||}$ や $D_{V\perp}$ を決めることはできないが, F_0 と F_1 のみで決定される電子の輸送係数を知るという実用的な目的からは, この近似は Ar に対して $E/P_0=400 \text{ V} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{Torr}^{-1}$ 程度, またここでは $\overline{\Delta\epsilon}/\bar{\epsilon} \approx 0.5$ まではボルツマン方程式解析に導入しても, 多くの実用目的には十分な精度を与えることを示した。

(昭和 52 年 8 月 26 日受付, 同 53 年 7 月 21 日再受付)

文 献

- (1) K. Kitamori, H. Tagashira & Y. Sakai: "Relaxation process of the electron velocity distribution in neon", *J. Phys. D*, **11**, 283 (1978)
- (2) H. Tagashira, Y. Sakai & S. Sakamoto: "The development of electron avalanches in argon at high E/N values; II Boltzmann equation analysis", *ibid.*, **10**, 1051 (1977)
- (3) 酒井・田頭: 「電離係数の定義と電子電流連続の式について」日本物理学会 31 回年会放電シンポジウム 5 p-K-2 (昭 51)
- (4) T.D. Roberts & D.S. Burch: "Experimental electron

- energy distributions for Townsend discharge in Helium", *Phys. Rev.*, **142**, 100 (1966)
- (5) T. E. Kenny & J. D. Craggs: "Electron energy distributions in Townsend discharge in Hydrogen", *J. Phys. B*, **3**, 251 (1970)
- (6) J. R. Losee & D. S. Burch: "Experimental electron energy distribution for Townsend discharge in argon gas", *Phys. Rev. A*, **6**, 1652 (1972)
- (7) T. Makabe, T. Goto & T. Mori: "Experimental determination of electron energy distribution function in Townsend discharge in argon", *J. Phys. B*, **10**, 1781 (1977)
- (8) T. Holstein: "Energy distribution of electrons in high frequency gas discharge", *Phys. Rev.*, **70**, 367 (1946)
- (9) J. J. Lowke, J. H. Parker & C. A. Hall: "Electron diffusion under the influence of an electric field near absorbing boundaries", *Phys. Rev. A*, **15**, 1237 (1977)
- (10) 真壁・後藤・森: 「Townsend 放電域への Boltzmann 方程式の適用について」電学論 A, **95**, 357 (昭 50)
- (11) 奥田: 気体プラズマ現象 (昭 45) コロナ社
- (12) 北守・田頭・酒井: 「電子輸送係数のボルツマン方程式解析 (F_1 の時間変化とローレンツ近似の問題点)」電気学会放電研資 ED-75-23 (昭 50)
- (13) Y. Sakai, H. Tagashira & S. Sakamoto: "The development of electron avalanches in argon at high E/N values; I Monte Carlo simulation", *J. Phys. D*, **10**, 1035 (1977)
- (14) 酒井・田頭・坂本: 「Ar ガス中の電子なだれのモンテカルロシミュレーション」昭 47 電気四学会連大 52
- (15) 酒井・田頭・坂本: 「Ar ガス中の電子なだれのモンテカルロシミュレーション」電気学会放電研資 ED-72-4 (昭 47)
- (16) 真壁・後藤・森: 「弱電離ガス中の電子エネルギー分布関数ならびにモンテカルロシミュレーション」電学論 A **93**, 229 (昭 48)
- (17) 坂本・田頭: 「新高電圧工学」p. 28 (昭 48) 朝倉書店