UDC 621.372.2.029.6.049.75-418: 621.3.095: 621.315.61

論文

53-A52

マイクロストリップ線路の有限要素解析 におけるスプリアス・モード

非会員 池 内 雅 紀 (立命館大)

正 員 井 上 和 夫 (立命館大)

正 員 沢 見 英 男 (岡山理科大)

非会員 仁 木 滉 (岡山理科大)

1. ま え が き

今日、マイクロ波集積回路(MIC)用の伝送線路として用途に応じ様々の特徴を備えた構成が提案されてきている⁽¹⁾⁻⁽³⁾。それらにはマイクロストリップなどの極めて単純な構成の線路をはじめ、最近の共平面形ストリップ線路⁽⁴⁾⁽⁵⁾などの比較的複雑な構成の線路まである。他方、線路の解析法は従来、電磁波伝搬モードをTEM波に近似した理論的報告が多く行なわれており、一定の成果を得てきたと言えるだろう。しかしながら、線路の不均質な構成を考えただけでも、もはや基本伝搬モードはTEM波とは言えないし、更に高マイクロ波帯での線路の使用を考えるならば高次モードの影響も予想される。従って、より一般的な適用範囲の広い伝搬モード解析、線路解析の方法が求められている。実際、このための解析法が幾つか報告されているが⁽⁴⁾⁻⁽¹³⁾、これらの解析法の多くは適用範囲に難点があったり⁽⁸⁾⁻⁽¹¹⁾、解の精度評価の方法が不明である⁽¹⁰⁾⁻⁽¹¹⁾。また、示されている結果には相当異なったものも見うけられる⁽¹²⁾⁽¹³⁾。

本稿では、近年マイクロ波工学への応用が盛んな有限要素法に着目し、MIC用伝送線路の伝搬モード解

析に伴う諸問題を議論する。有限要素法は本来種々の線路構成への応用が容易であり、また得られる解の精度を系統的に上げることのできる数値的手法である。にもかかわらず有限要素法の適用例は、筆者らの知る限り最も単純な構成を有するシールド形単一および結合ストリップ線路のみである⁽¹³⁾⁻⁽¹⁵⁾。この主要な原因はMIC伝送線路の変分表現の不明確さと、扱いの極めて困難な、不明なスプリアス・モードが、その伝搬モードの解析過程で発生することにあると考えられる。スプリアス・モードに関しては、幾つかの報告があるが⁽¹⁵⁾⁻⁽¹⁷⁾、そこでは多くの不明な点や誤りを見いだすことができる。筆者らは、これらのスプリアス・モードに関する従来の誤りを指摘しながら、スプリアス・モードが全くの非物理的なモードであり、有限要素解析独特の解であることを、幾つかの方法で明らかにする⁽¹⁸⁾。更に、電磁界の変分表現とそれから得られる行列固有系に関する解析的および数値的考察を通して、スプリアス・モードの性質と発生原因を述べる。最後に、ここで導出された変分表現は、一般的な多誘電体層を有する線路に対しても適用可能であることを述べ、一例として共平面形ストリップ線路の伝搬モード解析結果を報告する。

2. 基本方程式

MIC用伝送線路は、一般に第1図のような均質、無損失な誘電体線路 (i) を幾つか結合することによって構成されている $(i=1, 2, \dots, n)$ と考えることができる。ただし、境界 C_i はその全体あるいは一部が完全導体 (C_i^*) あるいは他の異なる誘電体線路と接して

Spurious Solutions in the Finite Element Analysis of Microstrip Lines. By Masatoshi Ikeuchi, Non-member, Kazuo Inoue, Member (Faculty of Science and Engineering, Ritsumeikan University), Hideo Sawami, Member & Hiroshi Niki, Non-member (Faculty of Science, Okayama College of Science).

池内雅紀: 非会員, 立命館大学理工学部

井上和夫: 正員, 立命館大学理工学部

沢見英男: 正員, 岡山理科大学理工学部

仁木 滉: 非会員, 岡山理科大学理工学部

第1図 均質な誘電体線路断面

Fig. 1. The cross section of homogeneous dielectric line.

いる (C_i') のものとする。筆者らは、まず伝送線路全体ではなく、このような均質な誘電体線路 (i) に関する電磁波伝搬を考える。この線路では、当然 E 波と H 波の結合した混成波を仮定しなければならない。いまこの線路の断面 Ω_i 内の伝搬軸 (z) 方向成分を E_{zi} , H_{zi} とするならば、マクスウェルの方程式から次のヘルムホルツの方程式が得られる。

$$\nabla_t^2 E_{zi} + k_i^2 E_{zi} = 0 \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla_t^2 H_{zi} + k_i^2 H_{zi} = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

ただし、

$$\nabla_t^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2; \quad k_i^2 = \epsilon_{ri} (\omega/c)^2 - \beta^2$$

$$c = 1/(\epsilon_0 \mu_0)^{1/2}; \quad i = 1, 2, \dots, n$$

なお、すべての電磁界成分 $\mathbf{E}_i = (E_{xi}, \mathbf{E}_{ti})$, $\mathbf{H}_i = (H_{xi}, \mathbf{H}_{ti})$ は $\exp\{j(\omega t - \beta z)\}$ の変化をするものと考えた。また、横方向成分 $\mathbf{E}_{ti}, \mathbf{H}_{ti}$ は、 E_{zi} および H_{zi} を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} k_i^2 \mathbf{E}_{ti} &= -j\beta \left\{ \nabla_t E_{zi} \right. \\ &\quad \left. - (\omega \mu_0 / \beta) \mathbf{u}_z \times \nabla_t H_{zi} \right\} \\ k_i^2 \mathbf{H}_{ti} &= -j\beta \left\{ \nabla_t H_{zi} \right. \\ &\quad \left. + (\omega \epsilon_{ri} / \beta) \mathbf{u}_z \times \nabla_t E_{zi} \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\mathbf{u}_z$ は z 方向の単位ベクトルを示す。

この場合、次のような境界・連続条件を満足しなければならない。線路断面 Ω_i の境界 C_i の全体あるいは一部が、

(i) 外部しゃへい導体あるいは内部導体であるとき (外部境界と呼び C_i^* で表わす)

$$E_{zi} = 0; \quad \partial H_{zi} / \partial n_i = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

(ii) 他の誘電体線路との境界 (内部境界と呼び、 C_i' で表わす) であるとき

$$E_{si} = E_{sj}; \quad H_{si} = H_{sj} \quad \dots\dots\dots (5)$$

である。ただし、 $i, j (i \neq j)$ は互いに隣接する線路断面 Ω_i, Ω_j を表わしており、 s_i は境界 C_i 上の接線方向を示す。

3. 誘電体線路の変分表現

誘電体線路内の E 波および H 波に関するスカラー・ポテンシャルを次のように定める。

$$\phi_i^{(h)} = H_{zi}; \quad \phi_i^{(e)} = (\omega \epsilon_0 / \beta) E_{zi} \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、(1), (2) 式では k_i^2 は媒質に依存しているので、特定の媒質 ($i=1$, 例えば真空) に関して表わしておけば次式が得られる。

$$R_i L_i \nabla_t^2 \phi_i + k_i^2 L_i \phi_i = 0 \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$$L_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \epsilon_{ri} \epsilon_0 \end{bmatrix}; \quad \phi_i = \begin{bmatrix} \phi_i^{(h)} \\ \phi_i^{(e)} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$R_i = (k_1/k_i)^2 = (\epsilon_{r1} - \epsilon_e) / (\epsilon_{ri} - \epsilon_e) \quad \dots\dots (9)$$

$$\epsilon_e = (\beta c / \omega)^2 = 1/v_p^2 \quad \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 ϵ_e は実効誘電率、 v_p は光速 c に対する位相速度比、 R_i は k_1^2 と k_i^2 を関連づけており、これらの k_1, k_i をもつ線路を結合するためのパラメータ (単に結合パラメータと呼ぶことにする) を意味する。

誘電体線路の変分表現として、ここでは単に (7) 式の二次形式をとることにする。いま真値 ϕ_i に対する試験関数を ψ_i とし、 k_i^2 は $-R_i \nabla_t^2$ に対する固有値であることを考慮すれば、二次形式 I_i は

$$I_i(\psi_i; k_i, R_i) = -\langle \psi_i, R_i L_i \nabla_t^2 \psi_i \rangle - k_i^2 \langle \psi_i, L_i \psi_i \rangle \quad \dots\dots (11)$$

となる。ただし、 $\langle \rangle$ は線路断面 Ω_i に関する内積表現を示す。

(11) 式にグリーンの定理を適用すると、

$$I_i(\psi_i; k_i, R_i) = \langle \nabla_t \psi_i, R_i L_i \nabla_t \psi_i \rangle - k_i^2 \langle \psi_i, L_i \psi_i \rangle - \oint_{C_i} \psi_i^T R_i L_i (\partial \psi_i / \partial n_i) d s_i \quad \dots\dots (12)$$

となる。ただし、 $\oint_{C_i}$ は境界 C_i に関する積分を示しており、 T は転置をとることを意味する。

(12) 式の右辺最終項は、 ψ_i が (4) 式の第1式を満たすならば、外部境界 C_i^* に対して零になる。しかし、そのとき内部境界 C_i' に対しては零にはならない。ところで、 C_i' 上における電磁界の連続条件 (5) 式は次のように書き直すことができる。

$$L_i (\partial \phi_i / \partial n_i) = \epsilon_e \{ P (\partial \phi_i / \partial s_i) + j (k_i^2 / \beta) P A_i \} \quad \dots\dots\dots (13)$$

ただし、

$$A_i = \begin{bmatrix} H_{si} \\ (\omega \epsilon_0 / \beta) E_{si} \end{bmatrix}; \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \quad \dots\dots (14)$$

(13) 式を (12) 式の右辺最終項に用い、更にその項に

ストークスの定理を適用すれば⁽¹⁴⁾、次の変分表現が得られる。

$$\begin{aligned} I_i(\psi_i; k_1, R_i) = & \langle \nabla_i \psi_i, R_i L_i \nabla_i \psi_i \rangle \\ & - k_1^2 \langle \psi_i, L_i \psi_i \rangle \\ & - \int_{\Omega_i} \nabla_i \psi_i^T R_i \varepsilon_e P \times \nabla_i \psi_i \cdot \mathbf{u}_z d\Omega_i \\ & - j \int_{C_i'} \psi_i^T k_1^2 (\varepsilon_e / \beta) P A_i ds_i \dots \dots (15) \end{aligned}$$

この変分表現の妥当性を調べるために、まず試験関数 ψ_i に関して(15)式の第1変分をとると次のようになる。

$$\begin{aligned} \delta I_i = & \oint_{C_i} \delta \psi_i^T \left(L_i \frac{\partial \psi_i}{\partial n_i} - \varepsilon_e P \frac{\partial \psi_i}{\partial s_i} \right) ds_i \\ & - j \int_{C_i'} \delta \psi_i^T k_1^2 (\varepsilon_e / \beta) P A_i ds_i \\ & - \int_{\Omega_i} \delta \psi_i^T (R_i L_i \nabla_i^2 \psi_i + k_1^2 L_i \psi_i) d\Omega_i \\ & \dots \dots \dots (16) \end{aligned}$$

$\delta I_i \rightarrow 0$ に対して C_i^* 上で $\psi_i^{(n)} = 0$ の試験関数 ψ_i を選べば、 C_i^* 上で $\partial \psi_i^{(n)} / \partial n_i = 0$ 、更に $E_s = 0$ を満たし、 C_i' 上で(13)式を満たして $\psi_i \rightarrow \phi_i$ となる。また k_1^2 も真値に接近する。この停留点の性質は、ル・ジャンドルの条件⁽¹⁹⁾によって知ることができる。結合パラメータ $R_i > 0$ に対して停留点は極小となり、 $R_i < 0$ に対して極小となるとは限らない。

4. 誘電体線路の有限要素解析

均質な誘電体線路断面 Ω_i を例えば第2図に示すような三角形要素によって分割し、その境界 C_i にできる限り適合するように近似しておく。そのとき、変分表現(15)式は各要素 l に関する変分表現 $I_i^{(l)}$ の和として近似できる。

$$I_i(\psi_i; k_1, R_i) \approx \sum_l I_i^{(l)}(\psi_{il}; k_1^h, R_i) \dots \dots \dots (17)$$

ただし、 k_1^h は k_1 の近似値、 ψ_{il} は要素 l 内のポテンシャルを表わしており、 ϕ_i の近似関数である。

l: 要素番号, j: 節点 (j=1, 2, 3)

第2図 三角形要素

Fig. 2. A triangular element.

変分表現 I_i に対する極値条件を(17)式に用いれば、

次の行列固有系が得られる⁽¹⁸⁾⁽²⁰⁾。

$$\mathbf{S}_i \{\psi_i\} = (k_1^h)^2 \mathbf{M}_i \{\psi_i\} \dots \dots \dots (18)$$

ただし、 $\{\psi_i\}$ は Ω_i 内のすべての節点上のポテンシャル値から成る列ベクトル、 $\mathbf{S}_i$ 、 $\mathbf{M}_i$ はそのときの全体の剛性および質量行列を示す。

誘電体線路に関する行列固有系(18)式の性質は次のようにまとめられる。

(i) 質量行列 $\mathbf{M}_i$ は実対称正定値行列である。

(ii) 剛性行列 $\mathbf{S}_i$ は結合パラメータ R_i の値によって、次の異なる性質をもつ実対称行列である。速波 ($0 < \varepsilon_e < 1$; $R_i > 0$) に対して正定値、遅波 ($1 < \varepsilon_e < \varepsilon_r$; $R_i < 0$) に対して不定値行列となる。また、 $\varepsilon_e = 1$ および $\varepsilon_e = \varepsilon_r$ では特異な行列となる。

これらの性質は、変分表現(15)式に対するル・ジャンドルの条件と対応しており、固有値および固有ベクトルの極値としての性質を決定づける。速波領域では固有値 $(k_1^h)^2$ は一意に真値に対する上界となるが、遅波領域ではそうであるとは限らない。

5. MIC 伝送線路

MIC 伝送線路に対する変分表現は、均質な誘電体線路に対する変分表現(15)式を直接結合すれば得られる。

$$\begin{aligned} I = & \sum_{i=1}^n I_i(\psi_i; k_1, R_i) \\ = & \sum_{i=1}^n \left\{ \langle \nabla_i \psi_i, R_i L_i \nabla_i \psi_i \rangle - k_1^2 \langle \psi_i, L_i \psi_i \rangle \right. \\ & \left. - \int_{\Omega_i} \nabla_i \psi_i^T R_i \varepsilon_e P \times \nabla_i \psi_i \cdot \mathbf{u}_z d\Omega_i \right\} \\ & \dots \dots \dots (19) \end{aligned}$$

ただし、 n は伝送線路を構成する均質な誘電体線路の数である。また、(15)式の右辺最終項から成る項は一般に内部境界 C_i' が往路と復路を構成するために零となる。

ところで、変分表現(19)式は伝送線路全体が完全導体によってしゃへいされている場合(閉領域問題)だけでなく、いわゆる Unbounded problem 開領域問題^{(21)~(23)}に対しても妥当である。ただその場合、次のような操作を加えておく必要がある。便宜上、無限の広がりを持った誘電体線路断面(開領域) Ω_i 内に適当な境界 C_i'' を設定し、有界な内部領域 $\Omega_i^{(in)}$ と非有界な外部領域 $\Omega_i^{(ex)}$ に分割する(第3図参照)。その変分表現 J_i は(15)式より次のようになる。

$$J_i = J_i^{(in)}(\psi_i; k_1, R_i) + J_i^{(ex)}(\psi_i^E; k_1, R_i) \dots \dots \dots (20)$$

第3図 開領域問題

Fig. 3. Unbounded problem.

ただし、 $J_i^{(in)}, J_i^{(ex)}$ はそれぞれ $\Omega_i^{(in)}, \Omega_i^{(ex)}$ に関する変分表現であり、(15)式と同じ形式をもつ。また ϕ_i^E は $\Omega_i^{(ex)}$ 内の任意の点でのポテンシャル値を示す。変分表現 $J_i^{(ex)}$ にグリーンの定理を適用すると、次式が得られる。

$$\begin{aligned} J_i^{(ex)} = & - \int_{C_i''} (\phi_i^E)^T R_i L_i \left(\frac{\partial \phi_i^E}{\partial n_i''} \right) ds_i'' \\ & + \int_{C_i''} (\phi_i^E)^T R_i \epsilon_e P \left(\frac{\partial \phi_i^E}{\partial s_i''} \right) ds_i'' \\ & + j \int_{C_i''} (\phi_i^E)^T k_1^2 \left(\frac{\epsilon_e}{\beta} \right) P A_i ds_i'' \end{aligned} \quad (21)$$

ただし、 $\Omega_i^{(ex)}$ の境界が内部境界 C_i' を持たないならば、(21)式の右辺第2項および第3項は現われない。なお、 ϕ_i^E は $\Omega_i^{(ex)}$ 内で(7)式を満足しているから面積分の項は現われない。 $\Omega_i^{(ex)}$ 内にはエネルギーの湧出点はないので、 ϕ_i^E はグリーン関数と C_i'' 上のポテンシャル ϕ_i^c を用いて積分表現され⁽²²⁾⁽²³⁾、最終的に(21)式は単に便宜的な境界 C_i'' 上の ϕ_i^c によって表わされる。従って、一般に m 個の開領域と n 個の開領域を断面に持つ伝送線路の有限要素解析では、次の変分表現を用いればよい。

$$\begin{aligned} J = & \sum_{i=1}^n I_i(\phi_i; k_1, R_i) \\ & + \sum_{i=n+1}^{n+m} \{ J_i^{(in)}(\phi_i; k_1, R_i) \\ & + J_i^{(ex)}(\phi_i^E(\phi_i^c); k_1, R_i) \} \quad \dots (22) \end{aligned}$$

本稿では、以下開領域問題のみを扱うが、開領域問題に対してもその変分表現が(22)式で与えられるために同様に考えることができよう。また、MIC 伝送線路の行列固有系は、均質な誘電体線路に対する固有系(18)式を単純に結合すれば得られる。

6. マイクロストリップ線路のスプリアス・モード

第4図にシールド形マイクロストリップ線路の断面

構成を示す($n=2$)。まず、この線路の有限要素解析によって現われる物理的に可能な伝搬モード数 $N^{(k)}$ をその固有系から調べる。 $N^{(k)}$ は速波領域 ($0 < \epsilon_r < 1$; $V_p > 1$) では正固有値 ($(k_1^h)^2 > 0$) の数であり、遅波領域 ($\epsilon_r > 1$; $V_p < 1$) では負固有値 ($(k_1^h)^2 < 0$) の数である。なお、遅波領域では正固有値は非伝搬波(減衰波)を与える。第5図に示すように、内部境界に接する要素の配置が、一般的かつ現実的であるとき、 $N^{(k)}$ は実効誘電率 ϵ_e に関して次のような変化を示す(第

$$\eta = 2, \epsilon_1 = \epsilon_r \epsilon_0, \mu_1 = \mu_0, \epsilon_r = 1.0$$

第4図 対称なシールド形マイクロストリップ線路の構造

Fig. 4. The symmetric structure of the microstrip line shielded by perfect conductor.

j: 内部境界上の節点, a_i : 要素寸法 ($i=1, \dots, 4$)

第5図 内部境界上の要素

Fig. 5. The elements on the internal boundary.

第6図 モード数の変化

N_i : Ω_i 内の節点数 ($i=1, 2$), N_{12} : 内部境界上の節点数
 $N_{12}^{(e)}$: 内部境界上の電界ポテンシャル値をとる節点数
 $N_{12}^{(h)}$: 内部境界上の磁界ポテンシャル値をとる節点数
 N : 全節点数 (固有系のオーダー)
 $N = N_1 + N_2 + N_{12}, N_{12} = N_{12}^{(e)} + N_{12}^{(h)}$

第6図 モード数の変化

Fig. 6. The behaviors of numbers of modes.

6図を参照)。

(i) $0 < \epsilon_s < 1$ では剛性行列 S_i , 質量行列 M_i ($i=1, 2$) は正定値行列であるから, 遅波モード数 $N^{(s)}$ は固有系のオーダー N と一致する。以下の遅波領域 [(ii)~(iv) 項] では剛性行列 S_i が不定値となるが, $N^{(s)}$ は M_i が正定値であるために S_i のみの考察によって知られる。

(ii) $1 < \epsilon_s \leq \epsilon_{12}^{(e)}$ では, 遅波モード数 $N^{(s)}$ は $N_{12}^{(e)}$ だけ増加する。

(iii) $\epsilon_{12}^{(e)} < \epsilon_s < \epsilon_{12}^{(h)}$ では $N^{(s)}$ は変化しない。

(iv) $\epsilon_{12}^{(h)} \leq \epsilon_s < \epsilon_{r_2}$ では $N^{(s)}$ は $N_{12}^{(h)}$ だけ増加する。

ただし, $N_{12}^{(e)}$, $N_{12}^{(h)}$ は内部境界上の E 波および H 波に関するポテンシャル値を与える節点数, $\epsilon_{12}^{(e)}$ および $\epsilon_{12}^{(h)}$ は剛性行列 S_i ($i=1, 2$) の対角要素を零に導く実効誘電率 ϵ_s の最大値, 最小値となっており, 次式で与えられる。

$$\epsilon_{12}^{(e)} = \max_j \left\{ \frac{\epsilon_{r_1} \epsilon_{r_2} (b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4)}{(b_1 + 2b_2) \epsilon_{r_1} + (b_3 + 2b_4) \epsilon_{r_2}} \right\} \quad (23)$$

$$\epsilon_{12}^{(h)} = \min_j \left\{ \frac{(b_1 + 2b_2) \epsilon_{r_2} + (b_3 + 2b_4) \epsilon_{r_1}}{b_1 + 2b_2 + b_3 + 2b_4} \right\} \quad (24)$$

なお, $\max_j, \min_j$ は節点 j に関して最大および最小をとることを意味する。また,

$$\left. \begin{aligned} b_1 &= (a_3/a_1) + (a_1/a_3) : b_2 = (a_3/a_2) + (a_2/a_3) \\ b_3 &= (a_4/a_2) + (a_2/a_4) : b_4 = (a_4/a_1) + (a_1/a_4) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

以上のことを踏えたうえで, 第7図に示す線路の伝搬モード解析の結果を述べる。これは, Daly 氏⁽¹³⁾によって用いられた線路モデルと対応している。第8図に直接得られた結果を示す。なお, この場合の線路断面内の節点数の関係は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} N &= 70, N_1 = N_{12} = 32, N_{12}^{(e)} = 6 \\ N_{12}^{(e)} &= 2, N_{12}^{(h)} = 4 \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここで, N_i ($i=1, 2$) は Ω_i 内の節点数, $N_{12} = N_{12}^{(e)} + N_{12}^{(h)}$ である。

第9図に, 第8図の結果を補間して得られる基本モード (擬似 TEM モード) および高次モード (導波管モード) の分散曲線を示す。図によれば, 更に細実線で示したカットオフのない非分散的なモードが見いだせる。Corr 氏ら⁽¹⁵⁾は, このようなモードをスプリアス・モードと呼んでいるが, それらはどんな意味を持つのだろうか。まず, この線路の静電実効誘電率 $\epsilon_{e, st}$ を求めておく。

$$\epsilon_{e, st} = (\epsilon_{r_1} + \epsilon_{r_2})/2, \quad \epsilon_{r_1} = 1.0, \quad \epsilon_{r_2} = 4.0 \quad (27)$$

特定の線路に対して $\epsilon_{e, st}$ はただ一つ定まることか

$a=4.0\text{ mm}, b=2.0\text{ mm}, w=2.0\text{ mm}, t_1=t_2=1.0\text{ mm}$
 $\epsilon_{r_1}=1.0, \epsilon_{r_2}=4.0, h_1=1/3\text{ mm}, h_2=1/4\text{ mm}$

第7図 要素の分割例

Fig. 7. The example of subdividing into the elements.

第8図 スプリアス・モードと物理的モードとの結合

Fig. 8. The coupling of the spurious modes and the physical modes.

第9図 分散特性

Fig. 9. Dispersion characteristics.

ら、様々な静電実効誘電率をもつスプリアス・モードは非物理的な解であると考えられる。ところが、第9図でも明らかにように擬似 TEM モードと同じ $\epsilon_{e,sl}$ をもつスプリアス・モードも現われており、これはあたかも伝搬可能な物理的モードの一つであると見なされがちである。Daly 氏はこれを低損失の表面波モードであると報告している⁽¹³⁾。また小西氏は MIC 伝送線路の基本モードの分散性を説明するためにカットオフのない表面波モードを仮定している⁽³⁾。

筆者らは、すべてのスプリアス・モードが非物理的な有限要素解析における独特の解であることを、以下いくつかの方向から明らかにしていく。

(a) スプリアス・モード数および擬似 TEM モードは、既に第6図に示した遅波領域で新たに現われるモード数と一致する。スプリアス・モードの静電実効誘電率 $\epsilon_{e,sl}^{(s)}$ は実際次の範囲内にのみ見いだせる。

$$1 < \epsilon_{e,sl}^{(s)} \leq \epsilon_{12}^{(e)}, \quad \epsilon_{12}^{(h)} \leq \epsilon_{e,sl}^{(s)} < \epsilon_{r2} \quad (28)$$

ただし、この場合、要素寸法比 $h_1/h_2=1$ であるから

$$\epsilon_{12}^{(e)} = 2\epsilon_{r1}\epsilon_{r2}/(\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2}), \quad \epsilon_{12}^{(h)} = (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})/2 \quad (29)$$

となる。また、スプリアス・モード数は、この範囲に $N_{12}^{(e)}=2$, $(N_{12}^{(h)}-1)=3$ 個である。すなわち、(27)~(29)式より、たまたま $(N_{12}^{(h)}-1)$ 個のスプリアス・モードのうちの一つが、擬似 TEM モードと同じ静電実効誘電率をもったに過ぎない。しかも、すべての $\epsilon_{e,sl}^{(s)}$ は要素寸法比と比誘電率に依存していることも明らかである。また、遅波領域であっても $\epsilon_{12}^{(e)} < \epsilon_e < \epsilon_{12}^{(h)}$ ではスプリアス・モードは発生しない。

(b) 次に同じ線路モデルでストリップ導体を取り除いた導波管 ($w=0$) を考えた。この線路では、よく知られているように LSM, LSE モードが伝搬可能である⁽²⁴⁾。第10図に伝搬モードの分散特性を示す。この場合の要素分割は第9図のものと同じである。線路断面内の節点数の関係は次のとおりである。

$$\left. \begin{aligned} N=72, \quad N_1=N_2=30, \quad N_{12}=12 \\ N_{12}^{(e)}=N_{12}^{(h)}=6 \end{aligned} \right\} \dots (30)$$

スプリアス・モード数は $N_{12}=12$ であり、(28)式で与えられた範囲内のみ発生する。図によれば、マイクロストリップ線路と同様に、 $\epsilon_{e,sl}^{(s)} = \epsilon_{12}^{(h)} = (\epsilon_{r1} + \epsilon_{r2})/2$ をもったスプリアス・モードが現われているが、この線路構造では擬似 TEM モードばかりかカットオフのないモードは考えられない。

(c) 以上の(a)マイクロストリップ線路、(b)ス

第10図 分散特性 ($w=0$)

Fig. 10. Dispersion characteristics ($w=0$).

第11図 スプリアス・モード数

Fig. 11. The numbers of spurious modes.

トリップ導体のない線路(スラブ線路)のスプリアスモード数を第11図にまとめて示しておく。このような図は、線路断面の要素分割の時点で作ることができる。

(d) これらの線路解析で、要素寸法を体系的に小さくしたとき評価される解の精度とそれへのスプリアス・モードの影響を調べる(第1表, 第2表参照)。ただし、ここで与えた結果は、補間の操作を加えていない。速波領域 ($\epsilon_e=0.5$) では各高次モードの周波数は一様な収束を示しており、交互に上界あるいは下界が評価されている。それに対し、遅波領域ではそのような収束は見られない。実際、第12図に示すように一つのスプリアス・モードの発生によって物理的モードの実効誘電率の上界性と下界性が入り代わることが見いだせる。また、このことによって真値の存在範囲が絶対的に評価される。

(e) また、第13図に Hornsby 氏⁽¹²⁾, Mittra 氏⁽⁷⁾によって用いられているマイクロストリップ線

第 1 表 マイクロストリップ線路

Table 1. Microstrip line.

要素寸法 (mm)	周波数 (GHz)	速波モード		遅波モード			
		$\epsilon_r=0.5$		$\epsilon_r=2.7$		$\epsilon_r=3.0$	
		第 1 モード	第 2 モード	擬 似 TEM	第 1 モード	擬 似 TEM	第 1 モード
h_1	h_2						
1/2	1/2	34.51	60.35	12.88	94.32	24.67	110.64
1/2	1/3	34.32	61.17	12.86	99.18	22.99	117.59
1/3	1/3	34.21	61.46	13.23	99.53	21.55	117.52
1/3	1/4	34.13	61.68	13.10	101.85	21.35	120.38

$a=4.0\text{ mm}$, $b=2.0\text{ mm}$, $w=2.0\text{ mm}$, $t_1=1.0\text{ mm}$, $t_2=1.0\text{ mm}$
 $\epsilon_{r1}=1.0$, $\epsilon_{r2}=4.0$

第 2 表 スラブ線路 ($w=0$)Table 2. Slab line ($w=0$).

要素寸法 (mm)	周波数 (GHz)	速波モード		遅波モード			
		$\epsilon_r=0.5$		$\epsilon_r=2.0$		$\epsilon_r=3.0$	
		第 1 モード	第 2 モード	第 1 モード	第 2 モード	第 1 モード	第 2 モード
h_1	h_2						
1/2	1/3	32.10	54.38	50.38	76.19	76.14	113.94
1/2	1/3	31.95	55.07	50.82	77.05	77.05	120.70
1/3	1/3	31.91	54.82	50.81	78.97	76.91	121.19
1/3	1/4	31.87	55.17	50.97	80.07	77.25	123.49
文献 (25)	モード	LSM ₁₁	LSM ₁₂	LSM ₁₁	LSM ₁₂	LSM ₁₁	LSM ₁₂
	周波数	31.76	52.09	51.15	77.11	77.55	102.44

$a=4.0\text{ mm}$, $b=2.0\text{ mm}$, $t_1=1.0\text{ mm}$, $t_2=1.0\text{ mm}$, $\epsilon_{r1}=1.0$,
 $\epsilon_{r2}=4.0$

$a=4.0\text{ mm}$, $b=2.0\text{ mm}$, $w=2.0\text{ mm}$, $t_1=t_2=1.0\text{ mm}$
 $\epsilon_{r1}=1.0$, $\epsilon_{r2}=4.0$

第 12 図 擬似 TEM モードの収束

Fig. 12. The convergent behaviors of the quasi-TEM mode.

路モデルに関する解析結果を示す。図によれば、すべてのスプリアス・モードの $\epsilon_{s,i}$ は擬似 TEM モードの $\epsilon_{s,i}$ と完全に異なっているばかりか、それらの分散性も相当異なっているために物理的モードと非物

$a=15.0\text{ mm}$, $b=7.0\text{ mm}$, $t_1=0.5\text{ mm}$, $t_2=1.5\text{ mm}$
 $w=1.0\text{ mm}$, $\epsilon_{r1}=1.0$, $\epsilon_{r2}=9.0$, $h_1=h_2=h=0.25\text{ mm}$
 $N=110$

第 13 図 分散特性

Fig. 13. Dispersion characteristics.

理的モードとの区別が容易にできる。なお、スプリアス・モードは (28) 式で与えられた範囲に $N_{12}^{(e)}=4$, $(N_{12}^{(e)}-1)=5$ 個現われている。

以上、(a)~(e)項によって、すべてのスプリアス・モードは非物理的なモードであり、表面波モードなどではないことは明らかである。また、スプリアス・モードの様々な性質をとらえることができた。

7. む す び

従来、シールド形マイクロストリップ線路の有限要素解析において、その電磁界に関する変分表現が不明確なまま用いられてきた。これに対し本稿では、まず一般的な境界・連続条件をもった均質な誘電体線路に対する変分表現を導出し、それを単純に拡張するだけで一般的な MIC 伝送線路に対する変分表現を構成できることを示した。また、いわゆる開領域問題に対しても、これは有用であることを示した。この変分表現の主な特徴は次のとおりである。

(1) E 波および H 波の二つのスカラー・ポテンシャルに関する単純な応用範囲の広い変分表現である。

(2) 停留関数は二つのスカラー・ヘルムホルツの方程式を満足すると共に、外部境界上では、 $\mathbf{E}_i \times \mathbf{H}_i \cdot \mathbf{n}_i = 0$, $\mathbf{n}_i \times \mathbf{E}_i = 0$ を満足する。内部境界上では連続な試験関数に対してその連続条件を満足する。

(3) しかし他方、その自然境界条件のために内部境界上で $E_{si}=0$, $H_{si}=0$ となる解も可能となる。こ

れは内部境界を通して移動するエネルギー $E_i \times H_i \cdot n_i$ が無いことを意味する。

(4) 速波モードの周波数は一様に上界性あるいは下界性が保証されるが、遅波モードでは必ずしもそうはならない。このとき、変分表現は不定値となる。すなわち、この変分原理は最小原理とはならない。

(5) 誘電体線路を結合する際、結合パラメータ R_i を用いている。そのために遅波領域のいくつかの実効誘電率 ϵ_e に対して変分表現は定義されない。

この変分表現に基づき有限要素解析を行なうと必ず非物理的なスプリアス・モードが現われる。その原因は、上の(3),(4)項である。しかし、次に挙げるスプリアス・モードの特徴を十分にはあきしておくならば、必ずしもこのような解の発生は有限要素解析の欠点を示すものとはならない。

(a) スプリアス・モードはカットオフのない非分散的なモードであり、それらはすべて物理的モードと結合している。

(b) スプリアス・モード数は内部境界上の節点数と関係しており、あらかじめ知ることができる。またそれらの静電実効誘電率 $\epsilon_{e,ss}$ ⁽⁴⁾ の存在範囲は、内部境界に接する要素の寸法比および媒質の比誘電率にのみ関係しており、あらかじめ知ることができる。従って、スプリアス・モードの発生領域とその数を自在に設定できる。

(c) 要素数を体系的に増すことによって、評価される物理的モードの周波数は速波モードに対しては一樣な収束を示すが、遅波モードに対してはそのような収束は見られない。その収束の様子はスプリアス・モードの発生と関連して特徴的であり、真値の存在範囲が絶対的に確定される。

(d) スプリアス・モードは、ストリップ内部導体のない線路に対しても発生する。すなわち、ストリップ導体端での内部境界との不連続性は、スプリアス・モードと関係しない。

今後、筆者らは有限要素法の利点を生かしつつ、より効果的な解析法を追求したい。

(昭和52年5月27日受付, 同53年1月24日再受付)

文 献

- (1) C. P. Wen: "Coplanar waveguide: A surface strip transmission line suitable for non reciprocal gyromagnetic device applications", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-17, p. 1087 (1969)
- (2) T. Hatsuda: "Computation of coplanar-type stripline characteristics by relaxation method and its application to microwave circuits", *ibid.* MTT-23, p. 795 (1975)
- (3) 小西: 「マイクロ波集積回路」p. 21 (昭48) 産報
- (4) 藤木, 他: 「共平面型線路の高次モード」信学論(B), 58-B, p. 61 (昭50-2)
- (5) E. Yamashita & K. Atsuki: "Analysis of microstrip-like transmission lines by nonuniform discretization of integral equations", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-24, p. 195 (1976)
- (6) 藤木, 他: 「単一結合および非対称ストリップ線路における高次モードの解析」信学論(B), 57-B, p. 633 (昭49-10)
- (7) R. Mittra & T. Itoh: "A new technique for the analysis of the dispersion characteristics of microstrip lines", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-19, p. 47 (1971)
- (8) E. J. Denlinger: "A frequency dependent solution for microstrip transmission lines", *ibid.* MTT-19, p. 30 (1971)
- (9) A. Farrar & A. T. Adams: "Computation of propagation constants for the fundamental and higher order modes in microstrip", *ibid.* MTT-24, p. 456 (1976)
- (10) W. J. Getsinger: "Microstrip dispersion model", *ibid.* MTT-21, p. 34 (1973)
- (11) M. V. Schneider: "Microstrip dispersion", *Proc. IEEE*, 60, p. 144 (1972)
- (12) J. S. Hornsby & A. Gopinath: "Numerical analysis of a dielectric-loaded waveguide with a microstrip line: Finite-difference method", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-17, p. 684 (1969)
- (13) P. Daly: "Hybrid-mode analysis of microstrip by finite-element methods", *ibid.* MTT-19, p. 19 (1971)
- (14) Z. J. Csendes & P. Silvester: "Numerical solution of dielectric loaded waveguides: Finite-element analysis", *ibid.* MTT-18, p. 1124 (1970)
- (15) D. G. Corr & J. B. Davies: "Computer analysis of the fundamental and higher order modes in single and coupled microstrip", *ibid.* MTT-20, p. 669 (1972)
- (16) M. K. Krage & G. I. Haddad: "Frequency-dependent characteristics of microstrip transmission lines", *ibid.* MTT-20, p. 678 (1972)
- (17) S. Ahmed & P. Daly: "Finite-element methods for inhomogeneous waveguides", *Proc. IEE*, 116, p. 1661 (1969)
- (18) 池内, 他: 「マイクロストリップ線路のスプリアス・モード」信学会マイクロ波研資 MW 76-26 (昭51-6)
- (19) 小松: 「数学全書・変分学」p. 62 (1975) 森北出版
- (20) G. Strang & G. J. Fix: "An analysis of the finite element method", p. 216 (1973) Prentice-Hall Inc.
- (21) P. Silvester & M. Hsieh: "Finite-element solution of 2-dimensional exterior-field problems", *Proc. IEE*, 116, p. 1743 (1971)
- (22) B. H. McDonald & A. Wexler: "Finite-element solution of unbounded field problems", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* MTT-20, p. 841 (1972)
- (23) B. H. McDonald, et al.: "Variational solution of integral equations", *ibid.* MTT-22, p. 237 (1974)
- (24) R. E. Collin: "Field theory of guided waves" p. 224 (1960) McGraw-Hill