円環座標によるヘルムホルツ方程式の解析解とその Force-Free 磁界解析への一応用

正 員 関 正 治 (北海道大)
正 員 加 地 郁 夫 (北海道大)

1. ま え が き

円環座標⁽¹⁾によって表わされたヘルムホルツ方程式の変数分離は原理的に不可能である。円環座標において、ヘルムホルツ方程式は一変数の二階常微分方程式と二変数の二階偏微分方程式に分離されるが、後者を更にこれ以上変数分離することはできない。Weston氏は、この方程式を一変数の無限連立常微分方程式の漸化系に変形することを提案した⁽²⁾。彼は、この手法によってヘルムホルツ方程式を解き、円環波動関数を作り上げた⁽³⁾。この特殊関数は、円環状湧源からの放射の条件を満足し、円環外部の問題に対する解を表わす。

円環座標によるヘルムホルツ方程式の解析解は、円環状態をとる工学的問題を取り扱うときに便利であるが、円環内部の問題に対する解は、まだ求められておらず、また円環外部の解の数表もいまのところ見あたらない。そこで我々は、円環内部の解の表示式をWeston氏の方法および円環波動関数を用いて導出し、これに基づいて内部解と外部解を電子計算機によって数値的に求める解法を与え、その数値計算結果を数表に示す。外部解はルジャンドル陪関数 $P_\nu^\mu(z)$ の二重級数であり、内部解は外部解の $P_\nu^\mu(z)$ を $Q_\nu^\mu(z)$ で置換えた形をしている。円環座標によるヘルムホルツ方程式の解の数値計算は、 $P_\nu^\mu(z)$ 、 $Q_\nu^\mu(z)$ についての無限二重級数表示を用いて行なう。この際 $P_\nu^\mu(z)$ 、 $Q_\nu^\mu(z)$

(z)はガウスの超幾何級数表示と漸化式を用いて計算する。

応用例として、円環状の完全導体壁を境界にもつ軸対称の Force-Free 磁界⁽⁴⁾の計算を行ない、円環内部と外部の磁気面を図示する。核融合研究の分野において、Force-Free 磁界はプラズマの安定化に大きな効果があることが知られており⁽⁵⁾、重要視されている。磁界の方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B}$ 、 $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$ は、条件 $\alpha = \text{定数}$ 、 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\sigma, \phi)$ のもとでヘルムホルツ方程式 $(\nabla^2 + \alpha^2) B_\phi e^{i\phi} = 0$ に変形することができ、従来の逆アスペクト比の近似を用いずに、Force-Free 磁界を高精度で計算することが可能である。

2. ヘルムホルツ方程式の解析解とその数値計算

第1図に示すような円環座標⁽¹⁾ (σ, ϕ, ϕ) によって問題を取り扱う。 σ, ϕ, ϕ は $\log(AP/BP) = \sigma$ 、 $\angle APB = \phi$ 、 Z 軸の周りの回転角 ϕ で定義されている。円環座標は直交曲線座標であり、計量テンソルは

$$h_1 = h_2 = d/g, \quad h_3 = d \sinh \sigma / g, \dots \dots \dots (1)$$

で与えられる。ここで、 $g = \cosh \sigma - \cos \phi$ である。ま

第1図 円環座標系 (σ, ϕ, ϕ)

Fig. 1. Toroidal coordinate system (σ, ϕ, ϕ).

Analytical Solutions of The Helmholtz Equation in Toroidal Coordinates and Their Application to The Analysis of Force-Free Magnetic Fields. By Masaharu Seki, Member & Ikuro Kaji, Member (Department of Electricity, Faculty of Engineering, Hokkaido University).

関 正治: 正員, 北海道大学工学部電気工学科
加地郁夫: 正員, 北海道大学工学部電気工学科

た A, B を固定点とするアポロニウスの円上で

$$\left. \begin{aligned} d^2 &= R_\sigma^2 - r_\sigma^2, \quad \cosh \sigma = R_\sigma / r_\sigma \\ \sinh \sigma &= d / r_\sigma \end{aligned} \right\} \dots\dots (2)$$

が成立つ。 R_σ / r_σ をアスペクト比という。

ヘルムホルツ方程式

$$\nabla^2 \Psi + k^2 \Psi = 0 \dots\dots (3)$$

を円環座標によって表わすと

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(h_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \sigma} \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h_3 \frac{\partial \Psi}{\partial \phi} \right) \right. \\ \left. + \frac{h_1 h_2 \partial^2 \Psi}{h_3 \partial \phi^2} \right\} + k^2 \Psi = 0 \dots\dots (4) \end{aligned}$$

となる。方程式(4)の基本解は、

$$\Psi_e(z, \phi, \phi) = e^{im\phi} \sum_{r=T}^{\infty} A_r(z) g^{-r} \dots\dots (5)$$

$$\begin{aligned} \Psi_o(z, \phi, \phi) = e^{im\phi} \sin \phi \sum_{r=T'}^{\infty} B_r(z) g^{-r} \\ \dots\dots (6) \end{aligned}$$

ただし、 $g = z - \cos \phi$, $z = \cosh \sigma$, Ψ_e : ϕ の

偶関数, Ψ_o : ϕ の奇関数

によって与えられる。 A_r, B_r は(5), (6)式を(4)式に代入して得られる無限連立漸化微分方程式系

$$\begin{aligned} (z^2 - 1) A_r'' + 2z A_r' - A_r \{r(r+1) \\ + m^2/(z^2 - 1)\} + F_r(z) = 0 \dots\dots (7) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} F_r(z) &= k^2 d^2 A_{r-2} - (2r-1) \\ &\quad \times \{(z^2 - 1) A_{r-1}' - z(r-1) A_{r-1}\} \\ r &= T, T+1, T+2, \dots\dots \\ (z^2 - 1) B_r'' + 2z B_r' - B_r \{r(r-1) \\ &\quad + m^2/(z^2 - 1)\} + G_r(z) = 0 \dots\dots (8) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} G_r(z) &= k^2 d^2 B_{r-2} - (2r-1) \\ &\quad \times \{(z^2 - 1) B_{r-1}' - z(r-2) B_{r-1}\} \\ r &= T', T'+1, T'+2, \dots\dots \end{aligned}$$

を満足する。 A_r, B_r のプライムは z についての導関数を表わす。 T, T' は境界条件から決定される。 $r < T, r < T'$ のとき、 $A_r = 0, B_r = 0$ とおくと、 $r = T, r = T'$ のとき $F_r(z) = G_r(z) = 0$ となり、(7), (8) 式はルジャンドルの陪関数 $P_r^m(z), Q_r^m(z)$ を解とする齊次方程式となる。 $\omega_r^m(z) = P_r^m(z)$ または $Q_r^m(z)$ と置くと、

$$\begin{aligned} A_r(z) &= \omega_r^m(z) \int_{c_1}^z \frac{dy}{(1-y^2)[\omega_r^m(y)]^2} \\ &\quad \times \int_{c_2}^y F_r(x) \omega_{r-1}^m(x) dx \dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$B_r(z) = \omega_{r-1}^m(z) \int_{c_1'}^z \frac{dy}{(1-y^2)[\omega_{r-1}^m(y)]^2}$$

$$\times \int_{c_2'}^y G_r(x) \omega_{r-1}^m(x) dx \dots\dots (10)$$

が得られる。定数 c_1, c_2, c_1', c_2' は境界条件から決定される。(5), (6)式で与えられるヘルムホルツ方程式(4)の任意の解は、定数 c_1, c_2, c_1', c_2' を1に固定して、 $A_r(z) = \omega_r^m(z), B_{r'}(z) = \omega_{r'-1}^m(z)$ を用いて得られる解 $\Psi_{e,p}^m(P), \Psi_{e,p}^m(Q), \Psi_{o,p}^m(P), \Psi_{o,p}^m(Q)$ の一次結合によって表わされる。ここで、 $p = T, T+1, \dots, p' = T', T'+1, \dots$ である。解は ϕ について周期的であると考えて、 $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ と置く。

いま、 $F(z)$ に作用する積分演算子 $I(M, r)$ を

$$\begin{aligned} I(M, r) F(z) &= \omega_r^M(z) \int_1^z \frac{dy}{(1-y^2)[\omega_r^M(y)]^2} \\ &\quad \times \int_1^y \omega_r^M(x) F(x) dx \dots (11) \end{aligned}$$

と定義すると、 $c_1 = c_2 = c_1' = c_2' = 1$ のとき(9), (10) 式は

$$A_r(z) = I(m, r) F_r(z) \dots\dots (12)$$

$$B_r(z) = I(m, r-1) G_r(z) \dots\dots (13)$$

と書き表わされる。このとき、(12), (13)式の右辺の表示式に対して次の定理が成立つ。この定理は、 $\omega_r^{\mu}(z) = P_r^{\mu}(z)$ の場合に Weston 氏が与えた定理⁽³⁾を $\omega_r^{\mu}(z) = P_r^{\mu}(z)$ のみでなく、 $Q_r^{\mu}(z)$ の場合にも成立つように拡張したものであり、(16)式の右辺の第2項は新しく導入されたものである。

〔定理〕 $X > 0$ に対して

$$\begin{aligned} G(M, X, X-R) \\ = (z^2 - 1)^{X/2} \omega_{X-R-1}^{-M-X}(z) \dots\dots (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F(z) &= a \{ (z^2 - 1) \frac{d}{dz} G(M, X-1, X-R) \\ &\quad - z(R-1) G(M, X-1, X-R) \} \\ &\quad + b G(M, X-1, X-R+1) \dots (15) \end{aligned}$$

とおけば

$$\begin{aligned} I(M, R) F(z) \\ = - \{ a(M+2X-R-1) + b \} \\ \times (2X)^{-1} \{ G(M, X, X-R) \\ - \delta(\omega) D_{X, R} \omega_R^M(z) \} \dots\dots (16) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} D_{X, R} \omega_R^M &= (-2)^X \frac{\Gamma(M+X) \Gamma(-M-R+1)}{\Gamma(M) \Gamma(2X+M-R+1)} \\ \delta(P) &= 0, \quad \delta(Q) = 1 \end{aligned} \dots\dots (17)$$

が成立つ。

(証明) ルジャンドル陪関数の漸化式を用いれば(14)式と(15)式からそれぞれ

$$\begin{aligned}
& (z^2-1) \frac{d^2}{dz^2} G(M, X, X-R) \\
& + 2z \frac{d}{dz} G(M, X, X-R) \\
& - \left\{ R(R+1) + \frac{M^2}{z^2-1} \right\} G(M, X, X-R) \\
& = (2X) G(M, X-1, X-R+1) \dots (18)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F(z) &= \{a(M+2X-R-1)+b\} \\
&\times G(M, X-1, X-R+1) \dots (19)
\end{aligned}$$

が得られる。また、

$$\begin{aligned}
& (z^2-1) \frac{d^2 \omega_R^M}{dz^2} + 2z \frac{d \omega_R^M}{dz} \\
& - \left\{ R(R+1) + \frac{M^2}{z^2-1} \right\} \omega_R^M = 0 \dots (20)
\end{aligned}$$

が成立つ。(18)式 $\times \omega_R^M$ -(20)式 $\times G(M, X, X-R)$ を計算すると、

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dz} \left\{ (z^2-1) \left(\omega_R^M \frac{dG}{dz} - G \frac{d\omega_R^M}{dz} \right) \right\} \\
& = \frac{2X}{a(M+2X-R-1)+b} \omega_R^M F(z) \\
& \dots (21)
\end{aligned}$$

となる。ただし、 $G=G(M, X, X-R)$ である。左辺の中括弧の中の表示式は次のように計算できる。

$$\begin{aligned}
& (z^2-1) \left\{ \omega_R^M \frac{dG}{dz} - G \frac{d\omega_R^M}{dz} \right\} \\
& = (z^2-1)^{X/2} \{ 2X+M-R \} \omega_{X-R}^{-M-X} \omega_R^M \\
& + (M+R) \omega_{R-1}^M \omega_{X-R-1}^{-M-X} \} \dots (22)
\end{aligned}$$

$\omega_\nu^\mu = P_\nu^\mu(z)$ の場合、 $P_\nu^\mu(1)=0$ または 1 なので (22) 式の右辺は $z=1$ に対して零となる。また、 $\omega_\nu^\mu = Q_\nu^\mu(z)$ のときは、 $z \rightarrow 1$ のときの近似式

$$\begin{aligned}
& Q_\nu^\mu(z) \doteq \frac{e^{\mu\pi i}}{2} \Gamma(\mu) \left(\frac{z+1}{z-1} \right)^{\mu/2} \quad (\mu > 0) \\
& Q_\nu^\mu(z) \doteq \frac{e^{\mu\pi i}}{2} \frac{\Gamma(-\mu) \Gamma(\nu+\mu+1)}{\Gamma(\nu-\mu+1)} \\
& \times \left(\frac{z-1}{z+1} \right)^{\mu/2} \quad (\mu < 0) \dots (23)
\end{aligned}$$

を (22) 式の右辺に代入して、 $z \rightarrow 1$ の極限を取ると (22) 式の右辺はやはり零となる。それゆえ、(11)式の右辺の積分を (21)式を用いて計算すると

$$\begin{aligned}
& \omega_R^M(z) \int_1^z \frac{dy}{(1-y^2) [\omega_R^M(y)]^2} \\
& \times \int_1^y \omega_R^M(x) F(x) dx \\
& = \frac{\alpha(M+2X-R-1)+b}{2X}
\end{aligned}$$

$$\times \omega_R^M(z) \left[\frac{G}{\omega_R^M(y)} \right]_1^z$$

を得る。 $\omega_R^M = P_R^M$ のときは $(G/\omega_R^M(y))_{y=1}=0$ となり、 $\omega_R^M = Q_R^M$ のときは (23)式より $(G/\omega_R^M(y))_{y=1} = D_{X,R}^M$ となり、定理の正当性が証明される。(証明終)

次に、(定理)を用いて (9), (10)式の積分を実行し、ヘルムホルツ方程式の解を求める。

〈2・1〉 円環外部の問題に対する解 $P_\nu^\mu(z)$ は $z=1$ で収束するから、 $\Psi_{e,\nu}^\mu(P)$, $\Psi_{o,\nu}^\mu(P)$ によって外部解を作ることができる。 $\omega_\nu^\mu(z) = P_\nu^\mu(z)$ とおいて、(定理)により $\Psi_{e,\nu}^\mu(P)$, $\Psi_{o,\nu}^\mu(P)$ を求めて、円環状湧源からの放射の条件を満足する一次結合を作ると、次のような円環外部の解(円環波動関数)⁽³⁾が得られる。

$$\left. \begin{aligned} F_{eN}^M(\omega) &= e^{im\phi} S_N^M(\omega) \\ F_{oN}^M(\omega) &= e^{im\phi} T_N^M(\omega) \\ M &= |m| = 0, 1, 2, 3, \dots \end{aligned} \right\} \dots (24)$$

ここで、 S_N^M は

$$\begin{aligned}
S_N^M(\omega) &= \frac{\Gamma(N+M+1) \pi^{1/2} (-1)^M (kd)^N}{\Gamma(N-M+1) 2^{(M+N)/2+1} q^{(M+N)/2}} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kd)^{2p} (-1)^p K_p^1}{g^p 2^p} \dots (25)
\end{aligned}$$

によって与えられ、 ϕ に関して偶関数である。ただし

$$\begin{aligned}
K_p^1 &= \frac{1}{p! \Gamma(N+3/2+p)} \\
&\times \sum_{r=0}^l \left(\frac{M-N}{2} \right)_r \left(\frac{N+M+1}{2} \right)_r (z^2-1)^{r/2} \\
&\times \omega_{p+(N+M)/2}^{-M-r}(z) \dots (26)
\end{aligned}$$

である。 N は、 $M+2l$ または $-M-2l-1$ であり、 l は正整数かまたは零である。 T_N^M は ϕ についての奇関数であり、

$$\begin{aligned}
T_N^M(\omega) &= \frac{\Gamma(N+M+1) \pi^{1/2} (-1)^M \sin \phi (kd)^N}{\Gamma(N-M+1) 2^{(M+N+3)/2} q^{(M+N+1)/2}} \\
&\times \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(kd)^{2p} (-1)^p K_p^2}{2^p g^p} \dots (27)
\end{aligned}$$

によって与えられる。ただし、

$$\begin{aligned}
K_p^2 &= \frac{1}{p! \Gamma(N+3/2+p)} \\
&\times \sum_{r=0}^l \left(\frac{M-N+1}{2} \right)_r \left(\frac{M+N}{2} \right)_r (z^2-1)^{r/2} \\
&\times \omega_{p+(M+N-1)/2}^{-M-r}(z) \dots (28)
\end{aligned}$$

である。 N は $M+2l+1$ または $-M-2l-2$ であり、 l は正整数かまたは零である。

〈2・2〉 円環内部の問題に対する解 $Q_\nu^\mu(z)$ は

$z \rightarrow \infty$ で収束するので、 $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ によって内部解を作ることができる。 $\omega_r^m(z) = Q_r^m(z)$ と置いて [定理] を用いると内部解が求められる。付録に示されているように、仮に $\delta(Q) = 0$ と置いて得られる解 $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ を独立な解の基本系とみなせるから、 $\delta(Q) = 1$ と置いて得られる解は、 $\Psi_{ep}^m(Q) = \sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n \Psi_{en}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q) = \sum_{n=p}^{\infty} \beta_n \Psi_{on}^m(Q)$ となる。 α_n, β_n は定数である。(9), (10) 式の定数 c_1, c_2, c_1', c_2' が任意の場合の内部解は、 $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ の一次結合、すなわち、 $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ の一次結合によって与えられる。 $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ は $\delta(P) = 0$ を用いて得られる解⁽³⁾ $\Psi_{ep}^m(P)$, $\Psi_{op}^m(P)$ の $P_\nu^m(z)$ を $Q_\nu^m(z)$ で置換えた形をしている。従って、 $\omega_\nu^m(z) = Q_\nu^m(z)$ とおけば、(24) 式は $\Psi_{ep}^m(Q)$, $\Psi_{op}^m(Q)$ の一次結合で表わされ、円環内部の解を与える。

次に、(25), (26) 式で与えられる $S_N^M(Q)$ の収束性を考える。この表示式は、有限級数と無限級数の組合せによって成立っている。ゆえに、無限級数について和を考えるだけでよい。不等式

$$|Q_\nu^{-M}(z)| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^{|\nu| + 1/2}}{\sqrt{z + 1}} \times \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^{M/2} \frac{|\Gamma(-M + |\nu|)|}{\Gamma(|\nu| + 1/2)} \quad \dots (29)$$

を用いて収束性を調べる。この式の右辺に含まれる複号は、 $\nu > 0$ で正、 $\nu < 0$ で負である。(29) 式を用いると (25) 式の無限級数は、

$$\sum_{p=0}^{\infty} \left| \frac{(kd)^{2p} Q_{p+(M+N)/2}^{-M-r}(z)}{2^p g^p p! \Gamma(N + 3/2 + p)} \right| \leq \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \frac{(z - \sqrt{z^2 - 1})^{\pm 1/2}}{\sqrt{z + 1}} \times \left(\frac{z + 1}{z - 1}\right)^{(M+r)/2} \sum_{p=0}^{\infty} u_p \quad \dots (30)$$

と評価できる。ただし、

$$u_p = \frac{(kd)^{2p} (z - \sqrt{z^2 - 1})^{1/2 + (N+M)/2}}{2^p g^p p! \Gamma(N + 3/2 + p)} \times \frac{|\Gamma(p + (N+M)/2 - M - r)|}{\Gamma(p + (N+M)/2 + 1)}$$

である。ここで、 $p \gg 1$ のとき

$$\frac{u_p}{u_{p-1}} \approx \frac{1}{p^2} \frac{(kd)^2 z - \sqrt{z^2 - 1}}{2(z - \cos \psi)} < 1 \quad (1 < z \leq \infty) \quad \dots (31)$$

を満足する。この条件は考えている級数が絶対収束することを示す。更に、(25), (29) 式より

$$\lim_{z \rightarrow \infty} S_N^M(Q) = \text{定数} \quad \dots (32)$$

となる。 $S_N^M(Q)$ は円環内部 ($z > 1$) で収束するから内部解として採用することができる。 $T_N^M(Q)$ についても同様である。

〈2・3〉 数値計算 ヘルムホルツ方程式の解 (24)

式は、 $\omega_\nu^m = P_\nu^m$ のとき円環外部の解を、 $\omega_\nu^m = Q_\nu^m$ のとき円環内部の解を表わす。従って $F_{0N}^m(\omega)$ あるいは $F_{0N}^m(\omega)$ は外部解と内部解とを合せて四種類の解を持つが、二種類を選んで独立解として採用すればよい。これら四種類の解は S_N^M, T_N^M によって表わされる。

実際の計算にあたっては、ルジャンドル陪関数をガウスの超幾何級数と漸化式⁽¹⁾の組合せによって計算しそれを (26), (28) 式に代入し、更にその式を (25), (27) 式に代入することによって S_N^M, T_N^M の値が求まる。我々は、級数の打ち切誤差が 10^{-6} 程度の数値計算コードを試作し、その計算コードによる S_N^M, T_N^M の数値計算例を第 1 表、第 2 表に示した。

3. Force-Free 磁界

完全導体の円環内部あるいは外部にプラズマが存在するときの軸対称 Force-Free 磁界を計算する。

第 1 表 S_N^M の数値計算例

Table 1. Example of computation of S_N^M .

ψ (度)	$S_N^M(P); M=2, kd=5, z=2.5$				$S_N^M(Q); M=2, kd=5, z=2.5$			
	$N=M+2l$		$N=-M-2l-1$		$N=M+2l$		$N=-M-2l-1$	
	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$
0	-6.274 E-3	7.634 E-3	-2.007 E-2	9.552 E+1	8.054 E-2	6.786 E-3	-1.292 E-2	3.251 E+2
30	-1.121 E-2	-3.106 E-2	-2.520 E-2	-1.381 E+2	6.863 E-2	2.970 E-3	1.619 E-3	-1.216 E+3
60	-1.046 E-2	-5.488 E-2	-5.048 E-2	4.023 E+2	4.688 E-2	4.259 E-4	4.151 E-2	-3.993 E+3
90	2.008 E-2	-7.775 E-3	-7.716 E-2	-1.006 E+3	3.063 E-2	5.110 E-5	9.367 E-2	-3.226 E+3
120	5.979 E-2	5.232 E-2	-8.040 E-2	-2.382 E+3	2.156 E-2	9.251 E-6	1.419 E-1	7.231 E+2
150	8.519 E-2	6.709 E-2	-7.171 E-2	6.729 E+3	1.726 E-2	3.186 E-6	1.747 E-1	4.222 E+3
180	9.318 E-2	6.809 E-2	-6.706 E-2	1.507 E+4	1.600 E-2	2.226 E-6	1.863 E-1	5.452 E+3

第2表 T_N^M の数値計算例
Table 2. Example of computation of T_N^M .

ϕ (度)	$T_N^M(P); M=2, kd=5, z=2.5$				$T_N^M(Q); M=2, kd=5, z=2.5$			
	$N=M+2l+1$		$N=-M-2l-2$		$N=M+2l+1$		$N=-M-2l-2$	
	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$	$l=0$	$l=4$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
30	1.108 E-1	-4.197 E-3	2.970 E-2	4.696 E+2	7.716 E-2	4.473 E-4	-3.828 E-1	1.604 E+3
60	2.287 E-1	3.946 E-6	1.068 E-2	-1.706 E+3	7.419 E-2	8.998 E-5	-7.081 E-1	1.175 E+3
90	2.932 E-1	-5.014 E-3	-7.157 E-2	4.305 E+3	4.457 E-2	9.845 E-6	-8.274 E-1	-2.609 E+3
120	2.490 E-1	2.187 E-4	-1.288 E-1	5.708 E+3	2.258 E-2	1.269 E-6	-6.970 E-1	-4.345 E+3
150	1.354 E-1	1.193 E-3	-9.668 E-2	-3.902 E+4	9.283 E-3	2.226 E-7	-3.895 E-1	-2.679 E+3
180	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

〈3.1〉 円環座標による Force-Free 磁界の解析解
プラズマに力を及ぼさない磁界を Force-Free 磁界
と言い、その方程式は

$$\nabla \times \mathbf{B} = \alpha \mathbf{B} \quad (33)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (34)$$

である。 α =定数と置いて、軸対称磁界 $\mathbf{B} = \mathbf{B}(\sigma, \phi) = (B_\sigma, B_\phi, B_z)$ を考えると、(33), (34)式より

$$B_\sigma = \frac{1}{\alpha} \frac{1}{h_2 h_3} \frac{\partial}{\partial \phi} (h_3 B_\phi) \quad (35)$$

$$B_\phi = -\frac{1}{\alpha} \frac{1}{h_3 h_1} \frac{\partial}{\partial \sigma} (h_3 B_\phi) \quad (36)$$

$$\frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \frac{\partial}{\partial \sigma} \left(h_3 \frac{\partial}{\partial \sigma} B_\phi \right) + \frac{\partial}{\partial \phi} \left(h_3 \frac{\partial}{\partial \phi} B_\phi \right) - \frac{h_1 h_2}{h_3} B_\phi \right\} + \alpha^2 B_\phi = 0 \quad (37)$$

が得られる。(37)式は、ヘルムホルツ方程式 ($\nabla^2 + \alpha^2$) ($B_\phi e^{i\phi}$)=0 に等しいから、 B_ϕ は S_N^1, T_N^1 の一次結合によって表わされる。 N が負の整数の場合を独立解として採用すると、

$$B_\phi = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l S_{-2l-2}^1(P) + b_l S_{-2l-2}^1(Q) + c_l T_{-2l-3}^1(P) + d_l T_{-2l-3}^1(Q)] \quad (38)$$

となる。 a_l, b_l, c_l, d_l は任意定数である。

XZ 平面に射影した磁力線の方程式 $B_x/dX = B_z/dZ$ の円環座標による表示式 $B_z/(h_1 d\sigma) = B_\phi/(h_2 d\phi)$ に(35), (36)式を代入すると $d(h_3 B_\phi) = 0$ となり、トロイダル磁気面関数

$$\Phi = h_3 B_\phi \quad (39)$$

を得る。

〈3.2〉 境界条件 (38)式に境界条件を与えて、 a_l, b_l, c_l, d_l を決定する。境界は円環状の完全導体によって構成されているから、境界条件は ϕ に関して

偶関数である。従って、 $c_l = d_l = 0$ である。完全導体の表面 ($\sigma = \sigma_w$) では磁界の垂直成分 $B_\sigma = 0$ だから、(35)式より

$$B_\phi = c/h_3, \quad c = \text{定数} \quad (40)$$

が得られる。両辺のフーリエ係数を求めると、無限連立代数方程式

$$\xi_n = \sum_{l=0}^{\infty} [a_l H_{n,l}(P) + b_l H_{n,l}(Q)] \quad (41)$$

となる。ここで、

$$\xi_n = \frac{c}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\phi}{h_3} d\phi \quad (42)$$

$$H_{n,l}(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} S_{-2l-2}^1(\omega) \cos n\phi d\phi \quad (43)$$

である。 $\lim_{z \rightarrow 1} S_N^1(Q) = \infty$ であるから、円環導体外部の Force-Free 磁界を与えるには、 $b_l = 0$ でなければならない。それゆえ、 a_l, b_l は次のような行列の関係式によって表わされる。

$$\mathbf{a} = \mathbf{H}(P)^{-1} \boldsymbol{\xi}, \quad \mathbf{b} = 0 \quad (44)$$

ただし、列ベクトル $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \boldsymbol{\xi}$ の要素は a_l, b_l, ξ_n であり、行列 $\mathbf{H}$ の要素は $H_{n,l}$ である。同様に $\lim_{z \rightarrow \infty} S_N^1(P) = \infty$ であるから、円環導体内部の Force-Free 磁界は

$$\mathbf{a} = 0, \quad \mathbf{b} = \mathbf{H}(Q)^{-1} \boldsymbol{\xi} \quad (45)$$

によって与えられる。

〈3.3〉 数値計算 (42), (43) 式の積分は、以下で与えられる I_n^n の無限級数

$$\xi_n = \frac{c}{d \sinh \sigma_w} I_{-1}^n(z_w) \quad (46)$$

$$H_{n,l}(\omega) = \frac{\Gamma(N+M+1) \pi^{1/2} (-1)^M (\alpha d)^N}{\Gamma(N-M+1) 2^{(M+N)/2+1}} \times \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{r=0}^l \frac{(\alpha d)^{2p} (-1)^p \left(\frac{M-N}{2}\right)_r}{2^p p! r!}$$

$$\begin{aligned} & * \left(\frac{N+M+1}{2} \right) r (z w^2 - 1)^{r/2} \\ & \frac{\Gamma(N+3/2+p)}{\times \omega_{p+(N+M)/2}^{-M-r} (z w) I_{p+(M+N)/2+r}^n (z w)} \\ & \dots\dots\dots (47) \end{aligned}$$

によって計算される。ただし $M=1, N=-M-2l-1$, $zw = \cosh \sigma w$ (円環導体壁のアスペクト比) であり,

$$I_\nu^n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\cos n\phi}{(z - \cos\phi)^\nu} d\phi \dots\dots\dots (48)$$

$$\begin{aligned} I_k^n(z) &= \frac{\Gamma(k+n)}{\Gamma(k)\Gamma(n+1)} \frac{(z^2-1)^{-k+1/2}}{2^{k-1}(z+\sqrt{z^2-1})^{n-k+1}} \\ &\times F(-k+1, n-k+1, n+1, \\ &1/(z+\sqrt{z^2-1})^2) \quad (k \geq 1) \dots (49) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_k^n(z) &= \frac{(-1)^n \Gamma(-k+1)}{\Gamma(-k+n+1)} (z^2-1)^{-k/2} \\ &\times P_{-k}^n(z/\sqrt{z^2-1}) \quad (k < 1) \dots (50) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{k+1/2}^n(z) &= \frac{\Gamma(k-n+1/2)}{\Gamma(k+1/2)} (z^2-1)^{-k/2-1/4} \\ &\times P_{k-1/2}^n(z/\sqrt{z^2-1}) \dots\dots (51) \end{aligned}$$

である。 n は零, または正整数であり, k は整数である。(49)~(51)式はルジャンドル陪関数の積分表示式⁽⁴⁾から導かれる。

実際の計算にあたっては, $c_i=d_i=0$ と外部解(44)式, 内部解(45)式より得られる a_i, b_i をそれぞれ(38)式に代入すると外部解と内部解の B_ϕ が求まり, 更に(39)式より磁気面が求められる。 H を 10×10 の行列としたときに, 計算精度は境界条件(40)式が $10^{-3}\%$ の誤差率で一致する程度である。磁気面の計算例を, 第

円環のアスペクト比 $zw = R_w/r_w$, 円環の大半径 $R_w = 10$, 小半径 $r_w = 4$, $\alpha = 0.5$

第2図 円環完全導体壁の外部の磁気面
Fig. 2. Magnetic surfaces outside the perfectly conducting wall of the torus.

円環のアスペクト比 $zw = R_w/r_w$, 円環の大半径 $R_w = 10$, 小半径 $r_w = 4$, $\alpha = 0.5$

第3図 円環完全導体壁の内部の磁気面
Fig. 3. Magnetic surfaces inside the perfectly conducting wall of the torus.

2図, 第3図に示す。第2図は円環導体外部の解を, 第3図は内部の解を示す。

なお, この理論は $\alpha=0$ (真空磁界) の場合を含んでいないので, $\alpha=0$ に対する磁界を別の手法で求める。 $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$ を満足するベクトル・ポテンシャル $\mathbf{A}$ を導入して $\alpha=0$ と置き (33), (34) 式を変形すると, ラプラスの方程式 $\nabla^2 (A_\phi e^{i\phi}) = 0$ となり, A_ϕ は円環関数 $P_{n-1/2}^1(z), Q_{n-1/2}^1(z)$ の一次結合によって与えられる。真空磁界のトロイダル磁気面関数は $\Phi_0 = h s A_\phi$ となる。

ヘルムホルツ方程式 $(\nabla^2 + \alpha^2)(B_\phi e^{i\phi}) = 0$ の解析解を用いて得られた Force-Free 磁界の正当性の検証を行なうため, Force-Free 磁界の磁気面関数値 Φ と真空磁界の磁気面関数値 Φ_0 との誤差率 $\eta(\alpha) = (\Phi - \Phi_0)/\Phi_0$ を, $\alpha = 0.2, 0.1, |\alpha| \leq 0.01$ ($\alpha \neq 0$) に対し円環外部と内部の点で数値的に求め, $\alpha \rightarrow 0$ のときに Φ と Φ_0 がよく一致するかどうかを調べた。それぞれの α に対する η は, 円環導体外部の点 $Z=0, X=1$ で $\eta \approx 16.5\%, 5.59\%, 0.0\%$ となり, 円環導体内部の点 $Z=0, X=10.6$ で $\eta \approx 17.7\%, 4.03\%, 0.0\%$ となった。このように Force-Free 磁界の磁気面は, α の値が零に近づくと同じ境界条件を持つ真空磁界の磁気面に近づき, $|\alpha| \leq 0.01$ ($\alpha \neq 0$) のときは真空磁界の磁気面によく一致して, 理論の正当性が検証された。

4. あとがき

円環座標によるヘルムホルツ方程式の内部解と外部

解を求め、更に電子計算機による数値計算コードを試作し、数値計算例を表示した。特に内部解の性質については詳しく述べた。

応用例として、円環導体壁を境界に持つ、軸対称 Force-Free 磁界を、境界条件をフーリエ展開する方法により計算した。フーリエ係数の積分はルジャンドル陪関数と、ガウスの超幾何級数表示によって与えられる。円環導体を完全導体のプラズマと見ると、この計算は Force-Free 磁界によるプラズマの平衡問題につながり、更に安定性の問題につながる。

円環形状をとる工学的諸問題の多くは、そのアスペクト比 $z=R_0/r_0$ が十分大きいとき円柱座標による近似を用いて取扱われているが、アスペクト比が小さいときの円柱座標による取扱いは極めて困難である。ところが、本論文のヘルムホルツ方程式の円環座標による解はアスペクト比 z の関数として表わされ、アスペクト比の近似を考慮せずに、問題を扱うことができる。

最後に、本研究の Force-Free 磁界の計算にあたり有益な御助言をいただいた電子技術総合研究所の鬼頭正史博士に厚くお礼申し上げます。なお、この研究は昭和 52 年度文部省科学研究費の補助を受けて行なわれたことを付記して謝意を表します。

(昭和 53 年 1 月 19 日受付)

文 献

- (1) E. W. Hobson: "The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics", p. 178, 433 (1965) Chelsea Publishing Company
- (2) V. H. Weston: *Quart. Appl. Math.* 15, 420 (1957)
- (3) V. H. Weston: *ibid.* 16, 237 (1958)
- (4) N. G. van Kampen & B. U. Felderhof: "Theoretical Methods in Plasma Physics" p. 40 (1967) North-Holland
- (5) J. P. Goedbloed: *Physica* 53, 501 (1971)

付 録

円環内部の問題に対するヘルムホルツ方程式の解 (11) 式の積分区間を変更し、(16) 式の $\delta(Q)$ が零に

相当する式を求めて定理を変形する。 $\omega_p = Q_p$ のとき、 $F(z)$ に作用する積分演算子 $\hat{I}(M, r)$ を

$$\begin{aligned} & I(M, r) F(z) \\ &= Q_r^M(z) \int_{z_0}^z \frac{dy}{(1-y^2)[Q_r^M(y)]^2} \\ & \times \int_1^y Q_r^M(x) F(x) dx \dots\dots\dots (付 1) \end{aligned}$$

と定義すると、 $c_1=z_0$, $c_1'=z_0$, $c_2=c_2'=1$ のとき、(9), (10) 式は (12), (13) 式と同じ形で表わされる。定理の (14), (15) 式はそのまま使う。定理の (16) 式の証明と同様に、 $r=R$ と置いて (21) 式によって (付 1) 式の右辺の積分を実行すると、

$$\begin{aligned} & \hat{I}(M, R) F(z) \\ &= -\{a(M+2X-R-1)+b\}(2X)^{-1} \\ & \times Q_R^M(z)[G(M, X, X-R)/Q_R^M(y)]_{y=z}^z, \\ & \dots\dots\dots (付 2) \end{aligned}$$

となる。 z_0 に $[G(M, X, X-R)/Q_R^M(y)]_{y=z_0} = (z_0^2 - 1)^{X/2} Q_{X-R-1}^{M-X}(z_0)/Q_R^M(z_0) = 0$ を満足する複素数を選ぶと、(付 2) 式の右辺は

$$\begin{aligned} & \hat{I}(M, R) F(z) \\ &= -\{a(M+2X-R-1)+b\}(2X)^{-1} \\ & \times G(M, X, X-R) \dots\dots\dots (付 3) \\ &= I(M, R) F(z) - \{a(M+2X-R-1) \\ & +b\}(2X)^{-1} \delta(Q) D_{X,R}^M Q_R^M(z) \\ & \dots\dots\dots (付 4) \end{aligned}$$

となる。(付 3), (付 4) 式は、(16) 式で仮に $\delta(Q)=0$ と置いた場合の形をしている。ゆえに、(16) 式で仮に $\delta_{\pm}^m(Q)=0$ と置いて得られる解 $\Psi_{\pm p}^m(Q)$, $\Psi_{0p}^m(Q)$ は (付 1), (付 3) 式を用いて得られるヘルムホルツ方程式の解に等しい。それゆえ、 $\Psi_{\pm p}^m(Q)$, $\Psi_{0p}^m(Q)$ を独立な解の基本系とみなすことができ、(16) 式を用いて得られる $\delta(Q)=1$ ($c_1=c_2=c_1'=c_2'=1$) の場合の解は $\Psi_{\pm p}^m(Q) = \sum_{n=p}^{\infty} \alpha_n \Psi_{\pm n}^m(Q)$, $\Psi_{0p}^m(Q) = \sum_{n=p'}^{\infty} \beta_n \Psi_{0n}^m(Q)$ と書ける⁽³⁾。