代用磁荷による磁性構造物の磁化評価法

正 員 森

恵 一 (防衛庁)

1. 序 言

車両、船舶、宇宙船などによって埋没磁性物体の磁気探知、機雷掃海、宇宙磁界の観測などを実施するためには、自身から発生する外部磁界を所要の値以下にまで低減する必要が生じる。これら磁性構造物の外部磁界は、大別して構成強磁性材の永久および誘導磁化によるもの、ならびに、とう載電気機器および配線に電流が流れて生ずる漏れ磁束によるものとからなる。従って、外部磁界を小さくするためには、要求の程度に応じて磁性の少ない材料、漏れ磁束の少ない機器を選んで構造物を構成し、永久磁気の除去、更には磁石などによる磁気補償を施すことが必要になる。

これらの構造物は形状が複雑、使用材料も多種類にわたるため、原因から結果としての外部磁界を精度良く推測することは困難であり、最終評価は実測によらざるをえない。問題の性質上、実測値に基づく解析によって、外部磁界の様相のみならず、内部の構成部分が外部磁界に寄与している状況をも知る必要があるため、外部と内部との関係づけが容易に行ないうる解析方法を取らなければならない。

このために考えられる最も普通の方法は、Steinbigler 氏が高電圧電極の電界解析に使用した電荷重畳法、あるいは、代用電荷法⁽¹⁾と類似の仮想磁気双極子を適当に組合せて外部磁界を近似しようとするものである。この方法は、遠距離磁界のみを問題にする場合、あるいは磁気源の位置が既知で、しかもその数が限定されている場合のように、未知量が少ないときには有効である。反対に、未知量が多くなると、一定の外部

磁界を実現させるための仮想磁気双極子の組合せが数多く存在するようになり、内部の評価が困難となる。

一方、実測値を処理するという観点から見ると、未知量の数をなるべく少なく限定し、自由度を大きく取った解析を行なうことが望ましい。このためには、三次元ラプラス方程式を適当な座標系で変数分離して得られる調和関数によって外部磁界を近似するのが良いと考えられ、既に筆者は船舶の磁界解析に細長回転だ円体調和関数を適用する方法を示した⁽²⁾。また Roy 氏は、宇宙船側方磁界の解析に球調和関数をいくらか変形して適用し、結果を等磁界曲線図の形で表示している⁽³⁾。

実測値を処理して得られる調和関数の係数は抽象的な量であり、これを磁界の形で表現しても具体的な内部状態はわかりにくい。そこで筆者は、細長回転だ円体調和関数による解析結果を仮想磁荷の等価的分布に置き換えようとした。このモデルはなるべく現実に近く、しかも直観的にわかりやすいことが望ましいので、磁気多重極子を構造物の中心軸に沿って分布させ、その合成として内部の磁化を評価しようとした。多重極子の分布図を描けば内部の評価が容易となり、磁石などによる磁気補償を計画する場合、その配置および強さを決定する手順が明確となる。

2. 磁性構造物による磁界のポテンシャル

第1図に示すように、磁性構造物 M をすっかり取り囲む閉曲面 S を想定し、 S によって囲まれる領域を V とする。対象する空間内に M 以外の磁気源が存在しないとすると、 S 外では M に基づく磁界のスカラー・ポテンシャル ϕ に関して $\nabla^2\phi=0$ とラプラスの方程式が成立する。そして、 S 上で磁界の法線分力 $\partial\phi/\partial n$ が定まれば、 S 外の空間における ϕ も一義的に定まることは、ノイマンの問題として知られている。

一方、前述の磁性構造物は、外観上、一般に細長い

An Evaluation Method on the Magnetization of a Magnetized Structure by Means of Virtual Magnetic Charges. By Keiichi Mori, Member (The Technical Research and Development Institute, Japan Defense Agency).

森 恵一: 正員, 防衛庁技術研究本部 (現在, 防衛大学校応用物理学教室)

第 1 図 磁性構造物 M を取り囲む閉曲面 S
Fig. 1. Closed surface S surrounding the magnetized structure M .

ので、構造物に外接する細長回転だ円体面を考えると、この面外で ϕ は細長回転だ円体調和関数によって展開できる。すなわち、細長回転だ円体座標系 (ξ, η, ζ) を使用することとすると、回転だ円体面外の点 (ξ', η', ζ') においてはラプラスの方程式の一般解から不要の項を除去し、

$$\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \{A_n^0 Q_n(\xi') P_n(\eta') + \sum_{m=1}^n Q_n^m(\xi') P_n^m(\eta') (A_n^m \cos m\zeta' + B_n^m \sin m\zeta')\} \dots\dots\dots (1)$$

を導入することができる⁽²⁾。 A_n^0, A_n^m および B_n^m は係数である。いま、外接回転だ円体面の外側に S を取り、 S 上で磁界法線分力を実測したとすると、最小自乗法などによって実測値を $\partial\phi/\partial\nu$ にあてはめて係数を求めることができ ϕ は定まる。もし S を回転だ円体面に一致させれば、回転だ円体面調和関数の直交性により、係数はそれぞれ独立に求めることができる。

以上は外部から見た ϕ であるので、次に内部から見ることにする。外部磁界の原因となるものが磁性材の磁化であれ、また電流ループであれ、 S 外については静電界の問題と同様になるので、電荷の代わりに磁荷を仮想し、その総和が 0 になるよう V 内に体分布させることによって ϕ を実現させることができる。回転だ円体座標系の焦点間距離を $2c$ 、体積要素を dv とすると、(1) 式の係数は仮想磁荷の分布密度 $\rho(\xi, \eta, \zeta)$ との間に次の関係を有する⁽²⁾。

$$\left. \begin{aligned} A_n^0 &= \frac{1}{4\pi c} (2n+1) \int_V P_n(\xi) P_n(\eta) \rho dv \\ A_n^m &= \frac{1}{4\pi c} 2(2n+1) (-1)^m \frac{\{(n-m)!\}^2}{\{(n+m)!\}} \\ &\quad \times \int_V P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \cos m\zeta \rho dv \\ B_n^m &= \frac{1}{4\pi c} 2(2n+1) (-1)^m \frac{\{(n-m)!\}^2}{\{(n+m)!\}} \\ &\quad \times \int_V P_n^m(\xi) P_n^m(\eta) \sin m\zeta \rho dv \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (2)$$

(2) 式から ρ が定まれば係数は一義的に定まるけれども、反対に係数が定まっても ρ は一義的に定まらないことが認められる。すなわち、外部磁界が定まっているとしても、これを実現させる ρ は様々の形で存在しうる。従って、外部磁界から内部の磁化を評価しようとする場合、何らかの制限を ρ に課すことが必要になり、評価は等価的なものとならざるをえない。例えば、 ρ を V 内のある回転だ円体面 ξ_0 に局限し一重層分布をしていると想定すると、(2) 式の $P_n(\xi_0)$ および $P_n^m(\xi_0)$ は一定となり、面調和関数 $P_n(\eta), P_n^m(\eta) \cos m\zeta$ および $P_n^m(\eta) \sin m\zeta$ の直交性によって、面分布は一義的に定まる。

しかし、一重層分布によって構造物の磁化を代表させる場合、回転だ円体面をあらかじめ定めてやらないと分布密度は確定しない。しかも、三次元の広がりを持つ曲面上の分布はわかりにくく、また図示もしにくいので、 $\xi_0 \rightarrow 1$ すなわち回転だ円体面を線分に縮退させ、線分上の分布として表わすことにする。構造物が細長くなるほど、このような等価分布は真の姿に近づくことが予想される。

3. 多重極子の等価分布

〈3.1〉 軸的双極子の線分布 第 2 図に示すように、構造物の長手に沿って中心軸を想定し、その軸上構造物の両端に相当する位置に焦点 C_1 および C_2 を置いた細長回転だ円体座標系 (ξ, η, ζ) を設ける。同時に x 軸を中心軸に一致させ、その中央に原点を置いた直角座標系 (x, y, z) を合せて設けると、両座標間には次の関係がある。

$$\left. \begin{aligned} x &= c \xi \eta \\ y &= c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \sin \zeta \\ z &= c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \cos \zeta \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (3)$$

また、回転だ円体座標系の測度係数は

$$\left. \begin{aligned} h_\xi &= c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{\xi^2 - 1}} \\ h_\eta &= c \sqrt{\frac{\xi^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \\ h_\zeta &= c \sqrt{(\xi^2 - 1)(1 - \eta^2)} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (4)$$

となる。

磁荷が回転だ円体面 ξ_0 上にのみ面密度 $\omega(\eta, \zeta)$ で分布しているとする、(2) 式の ρdv は $\omega h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta$ となるので、

$$A_n^0 = \frac{1}{4\pi c} (2n+1) P_n(\xi_0)$$

第2図 磁性構造物に対する直角および細長回転だ円体座標系の配置

Fig. 2. Rectangular and prolate spheroidal coordinate systems allocated to the magnetized structure.

$$\times \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=0}^{2\pi} P_n(\eta) \omega h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta \quad \dots\dots\dots (5)$$

のように、磁荷の一重層分布と係数 A_n^0 との関係を示す式が得られる。そして、

$$\lambda = \int_0^{2\pi} \omega h_\zeta d\zeta \quad \dots\dots\dots (6)$$

と置くと、 $\lambda(\eta)$ は回転だ円体面上 $\eta=\eta$ の円周における磁荷の総和を表わしていることになり、(5)式に代入すると

$$A_n^0 = \frac{1}{4\pi c} (2n+1) P_n(\xi_0) \times \int_{-1}^1 P_n(\eta) c \sqrt{\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \lambda d\eta \quad \dots\dots (7)$$

となる。

ここで、 λ を一定として $\xi_0 \rightarrow 1$ とすると、

$$A_n^0 = \frac{2n+1}{4\pi} \int_{-1}^1 P_n(\eta) \lambda d\eta \quad \dots\dots\dots (8)$$

となるので、磁荷の線分布によって係数 A_n^0 に対応する調和関数 $Q_n(\xi') P_n(\eta')$ を実現しうることとなった。ルジャンドル関数 $P_n(\eta)$ の直交性により、(8)式は

$$\lambda = 2\pi \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 P_n(\eta) \quad \dots\dots\dots (9)$$

と表わすこともできる。

構造物の磁化を評価しようとする場合、元来存在しない磁荷の分布ではわかりにくいので、 λ を軸方向の磁化、すなわち単位長さあたりの磁気双極子モーメントの密度 $X(\eta)$ に換算し、(9)式を代入すると

$$X = c \int_{-1}^1 \lambda d\eta \\ = 2\pi c \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 \int_{-1}^1 P_n(\eta) d\eta \quad \dots\dots\dots (10)$$

となる(付録参照)。

(10)式右辺の積分を書き換え⁽⁴⁾、ルジャンドル陪関数 $P_n^1(\eta)$ の漸化式を使用すると、

$$\int_{-1}^1 P_n(\eta) d\eta = \frac{P_{n-1}(\eta) - \eta P_n(\eta)}{n+1} \\ = \frac{1}{n(n+1)} \sqrt{1-\eta^2} P_n^1(\eta) \quad \dots\dots\dots (11)$$

の関係が得られるので、これを(10)式に代入すれば、結局

$$X = 2\pi c \sqrt{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\eta) \quad \dots\dots\dots (12)$$

あるいは

$$A_n^0 = \frac{2n+1}{4\pi c} \int_{-1}^1 \frac{P_n^1(\eta)}{\sqrt{1-\eta^2}} X d\eta \quad \dots\dots (13)$$

が得られる。

(12)および(13)式から、係数 A_n^0 に対応する調和関数 $Q_n(\xi') P_n(\eta')$ は、回転だ円体座標系の焦点を結ぶ線分上に、その長軸方向を向く双極子を $\sqrt{1-\eta^2} P_n^1(\eta)$ に比例する密度で分布させることによって実現できることがわかる。この軸的双極子は、第2図において x 軸方向を向く x 双極子に相当する。

〈3・2〉放射状多重極子の線分布 前と同じく回転だ円体面 ξ_0 上に磁荷の一重層分布 $\omega(\eta, \zeta)$ を想定すると、(5)式を得たのと同様にして、(2)式の A_n^m および B_n^m は

$$\left\{ \begin{matrix} A_n^m \\ B_n^m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi c} 2(2n+1) (-1)^m \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^2 \\ \times P_n^m(\xi_0) \int_{\eta=-1}^1 \int_{\zeta=0}^{2\pi} P_n^m(\eta) \\ \times \begin{Bmatrix} \cos m\zeta \\ \sin m\zeta \end{Bmatrix} \omega h_\eta h_\zeta d\eta d\zeta \quad \dots\dots (14)$$

と表わされる。そして

$$\left\{ \begin{matrix} \lambda_c^m \\ \lambda_s^m \end{matrix} \right\} = \int_0^{2\pi} \omega \begin{Bmatrix} \cos m\zeta \\ \sin m\zeta \end{Bmatrix} h_\zeta d\zeta \quad \dots\dots\dots (15)$$

と置けば、 $\lambda_c^m(\eta)$ および $\lambda_s^m(\eta)$ はそれぞれ回転だ円体面上 $\eta=\eta$ における磁荷の $\cos m\zeta$ および $\sin m\zeta$ 成分を表わすことになり、これを(14)式に代入すると

$$\left\{ \begin{matrix} A_n^m \\ B_n^m \end{matrix} \right\} = \frac{1}{4\pi c} 2(2n+1) (-1)^m \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^2$$

$$\begin{aligned} & \times P_n^m(\xi_0) \int_{-1}^1 P_n^m(\eta) \\ & \times c \sqrt{\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} \left\{ \frac{\lambda_{c^m}}{\lambda_{s^m}} \right\} d\eta \dots \dots (16) \end{aligned}$$

となる。

(16)式の $P_n^m(\xi_0)$ は $(\xi_0^2 - 1)^{m/2} \tilde{P}_n^m(\xi_0)$, また $P_n^m(\eta)$ は $(1 - \eta^2)^{m/2} \tilde{P}_n^m(\eta)$ と表わすことができ、 $\tilde{P}_n^m$ は $n - m$ 次の多項式となる⁽⁵⁾。一方、 x 軸から回転した円体面までの距離を $r (= \sqrt{y^2 + z^2})$ とすると、(3)式を使用して

$$\begin{aligned} & P_n^m(\xi_0) P_n^m(\eta) \\ & = \{(\xi_0^2 - 1)(1 - \eta^2)\}^{m/2} \tilde{P}_n^m(\xi_0) \tilde{P}_n^m(\eta) \\ & = \frac{r^m}{c^m} \tilde{P}_n^m(\xi_0) \tilde{P}_n^m(\eta) \dots \dots (17) \end{aligned}$$

の関係を見いだすことができる。(17)式を(16)式に代入すれば、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{A_n^m}{B_n^m} \right\} &= \frac{1}{4\pi c^m} 2(2n+1)(-1)^m \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^2 \\ & \times \tilde{P}_n^m(\xi_0) \int_{-1}^1 \frac{P_n^m(\eta)}{(1 - \eta^2)^{m/2}} \\ & \times \sqrt{\frac{\xi_0^2 - \eta^2}{1 - \eta^2}} r^m \left\{ \frac{\lambda_{c^m}}{\lambda_{s^m}} \right\} d\eta \dots \dots (18) \end{aligned}$$

となる。

(18)式中の $r^m \lambda_{c^m}$ および $r^m \lambda_{s^m}$ という量は、磁荷に中心軸からの距離の m 乗を乗じたものに相当しているため、放射状の 2^m 重極モーメントを表わしていることになる。そして $\xi_0 \rightarrow 1$ すなわち $r \rightarrow 0$ のとき、これが一定値 $R_{c^m}(\eta)$ および $R_{s^m}(\eta)$ に収束するものとする、(18)式は

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{A_n^m}{B_n^m} \right\} &= \frac{1}{2\pi c^m} (2n+1)(-1)^m \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^2 \\ & \times \tilde{P}_n^m(1) \int_{-1}^1 \frac{P_n^m(\eta)}{(1 - \eta^2)^{m/2}} \left\{ \frac{R_{c^m}}{R_{s^m}} \right\} d\eta \\ & \dots \dots (19) \end{aligned}$$

となる。ルジャンドル陪関数 $P_n^m(\eta)$ の直交性を利用すれば、放射状の 2^m 重極子の分布密度は、結局、

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{R_{c^m}}{R_{s^m}} \right\} &= \pi c^m (-1)^m (1 - \eta^2)^{m/2} \\ & \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n^m}{B_n^m} \right\} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{P_n^m(\eta)}{\tilde{P}_n^m(1)} \\ & \dots \dots (20) \end{aligned}$$

として与えられる。

(19)および(20)式により、係数 A_n^m および B_n^m に対応する調和関数 $Q_n^m(\xi') P_n^m(\eta') \cos m\zeta'$ および $Q_n^m(\xi') P_n^m(\eta') \sin m\zeta'$ は、放射状の 2^m 重極子を焦点を結ぶ線上、モーメントが $(1 - \eta)^{m/2} P_n^m(\eta)$ に比例する

密度で分布させることによって実現しうることがわかった。

いま、 x 軸から放射方向に微小距離 Δr 隔たった円周上で、 $m\zeta = \cos^{-1}1$ または $\sin^{-1}1$ に相当する位置に各 $\rho/2m$, $m\zeta = \cos^{-1}(-1)$ または $\sin^{-1}(-1)$ に相当する位置に各 $-\rho/2m$ の大きさの磁荷を配置したとしよう。すると、(15)式の λ_{c^m} または λ_{s^m} は ρ に一致し $(\Delta r)^m \rho$ は放射状の 2^m 重極モーメントに相当することになる。従って、(20)式によって R_{c^m} および R_{s^m} の分布形状が定まった場合、 x 軸から Δr 離れた円周上 π/m おきに、単位長さあたり R_{c^m} または $R_{s^m}/(2m \cdot \Delta r^m)$ 相当の磁荷を符号を交互に換えて配置することにより、もとの外部磁界を得ることができる。なお、前述のとおり λ_{c^m} および λ_{s^m} は $\eta = \eta$ の円周上における磁荷のフーリエ係数であったため、 2^m 重極子は

$$\begin{aligned} R^{(m)} &= \sqrt{(R_{c^m})^2 + (R_{s^m})^2} \\ m\zeta_0 &= \tan^{-1} \left(\frac{R_{s^m}}{R_{c^m}} \right) \dots \dots (21) \end{aligned}$$

のように、位相角 $\zeta_0(\eta)$ だけ z 軸方向から回転させた $R^{(m)}(\eta)$ に合成することもできる。特に $m=1$ の場合、 R_{c^1} および R_{s^1} は第2図直角座標系の x および y 双極子の x 軸上線分布に相当することになる。また(12)式および(20)式を比較すると、係数 A_n^0, A_n^1 および B_n^1 に対応する調和関数は、いずれも x 軸上 $\sqrt{1 - \eta^2}$ $P_n^1(\eta)$ に比例する密度で双極子を分布させることによって実現でき、その形状は $n+1$ 次曲線で表わされることがわかる。

〈3・3〉多重極子の離散分布 これまでは多重極子の連続分布について論じてきたので、今度は観点を変え、離散分布について検討する。まず、ディラックの δ 関数を導入する。この関数は、周知のとおり、

$$\int_{-1}^1 \delta(\eta - \eta_i) d\eta = 1 \dots \dots (22)$$

で定義され、任意関数 $f(\eta)$ について

$$\int_{-1}^1 f(\eta) \delta(\eta - \eta_i) d\eta = f(\eta_i) \dots \dots (23)$$

の性質を持つ。

いま、構造物の中心軸上 $\eta = \eta_i$ にモーメントが μ_i である双極子が1個存在しているとする、 x 双極子の中心軸上分布密度 X は、

$$X = \frac{\mu_i}{c} \delta(\eta - \eta_i) \dots \dots (24)$$

と表わすことができる。なんとすれば、(24)式を区間 $[-1, 1]$ において η で積分し、(22)式の関係を使用すると

$$c \int_{-1}^1 X d\eta = \mu_i \dots\dots\dots (25)$$

となり、軸上の双極子モーメントの総和が μ_i に一致するからである。

(24)式を(13)式に代入し、(23)式の関係を使用すると、(13)式は

$$a_n^0 = \frac{\mu_i}{4\pi c^2} (2n+1) \frac{P_n^1(\eta_i)}{\sqrt{1-\eta_i^2}} \dots\dots\dots (26)$$

の形となり、1個の x 双極子と係数との関係を示す式が得られる。 μ_i の a_n^0 に対する効果 a_n^0/μ_i を $(l_n^0)_i$ で表わすと、(26)式は

$$(l_n^0)_i = \frac{1}{4\pi c^2} (2n+1) \frac{P_n^1(\eta_i)}{\sqrt{1-\eta_i^2}} \dots\dots\dots (27)$$

となる。双極子モーメントが一定としても、その存在位置が変われば、当然のことながら効果も変化する。

さて、構造物の磁界測定を行なった結果、 $A_1^0, A_2^0, \dots, A_N^0$ という係数列が得られたとしよう。一方、中心軸を N 個の区間に分け、各区間に x 双極子を1個あて置くとすれば、各々の効果は(27)式から計算できる。すると、

$$A_n^0 = \sum_{i=1}^N \mu_i (l_n^0)_i \quad (n=1, 2, \dots, N) \dots\dots (28)$$

という N 元の連立一次方程式を解けば、与えられた係数列 A_n^0 ($n=1, 2, \dots, N$) を実現させる x 双極子の離散分布 μ_i ($i=1, 2, \dots, N$) を得ることができる。

以上の議論は、放射状多重極子の場合についても同様にあてはまる。モーメントが $(\mu_c^m)_i$ または $(\mu_s^m)_i$ である1個の 2^m 重極子の係数 a_n^m または b_n^m に対する効果 $(l_n^m)_i$ は、(27)式を得たのと同様にして(19)式から導びくと、

$$(l_n^m)_i = \frac{1}{2\pi c^{m+1}} (2n+1) (-1)^m \left\{ \frac{(n-m)!}{(n+m)!} \right\}^2 \times \bar{P}_n^m(1) \frac{P_n^m(\eta_i)}{(1-\eta_i^2)^{m/2}} \dots\dots\dots (29)$$

となる。磁界測定の結果、例えば特定の m について、 $A_m^m, A_{m+1}^m, \dots, A_N^m$ と $N-m+1$ 個の係数が得られたとすれば、中心軸上に同数の放射状 2^m 重極子を想定して、連立方程式

$$A_n^m = \sum_{i=1}^{N-m+1} (\mu_c^m)_i (l_n^m)_i \quad (n=m, m+1, \dots, N) \dots\dots (30)$$

を解くことによって等価離散分布を定めることができる。

もっとも、磁化が一点に集中する場合には、(27)式および(29)式から認められるとおり級数の収束が遅い。このため、 $n=N$ までの係数値を合せることができた

としても、それより大きい次数の係数が余分に発生することになる。しかし、高次の係数に対応する磁界ほど距離による減衰が速やかであるので、測定位置から少し遠ざかれば連続分布による磁界と離散分布によるものとは一致するはずである。

結局、より高次の多重極モーメントの発生を無視すれば、構造物の磁化は(28)式および(30)式を解いて得られる多重極子の離散分布によっても等価的に評価することができる。

4. 磁化の評価

以上の方法に基づき、磁化が単純でしかも分布が既知の例について評価を試み、原分布と比較してみる。第3図に示すように、 x 軸上 c (m) に ρ (AT・m)、 z 軸上 $z=-c/2$ (m) に $-\rho$ (AT・m) の大きさの磁荷が存在するとする。これは直角座標 $(0, 0, -c/2)$ から $(c, 0, 0)$ に向かう棒磁石1個とみなすこともできるし、また $(0, 0, -c/2)$ から原点に向かう z 軸上の棒磁石と原点から $(c, 0, 0)$ に向かう棒磁石各1個が共存しているとみなすこともできる。

この配置が全長 $2c$ の構造物の部分的磁化を表わし

第3図 棒磁石の配置

Fig. 3. Location of bar magnets.

第1表 第3図例の細長回転円体調和関数係数値 ($\times \rho/4\pi c$ (AT))

Table 1. Values of prolate spheroidal harmonics coefficients corresponding to the example of fig. 3.

n	A_n^0	A_n^1	B_n^1	A_n^2	B_n^2
1	3.00	-0.750	0.000	—	—
2	8.44	0.000	0.000	-0.0391	0.0000
3	7.00	0.574	0.000	0.0000	0.0000
4	0.48	0.000	0.000	0.0151	0.0000
5	11.00	-0.701	0.000	0.0000	0.0000

ているとみなして、 $x=\pm c$ に焦点を置く回転円体座標系を設定すると、外接回転円体面は $\xi=\sqrt{1.25}$ となる。この面の外側においては、棒磁石に基づく磁界のポテンシャルは(1)式のとおりに展開できるので、この外側に測定面を定めて磁界測定を行ない、結果を処理して $n=5, m=2$ までの係数値が得られたとしよう。いまの場合、既に磁荷の分布がわかっているため(2)式を用いて相当する係数値を計算すると第1表が得られることになる。

(12)式および(20)式を使用すれば多重極子の単位長さあたりの分布密度 X および R を計算できるが、ここでは、これらを全長 $2c$ あたりに換算してそれぞれ $\bar{X}$ および $\bar{R}$ とすると、(12)式および(20)式は

$$\bar{X} = 4\pi c^2 \sqrt{1-\eta^2} \sum_{n=1}^{\infty} A_n^0 \frac{1}{n(n+1)} P_n^1(\eta) \dots (31)$$

および

$$\begin{cases} \bar{R}_c^m \\ \bar{R}_s^m \end{cases} = 2\pi c^{m+1} (-1)^m (1-\eta^2)^{m/2} \times \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n^m}{B_n^m} \right\} \frac{(n+m)!}{(n-m)!} \frac{P_n^m(\eta)}{\bar{P}_n^m(1)} \dots (32)$$

と変形される。更に、全長 $2c$ が1となるよう、 $p=(1+\eta)/2$ と変数 p を定めて距離を目盛ることとし、第1表の係数値に基づき(31)式および(32)式によって双極子および放射状四重極子の連続分布を求めると、第4図のとおりになる。また、全長を双極子の場合には5等分、四重極子の場合には4等分し、各区分の中心位置にこれらを想定して、(27)式および(29)式によって効果を求め、(28)式および(30)式を解くと等価離散分布が得られる。これも同じく第4図に示す。

関数 $P_n^m(\eta)$ は η の区間 $[-1, 1]$ を $n-m$ 区分する性質を持っているので、その最高次階数相当以上細部まで内部を知ることはできない。高次、高階の調和関数による磁界ほど距離による減衰が大きいので、近くでまたは高い精度で磁界測定を行なうほど高次、高階の係数が得られ、より詳しく内部を等価的に知ることができる。この点に留意して第4図を見ると、 x 双極子は中心軸の右半分に集中して分布し、 z 双極子および四重極子については軸中央で極大を示し、これらの大きさも、もとの棒磁石のそれに相応していることが認められる。従って、磁界測定の結果に基づき第4図に示すような等価分布図を描けば、内部の状態を直観的に理解しやすくなる。

構造物の外部磁界を磁石などによって磁気補償しようとする場合、真の磁化分布がどのようなものであ

第4図 第3図例に対応する(a) x 双極子、(b) z 双極子および(c)四重極子の連続(破線)および離散(実線)分布

Fig. 4. Continuous (dotted lines) and discrete (solid lines) distributions of (a) x -dipoles, (b) z -dipoles and (c) quadrupoles corresponding to the example of fig. 3.

れ、得られた等価分布をちょうど打消すように、中心軸上に磁石を配置してやればよい。この場合、離散分布に従って配置していく方がより便利であろう。すなわち軸的雙極子分布を打消す場合には、相当するモーメントの磁石を中心軸上相当する位置に配置し、放射状多重極子の場合には〈3・2〉節で述べた方法に従って、多重極モーメントが等しくなるような磁石の構成

を決定し、所定の位置に配置すればよい。

もし、双極子磁界の補償のみで目的を達することが出来る場合には、係数 A_1^0, A_1^1 および B_1^1 のみを打消すに足るモーメントを保有する磁石を構造物の中心に配置すればよい。なお、この補償法を実際に適用するに際し、補償用磁石によって構造物に誘導磁化が寄生するような場合には、逐次近似的に最適値を求めていくことが必要となろう。

5. 結 言

磁性構造物の外部磁界の測定を通じて内部の磁化状態を評価しようとする場合、真の磁化を見いだすことはできず、等価的に評価せざるを得ない。このための一つの試みとして、構造物の中心軸に沿って軸的双極子および放射状多重極子を、連続的または離散的に分布させて評価する方法を提案した。これらの分布は完備系を構成する細長回転だ円体調和関数と密接な関係を有し、その係数が定まれば内部の等価分布も一義的に定まる。

従来、外部磁界測定の結果得られる等磁界曲線図などから内部を推測し、原因を探るためには高度の経験が必要とした。この方法によれば、等価磁化分布図は磁界解析の結果得られる調和関数の係数値に基づいて全く機械的に求めることができる。これにより内部の磁化は成分別、場所的に分離された形に置き換えられるので、以後は考慮する位置や分力によって変化する磁界にではなく、その状態の構造物に固有であるところの等価磁化に直接着目して、内部を評価することができる。方法および手順が明確になったことにより、

構造物の磁化評価のみならず、磁気補償対策が今後一層効果的に実行しうることが期待される。

最後に、終始懇切な御討論をいただいた京都大学工学部 板谷良平教授に深く感謝する。

(昭和53年1月27日受付)

文 献

- (1) H. Steinbigler: *Elektrotech. Z. (ETZ-A)*, **90**, 25, 663 (1969)
- (2) 森: 防衛庁技術研究本部技報 技-507 (昭 47)
- (3) T.N. Roy: *IEEE Trans. Magnetics* **MAG-13**, 914 (1977)
- (4) E.W. Hobson: *The Theory of Spherical and Ellipsoidal Harmonics* p. 38 (1965) (Chelsea)
- (5) 森口, 他: 数学公式III p. 130 (昭 44) (岩波)
- (6) J. Jeans: *The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism* p. 375 (1966) (Cambridge)

付 録

(10) 式の証明 中心軸方向の磁化、すなわち $X(\eta)$ の負のこう配は、(付1)式のとおり磁荷密度 $\lambda(\eta)$ に等しい⁽⁶⁾。

$$\lambda = -\frac{1}{(h_\eta)_{\eta=1}} \frac{dX}{d\eta} = -\frac{1}{c} \frac{dX}{d\eta} \dots\dots\dots (付1)$$

(付1)式を η について積分すれば、

$$\begin{aligned} X &= -c \int_{-1}^{\eta} \lambda d\eta = c \int_{\eta}^{-1} \lambda d\eta \\ &= c \left(\int_{\eta}^1 \lambda d\eta + \int_1^{-1} \lambda d\eta \right) \dots\dots\dots (付2) \end{aligned}$$

が得られる。 λ の総和は0であるので、(付2)式右辺第2項は0となる。よって、(10)式が得られる。