UDC 621.315.1.052.4:621.3.011.7

論文

54 - A 3

複合多導線系の初期値境界値問題の解法

正員 稲垣嘉雄 (大阪府大)

正員 木戸正夫 (大阪府大)

1. ま え が き

多導線系における初期値境界値問題として電位、電流の初期条件および線路両端における境界条件を任意に与えて、線路上の任意点の電位、電流を求める方法については既に本誌上に発表した⁽¹⁾。しかしながら、そこでは境界条件は線路の両端においてのみ設定せられており、線路中の任意点に境界条件が設定せられているような場合、例えば線路の途中に起電力がそう入されている場合、更に一般的に線路で地絡故障ないしは短絡、断線事故が発生したような場合には取り扱うことができなかった。ただ、 n 導線系の線路の midpoint に境界条件を設けた場合には線路を midpoint で折り返し、線路の両端のみに境界条件が設定されるようにし、かつ $2n$ 導線系とみなせば解析が可能になり、以下同様な操作を繰返せば線路こう長の $1/4, 1/8, \dots$ の地点に境界条件を設定した場合にも解析が可能となる⁽²⁾。しかし、これではまだ完全に任意点に境界条件を設定することにはならず、しかも線路を折り返すごとに導線数は倍増し、それに伴って計算は飛躍的に複雑になるので、とうてい実用的な計算には適しない。

本報告ではこの欠点を取り除き、線路の両端のみならず、更に線路途中の任意点にも境界条件が設定されている場合にも上記のような面倒な操作を施すことなく解析しうする方法を示した。このためには行列形式で表現された多導線系の送電線方程式に一次変換を施すことによって、それぞれ単一線路の集合として取り扱えるように分解しておき、定数変化法により一般解を求め、線路の始端、途中および終端に設定された境界条件を満足するように積分定数を決定するのである。

本理論においては、線路の導体配置は対称であると仮定したが、これは電位に関する送電線方程式と電流に関するそれとが同時に単一線路の集合として取り扱えるように分解されるために必要な条件で、現実面においては、ほとんど支障のない制約であると考えられる。例えば、送電線路は非対称としても概してその程度は小さく、もし非対称性を相当大きく仮定してもそれによる影響は軽微であり、特に導体配置の非対称性を考慮して計算する必要のないことが前報告の計算例⁽¹⁾で示されているからである。

以下、まず n 導線系における一般理論を述べ、次に具体的な応用例として特殊線路に対する簡単な例題を取り上げ、進行波理論の立場から若干の説明を加え、最後に数値例を示すことにする。

2. n 導線系の場合の解析方法

第1図のような複合多導線系統を考える。この系統はそれぞれ n 導線よりなる j 個の線路が縦続接続され線路 I の左端 A 点、線路 I と II の接続点 B 点、……、および第 j 番目線路の終端 J 点には任意のインピーダンス、電源などが接続されているものとし、これらの点における境界条件をそれぞれ $A, B, \dots$ および J とする。また線路 s のこう長を l_s とし、 $l = \sum_{s=1}^j l_s$ とする。線路上任意点の電位および電流の演算子関数を行列で表わして $[e_s(x)]$ および $[i_s(x)]$ とし、線路上における電圧、電流の初期値をそれぞれ $[E_s(x, 0)]$ お

第1図 複合多導線系統の等価回路

Fig. 1. Simplified equivalent circuit of cascade connected polyphase transmission system.

Analysis of the Boundary Problem of the Cascade Connected Polyphase Transmission Lines Considering the Initial Conditions. By Yoshio Inagaki, Member & Masao Kido, Member (College of Engineering, University of Osaka Prefecture).
稲垣嘉雄: 正員, 大阪府立大学工学部電気工学教室
木戸正夫: 正員, 大阪府立大学工学部電気工学教室

よび $[I_s(x, 0)]$ とする。ただし、例えば $s=1$ は線路 I を表わす。このとき周知のように次式が成立する。

$$\frac{d^2}{dx^2}[e_s(x)] - [k_s]^2[e_s(x)] = [Q_s(x)] \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$[i_s(x)] = [pL_s + R_s]^{-1} \left\{ p[L_s][I_s(x, 0)] - \frac{d}{dx}[e_s(x)] \right\} \dots\dots\dots (2)$$

ただし

$$[k_s]^2 = [pL_s + R_s][pC_s + G_s] \dots\dots\dots (3)$$

$$[Q_s(x)] = p[L_s] \frac{d}{dx}[I_s(x, 0)] - p[pL_s + R_s][C_s][E_s(x, 0)] \dots\dots\dots (4)$$

であり、 $[R_s]$ 、 $[L_s]$ 、 $[C_s]$ および $[G_s]$ はそれぞれ線路単位長あたりの抵抗、インダクタンス、キャパシタンスおよびリーカンスを要素とする n 次の正方行列である。このままでは、(1)式は解くことができないので、 $[k_s]^2$ を Jordan の標準形に直すために適当な正則行列 $[\mu]$ をとり、(1)式を次式のように変形する⁽¹⁾⁽³⁾⁽⁴⁾。

$$\frac{d^2}{dx^2}[e_s^*(x)] - [q_s]^2[e_s^*(x)] = [Q_s^*(x)] \quad \dots\dots\dots (5)$$

ただし

$$[e_s^*(x)] = [\mu]^{-1}[e_s(x)] \\ [q_s]^2 = [\mu]^{-1}[k_s]^2[\mu] \\ [Q_s^*(x)] = [\mu]^{-1}[Q_s(x)]$$

であり、このとき $[q_s]^2$ は対角行列となる⁽⁵⁾⁽⁶⁾。ただし、 $[k_s]$ は正規行列であるか、もしくは正規行列でないときはその固有値はすべて異なっているものとしかつ $[L_s]$ 、 $[C_s]$ 、 $[R_s]$ および $[G_s]$ はそれぞれ互いに交換可能な行列とする。

(5)式の一般解は定数変化法により

$$[e_s^*(x)] = \sinh[q_s]x \cdot [\alpha_s^*] \\ + \cosh[q_s]x \cdot [\beta_s^*] + [q_s]^{-1} \\ \times \int_{\delta_s}^x \sinh[q_s](x-\xi)[Q_s^*(\xi)]d\xi \quad \dots\dots\dots (6)$$

となり⁽⁷⁾⁽⁸⁾、ここに $[\alpha_s^*]$ 、 $[\beta_s^*]$ は積分定数であってこれらは境界条件によって決定されるものである。また $\delta_1=0, \delta_2=l_1, \dots, \delta_j=\sum_{s=1}^{j-1} l_s$ とする。

次に電流の一般式を求めるために、(2)式を次のように変形する。

$$[i_s^*(x)] = [q_s^*]^{-1} \left(p[L_s^*][I_s^*(x, 0)] - \frac{d}{dx}[e_s^*(x)] \right)$$

ただし

$$[L_s^*] = [\mu]^{-1}[L_s][\mu] \\ [I_s^*(x, 0)] = [\mu]^{-1}[I_s(x, 0)] \\ [q_s^*] = [\mu]^{-1}[pL_s + R_s][\mu] \\ [i_s^*(x)] = [\mu]^{-1}[i_s(x)]$$

であり、 $[L_s]$ 、 $[C_s]$ 、 $[R_s]$ および $[G_s]$ はそれぞれ互いに交換可能な行列であるから $[q_s^*]$ も対角行列になり⁽⁶⁾、電流の一般式は次式で与えられる。

$$[i_s^*(x)] = -[q_s^*]^{-1}[q_s] \cosh[q_s]x \cdot [\alpha_s^*] \\ - [q_s^*]^{-1}[q_s] \sinh[q_s]x \cdot [\beta_s^*] \\ + [q_s^*]^{-1} \{ p[L_s^*][I_s^*(x, 0)] \\ - \int_{\delta_s}^x \cosh[q_s](x-\xi)[Q_s^*(\xi)]d\xi \} \quad \dots\dots\dots (7)$$

しかるに、線路 I の始端 A 点における電圧 $[e_1^*(0)]$ と電流 $[i_1^*(0)]$ との間には始端に設置されたインピーダンス、アドミタンスおよび電源などの接続方法によって定まる関係が成立するので、線形の電圧-電流特性を有する限り、それらの配置いかんにかかわらず、 $[e_1^*(0)]$ と $[i_1^*(0)]$ との間には一次関係しか成立しない。従って、いま $[a_0^*]$ 、 $[h_0^*]$ を演算子関数として

$$(A) [i_1^*(0)] = [\alpha_0^*][e_1^*(0)] + [h_0^*] \dots\dots (8)$$

として A 点の境界条件（これを境界条件 A という）を表わしても一般性を失うことはない⁽⁹⁾。同様に B 点における境界条件（境界条件 B という）、……、および J 点における境界条件（境界条件 J という）をそれぞれ

$$(B) [i_1^*(l_1)] = [b_{m1}^*][i_2^*(l_1)] \\ + [a_{m1}^*][e_{m1}^*] + [h_{m1}^*] \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[i_s^*(\delta_s)] = [b_{ms}^*][i_{s+1}^*(\delta_s)] \\ + [a_{ms}^*][e_{ms}^*] + [h_{ms}^*]$$

$$(J) [i_j^*(l)] = [a_i^*][e_j^*(l)] + [h_i^*] \quad \dots\dots\dots (10)$$

とする。ここに

$$[a_0^*] = [\mu]^{-1}[a_0][\mu], [h_0^*] = [\mu]^{-1}[h_0] \\ [a_{ms}^*] = [\mu]^{-1}[a_{ms}][\mu] \\ [b_{ms}^*] = [\mu]^{-1}[b_{ms}][\mu] \\ [h_{ms}^*] = [\mu]^{-1}[h_{ms}], [a_i^*] = [\mu]^{-1}[a_i][\mu] \\ [h_i^*] = [\mu]^{-1}[h_i]$$

であり、 $[a_0]$ 、 $[h_0]$ は始端 A 点において $[a_{ms}]$ 、 $[b_{ms}]$ 、

$\{h_{ms}\}$ は第 s 番目線路と第 $s+1$ 番目線路との接続点において, $\{a_i\}, \{h_i\}$ は J 点においてそれぞれ接続されているインピーダンス, アドミタンスおよび電源などの構成に応じて決定されるべきものである。

いま, 簡単のため, 特に $j=2$ の場合について解析解を与えよう。(8)~(10)式の境界条件および

$$\{e_{m1}^*\} = [\mu]^{-1} \{e_1(l_1)\} = [\mu]^{-1} \{e_2(l_1)\}$$

を満足するように未知定数 $\{\alpha_i^*\}, \{\beta_i^*\}$ を決定し, 次に $[\mu]$ を左乗し, 更に Sylvester の定理⁽¹⁰⁾を適用して次式が得られる(付録参照)。

$$\begin{aligned} \{e_s(x)\} &= \sum_{r=1}^{i_s} [K_s(q_{sr}^2)]^{(S_{sr})} \\ &\times \left\{ \frac{1}{q_{sr}} \int_{\delta_s}^x \sinh q_{sr}(x-\xi) [Q_s(\xi)] d\xi \right. \\ &+ \sinh q_{sr} x [\chi_{2s}]^{-1} \{(\Phi_{2s}) - [\theta_{3s}]^{-1} [\eta_{4s}]\} \\ &+ \cosh q_{sr} x [\chi_{1s}]^{-1} \{(\Phi_{1s}) - [\theta_{3s}]^{-1} [\eta_{4s}]\} \\ &\dots\dots\dots (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \{i_s(x)\} &= \sum_{r=1}^{i_s} [K_s(q_{sr}^2)]^{(S_{sr})} \\ &\times \left\{ [pL_s + R_s]^{-1} p[L_s] \{I_s(x, 0)\} \right. \\ &- \int_{\delta_s}^x \cosh q_{sr}(x-\xi) [pL_s + R_s]^{-1} \\ &\times [Q_s(\xi)] d\xi - q_{sr} \sinh q_{sr} x [pL_s \\ &+ R_s]^{-1} [\chi_{1s}]^{-1} \{(\Phi_{1s}) - [\theta_{3s}]^{-1} [\eta_{4s}]\} \\ &- q_{sr} \cosh q_{sr} x [pL_s + R_s]^{-1} [\chi_{2s}]^{-1} \\ &\times \{(\Phi_{2s}) - [\theta_{3s}]^{-1} [\eta_{4s}]\} \left. \dots\dots\dots (12) \right\} \end{aligned}$$

ただし, $\{U\}$ を単位行列として, $\{k_i\}^2$ の特性根を S_{s1} 重根 q_{s1}^2 , S_{s2} 重根 $q_{s2}^2, \dots, S_{ssi}$ 重根 q_{ssi}^2 (ただし, $n = S_{s1} + S_{s2} + \dots + S_{ssi}$) とすれば

$$\begin{aligned} &[K_s(q_{sr}^2)]^{(S_{sr})} \\ &= \frac{\prod_{\substack{m=1,2,\dots,i_s \\ m \neq r}} (q_{sm}^2 [U] - [k_s]^2) S_{sm}}{\prod_{\substack{m=1,2,\dots,i_s \\ m \neq r}} (q_{sm}^2 - q_{sr}^2) S_{sm}} \end{aligned}$$

であり, また式中の未知のパラメータは次の順序で計算する。

(第1段階)

$$\begin{aligned} \{a_1\} &= [pL_1 + R_1] \{a_0\} \\ \{a_2\} &= [pL_2 + R_2] \{a_{m1}\} \\ \{a_3\} &= [pL_2 + R_2] \{a_1\} \\ \{a_4\} &= [pL_1 + R_1] \{a_{m1}\} \\ \{b\} &= [pL_2 + R_2] \{b_{m1}\} [pL_2 + R_2]^{-1} \\ \{T_1\} &= p[L_1] \{I_1(0, 0)\} - [pL_1 + R_1] \{h_0\} \\ \{T_2\} &= p[L_2] \{I_2(l, 0)\} - [pL_2 + R_2] \{h_l\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \int_{l_1}^l \cosh q_{2r}(l-\xi) \\ &\times [Q_2(\xi)] d\xi \\ \{T_m\} &= p[L_1] \{I_1(l_1, 0)\} - [pL_1 + R_1] \{h_{m1}\} \\ &- \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \int_0^{l_1} \cosh q_{1r}(l_1-\xi) \\ &\times [Q_1(\xi)] d\xi \\ \{\phi_1\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \frac{1}{q_{1r}} \\ &\times \int_0^{l_1} \sinh q_{1r}(l_1-\xi) [Q_1(\xi)] d\xi \\ \{\phi_2\} &= \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \frac{1}{q_{2r}} \\ &\times \int_{l_1}^l \sinh q_{2r}(l-\xi) [Q_2(\xi)] d\xi \end{aligned}$$

(第2段階)

$$\begin{aligned} \{\chi_{11}\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ (1/q_{1r}) \\ &\times \sinh q_{1r} l_1 \{a_1\} - \cosh q_{1r} l_1 \{U\} \} \\ \{\chi_{21}\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ \cosh q_{1r} l_1 \{a_1\}^{-1} \\ &\times [k_1] - \sinh q_{1r} l_1 \{U\} \} \\ \{\theta_1\} &= \sum_{r=1}^{i_2} \{ q_{2r} \cosh q_{2r} l \{U\} \\ &+ [a_3] \sinh q_{2r} l \{K_2(q_{2r}^2)\}^{(S_{2r})} \} \\ \{\theta_2\} &= \sum_{r=1}^{i_2} \{ q_{2r} \sinh q_{2r} l \{U\} \\ &+ [a_3] \cosh q_{2r} l \{K_2(q_{2r}^2)\}^{(S_{2r})} \} \\ \{\mu_2\} &= \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ \cosh q_{2r} l_2 \{a_3\} \\ &+ q_{2r} \sinh q_{2r} l_2 \{U\} \} \\ \{\mu_3\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ \cosh q_{1r} l_1 \{a_1\} \\ &- q_{1r} \sinh q_{1r} l_1 \{U\} \} \\ \{\eta_2\} &= \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ p[L_2] \{I_2(l_1, 0)\} \\ &- \cosh q_{2r} l_2 \{T_2\} - q_{2r} \sinh q_{2r} l_2 \{\phi_2\} \} \\ \{\lambda\} &= \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \left\{ \frac{1}{q_{2r}} \sinh q_{2r} l_2 \{a_3\} \right. \\ &\left. + \cosh q_{2r} l_2 \{U\} \right\} \\ \{\Phi_{11}\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \\ &\times \left\{ \frac{1}{q_{1r}} \sinh q_{1r} l_1 \{T_1\} + \{\phi_1\} \right\} \\ \{\Phi_{21}\} &= \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \\ &\times \{ \cosh q_{1r} l_1 \{a_1\}^{-1} \{T_1\} + \{\phi_1\} \} \end{aligned}$$

(第3段階)

$$[\chi_{12}] = \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ \sinh q_{2r} l_1 [\theta_1]^{-1} \\ \times [\theta_2] - \cosh q_{2r} l_1 [U] \}$$

$$[\chi_{22}] = \sum_{r=1}^{i_1} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ \cosh q_{2r} l_1 [\theta_2]^{-1} \\ \times [\theta_1] - \sinh q_{2r} l_1 [U] \}$$

$$[\mu_1] = \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ q_{1r} \cosh q_{1r} l_1 \\ \times [pL_2 + R_2] [pL_1 + R_1]^{-1} \\ + [\chi_{21}]^{-1} + q_{1r} \sinh q_{1r} l_1 [pL_2 \\ + R_2] [pL_1 + R_1]^{-1} [\chi_{11}]^{-1} - [a_2] \}$$

$$[\eta_1] = \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ [T_m] \\ - q_{1r} \cosh q_{1r} l_1 [\chi_{21}]^{-1} [\Phi_{21}] \\ - q_{1r} \sinh q_{1r} l_1 [\chi_{11}]^{-1} [\Phi_{11}] \}$$

$$[\Phi_{12}] = \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ \sinh q_{2r} l_1 [\theta_1]^{-1} \\ \times ([T_2] - [a_3] [\psi_2]) \}$$

$$[\Phi_{22}] = \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ \cosh q_{2r} l_1 [\theta_2]^{-1} \\ \times ([T_2] - [a_3] [\psi_2]) \}$$

(第4段階)

$$[\theta_{31}] = [U] - [\lambda] [\mu_2]^{-1} [b]^{-1} [\mu_1]$$

$$[\mu_4] = [pL_1 + R_1] [pL_2 + R_2]^{-1} [b]$$

$$\times \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ q_{2r} \cosh q_{2r} l_1 \\ \times [\chi_{22}]^{-1} + q_{2r} \sinh q_{2r} l_1 [\chi_{12}]^{-1} + [a_4] \} \\ [\eta_{41}] = [\lambda] [\mu_2]^{-1} \{ [b]^{-1} [pL_2 + R_2] \\ \times [pL_1 + R_1]^{-1} [\eta_1] - [\eta_2] \} \\ - \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \left\{ \frac{1}{q_{2r}} \sinh q_{2r} l_2 [T_2] \right. \\ \left. - \cosh q_{2r} l_2 \times [\psi_2] \right\}$$

$$[\eta_5] = \sum_{r=1}^{i_2} [K_2(q_{2r}^2)]^{(S_{2r})} \{ p[L_2] [I_2(l_1, 0)] \\ - q_{2r} \cosh q_{2r} l_1 [\chi_{22}]^{-1} [\Phi_{22}] \\ - q_{2r} \sinh q_{2r} l_1 [\chi_{12}]^{-1} [\Phi_{12}] \}$$

(第5段階)

$$[\theta_{32}] = [U] + [\chi_{11}] [\mu_3]^{-1} [\mu_4]$$

$$[\eta_3] = \sum_{r=1}^{i_1} [K_1(q_{1r}^2)]^{(S_{1r})} \{ \cosh q_{1r} l_1 [T_1] \\ + [pL_1 + R_1] [pL_2 + R_2]^{-1} \\ \times [b] [\eta_5] - [T_m] \}$$

(最終段階)

$$[\eta_{42}] = [\Phi_{11}] - [\chi_{11}] [\mu_3]^{-1} [\eta_3]$$

次に, (11)式において $[b_{m1}] = [U]$, $[a_{m1}] = [0]$,

$[h_{m1}] = [0]$, $[L_1] = [L_2] = [L]$, $[C_1] = [C_2] = [C]$, $[R_1] = [R_2] = [R]$, $[G_1] = [G_2] = [G]$, $[I_1(x, 0)] = [I_2(x, 0)] = [I(x, 0)]$, $[E_1(x, 0)] = [E_2(x, 0)] = [E(x, 0)]$, $l_1 = l$, $l_2 = 0$ もしくは $l_1 = 0$, $l_2 = l$ とすれば, 線路途中に境界条件 B を設定しない場合の解⁽¹⁾に完全に一致する。このことは, 解(11)の正しいことを示している。(11), (12)式は n 導線系の両端および線路途中の任意点に起電力, インピーダンスおよびアドミタンスが接続され, しかも初期条件を考慮に入れた場合の線路上の任意点 x における電位および電流の演算子解を与える式であって, 線路電位および電流の時間的変化は時間関数に変換することによって求められる。

3. 2 導線系への応用

以上では対称 n 導線系の解析方法について述べたのであるが, 本章においては応用例として2導線系を取り上げ, 線路Ⅰおよび線路Ⅱの電位を求め, 更に結果に対して若干の説明を加えることにする。

いま, 導体配置は対称であると仮定しているので, 線路定数行列を次のようにおく。

$$[L_s] = \begin{bmatrix} L_s & M_s \\ M_s & L_s \end{bmatrix}, [C_s] = \begin{bmatrix} C_s & C_s' \\ C_s' & C_s \end{bmatrix} \\ [R_s] = \begin{bmatrix} R_s & R_s' \\ R_s' & R_s \end{bmatrix}, [G_s] = \begin{bmatrix} G_s & G_s' \\ G_s' & G_s \end{bmatrix}$$

また一方, 初期条件および境界条件についても, 種々の場合が考えられるのであるが, ここでは前論文⁽¹⁾と同じく線路の固有振動(または誘導雷)の場合を取り上げ, それに適した条件を採用する。

初期条件として線路Ⅰにのみ電位初期値があるものとし, 第 r 番線の電位初期値を直流電圧 E_{01r} とする。また境界条件としては, 第2図に示すように線路の始端, 途中および終端に R なる抵抗がそう入されているものとする。このような場合には, 線路の自由振動の考察または誘導雷現象に近似的にあてはめて考えることができる⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。

一般の送電線路においてはリーカンスは零と考えてよい⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾ので, ここで特に $G_1 = G_2 = G_1' = G_2' = 0$ とおき, また第2図の境界条件においては

$$-[a_0] = [a_{m1}] = [a_l] = \begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix}^{-1}$$

$$[b_{m1}] = [U], [h_0] = [h_{m1}] = [h_l] = [0]$$

であるので, (11)式から演算子解を求め, 更にそれを逆変換して線路電位の時間的変化を求めると次式のようになる。

$$[E_s(x, t)] = \sum_{r=1}^2 [K]_r [E_{sr}(x, t)] \dots \dots (13)$$

第 2 図 抵抗 R を通して接地された 2 導線系

Fig. 2. Two-conductor system grounded through resistances R 's at both ends and one point on the lines.

$$E_{1r}(x, t) = F_{11r}(x, t) + F_{12r}(x, t)$$

$$\star F_{13r}(l_2, t)$$

$$E_{2r}(x, t) = F_{13r}(l - x, t)$$

ただし,

$$F_{11r}(x, t) = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\varphi_{1r}(t, n)$$

$$\begin{aligned} & \star f_3(t, \{(2n+1)l_1 - x\}/g_{1r}, \nu_{1r}) \\ & + \varphi_{1r}(t, n+1) \star f_3(t, \{(2n+1)l_1 \\ & + x\}/g_{1r}, \nu_{1r}) - \varphi_{2r}(t, 1) \star \varphi_{1r}(t, n) \\ & \star f_3(t, \{2nl_1 + x\}/g_{1r}, \nu_{1r}) + \varphi_{2r}(t, 1) \\ & \star \varphi_{1r}(t, n) \star f_3(t, \{(2n+1)l_1 \\ & - x\}/g_{1r}, \nu_{1r})] \end{aligned}$$

$$F_{12r}(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n [\varphi_{1r}(t, n)$$

$$\begin{aligned} & \star f_3(t, \{(2n+1)l_1 - x\}/g_{1r}, \nu_{1r}) \\ & + \varphi_{1r}(t, n+1) \star f_3(t, \{(2n+1)l_1 \\ & + x\}/g_{1r}, \nu_{1r})] \end{aligned}$$

$$F_{13r}(x, t) = \varphi_{1r}(t, 1) \star [2\varphi_{2r}(t, 1)$$

$$\begin{aligned} & \star f_3(t, l_1/g_{1r}, \nu_{1r}) \star f_3(t, \{l_2 \\ & - x\}/g_{2r}, \nu_{2r}) + 2\varphi_{2r}(t, 1) \star \varphi_{3r}(t, 1) \\ & \star f_3(t, l_1/g_{1r}, \nu_{1r}) \star f_3(t, \{l_2 \\ & + x\}/g_{2r}, \nu_{2r}) + \dots] \\ & \star \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \varphi_r(t, n) \right\} \end{aligned}$$

$$[K]_1 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, [K]_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\varphi_{1r}(t, n) = \varphi_{1r}(t, n-1) \star \varphi_{1r}(t, 1)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{1r}(t, 1) &= 2e^{-\bar{z}_{1r}\nu_{1r}t} \star \{\bar{z}_{1r}'' f_1(t, \nu_{1r}) \\ & - \bar{z}_{1r}'\} - 1 \end{aligned}$$

$$\varphi_{1r}(t, 0) = 1$$

$$\varphi_{2r}(t, 1) = (1/2) \varphi_{1r}(t, 1) - 1/2$$

.....

$$\begin{aligned} f_1(t, \nu) &= \exp\left(-\frac{1}{2}\nu t\right) \left\{ \nu I_1 \left(\frac{1}{2}\nu t\right) \right. \\ & \left. + (1+\nu t) I_0\left(\frac{1}{2}\nu t\right) \right\} \end{aligned}$$

.....

$$\begin{aligned} f_3(t, \xi/g, \nu) &= H(t - \xi/g) \left\{ \exp(-\nu \xi/2g) \right. \\ & \left. + \frac{\nu \xi}{2g} \int_{\xi/g}^t e^{-(\nu/2)\tau} \frac{I_1(\nu/2\sqrt{\tau^2 - (\xi/g)^2})}{\sqrt{\tau^2 - (\xi/g)^2}} d\tau \right\} \end{aligned}$$

$$\nu_{s1} = (R_s + R_s')/(L_s + M_s)$$

$$\nu_{s2} = (R_s - R_s')/(L_s - M_s)$$

$$z_{s1} = \sqrt{(L_s + M_s)/(C_s + C_s')}$$

$$z_{s2} = \sqrt{(L_s - M_s)/(C_s - C_s')}$$

$$1/g_{s1} = \sqrt{(L_s + M_s)(C_s + C_s')}$$

$$1/g_{s2} = \sqrt{(L_s - M_s)(C_s - C_s')}$$

$$\bar{z}_{sr} = z_{sr}^2 / (z_{sr}^2 - R^2)$$

$$\bar{z}_{sr}' = z_{sr} R^2 / z_{sr}^2, \quad \bar{z}_{sr}'' = \bar{z}_{sr} R / z_{sr}$$

.....

であり, なお $I_0(t)$, $I_1(t)$ はそれぞれ零階および 1 階の第一種変形ベッセル関数, $\star$ 印はデュアメル積分を表わす。しかし, 上述の解は複雑であるので, 進行波理論の立場から物理的考察を加えるため, ここで特に $R_1 = R_1' = R_2 = R_2' = 0$ の場合, すなわち無損失線路の場合を採用し, かつ $E_{011} = E_{012} = E_{00}$ とすると

$$[E_s(x, t)] = E_{00} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} E_{s1}(x, t)$$

となり,

$$\begin{aligned} E_1(x, t) &= E_{00} \{ 1/2 + 1/2 + (1/2) \\ & \times \sigma_{11} H(t - \tau_{11}) - (1/2) H(t - \tau_{11}) \\ & + (1/2) \sigma_{121}^* H\{t - (T_{11} - \tau_{11})\} \\ & - (1/2) H\{t - (T_{11} - \tau_{11})\} + (1/2) \\ & \times \sigma_{11} \sigma_{121}^* H\{t - (T_{11} + \tau_{11})\} - \dots \} \end{aligned}$$

..... (14)

$$\begin{aligned} E_2(x, t) &= E_{00} \{ (1/2) \bar{\rho}_{21} H(t - \eta_{21}) \\ & + (1/2) \bar{\rho}_{21} \sigma_{21} H\{t - (2T_{21} - \eta_{21})\} \\ & + (1/2) \bar{\rho}_{21} \sigma_{11} H\{t - (T_{11} + \eta_{21})\} \\ & - (1/2) \bar{\rho}_{21} H\{t - (T_{11} + \eta_{21})\} \\ & + (1/2) \sigma_{11} \bar{\rho}_{21} \sigma_{21} H\{t - (T_{11} + 2T_{21} - \eta_{21})\} \\ & - (1/2) \bar{\rho}_{21} \sigma_{21} H\{t - (T_{11} + 2T_{21} - \eta_{21})\} \\ & + \dots \} \end{aligned}$$

なる式が得られ, 格子線図から求めた結果と等しくなる。ここで $l_1/g_{11} = T_{11}$, $l_2/g_{21} = T_{21}$, $x/g_{11} = \tau_{11}$, $(x - l_1)/g_{21} = \eta_{21}$ であり, また σ_{11} , ρ_{21} はそれぞれ A 点および C 点における反射係数である。 $\bar{\rho}_{21}$, σ_{121}^* はそれぞれ B 点における線路 I から線路 II への透過係数および反射係数, 更に $\bar{\rho}_{11}$, σ_{211}^* はそれぞれ B 点における線路 II から線路 I への透過係数および反射係数である。すなわち, 物理的に解釈すると (14) 式の右辺第 1 項および第 2 項は線路 I における初期電位 E_{00} が二つに分れ

て左右に進行波となって伝搬していることを示し、第3項はそのうちの左方進行波がA点で1回反射され、時間 $t=\tau_{11}$ に x 点に達したことを示している。また第4項は、初期右方進行波が $t=\tau_{11}$ に右方へ消え去ったことを示し、第5項はこの進行波がB点で1回反射され $t=T_{11}-\tau_{11}$ に x 点に達したことを示している。以下このようにして往復反射を繰返すことを示しており、また線路Ⅱへ侵入した波は(15)式の第1項では初期右方進行波がB点で1回透過し、 $t=\eta_{21}$ に x 点に達したことを示している。また、例えば(15)式の右辺第5項は初期左方進行波が、A点で1回反射、B点で1回透過、更にC点で1回反射して時間 $t=T_{11}+2T_{21}-\eta_{21}$ に x 点に達したことを示している。

更に $E_{011} \neq E_{012}$ の場合には

$$[E_s(x, t)] = \begin{bmatrix} (E_{011} + E_{012}) E_{s1}(x, t)/2 \\ + (E_{011} - E_{012}) E_{s2}(x, t)/2 \\ (E_{011} + E_{012}) E_{s1}(x, t)/2 \\ + (E_{012} - E_{011}) E_{s2}(x, t)/2 \end{bmatrix}$$

となり、 $(E_{011} - E_{012}) E_{s2}(x, t)/2$ の項が加わる。これらの波の伝搬速度は線路Ⅰでは g_{12} であり、線路Ⅱでは g_{22} である。すなわち、一般には例えば線路Ⅰでは伝搬速度 g_{11} を持ち大いさがそれぞれ $(E_{011} + E_{012})/4$ なる左右進行波と伝搬速度 g_{12} を持ち大いさがそれぞれ $|(E_{011} - E_{012})/4|$ なる左右進行波との重畳されたものになる。ここに絶対値は第1線と第2線で符号が異なるからである。線路Ⅱについても同様のことが言えることはいうまでもない。

本論文では、格子線図法によらず送電線方程式から出発して、厳密な解を導いたのであるが、解の内容は以上述べたように、物理的に妥当なものであり、格子線図法やそれを利用するための、例えば Cancellation Wave Method⁽¹⁵⁾ のような手法がもつある種のわずらわしさを避ける点でより優れていると思う。

4. 数値計算例とその検討

第2図に示した例題について数値計算を行なった結果を第3図、第4図に示す。ただし、使用した数値例は次のとおりである。

線路Ⅰの定数

$$\begin{aligned} L_1 &= 1.585 \text{ mH/km}, \quad M_1 = 0.364 \text{ mH/km} \\ C_1 &= 0.00746 \text{ } \mu\text{F/km}, \quad C_1' = -0.00167 \text{ } \mu\text{F/km} \\ R_1 &= 0.019 \text{ } \Omega/\text{km}, \quad R_1' = 10 \text{ } \Omega/\text{km} \\ G_1 &= G_1' = 0 \text{ S/km} \end{aligned}$$

線路Ⅱの定数

$$\begin{aligned} L_2 &= 1.740 \text{ mH/km}, \quad M_2 = 0.232 \text{ mH/km} \\ C_2 &= 0.00666 \text{ } \mu\text{F/km}, \quad C_2' = -0.00102 \text{ } \mu\text{F/km} \end{aligned}$$

$$R_2 = 0.087 \text{ } \Omega/\text{km}, \quad R_2' = 5 \text{ } \Omega/\text{km}$$

$$G_2 = G_2' = 0 \text{ S/km}$$

境界における定数

$$R = 30 \text{ } \Omega$$

初期条件は線路Ⅰにのみ単位電位が存在するものと

第3図 線路Ⅰに一樣な初期電位分布を仮定した場合の線路電圧の時間的変化

Fig. 3. Voltage curves of lines, as functions of time, when the uniform potentials are assumed to distribute along the lines I initially.

第4図 線路Iに様な初期電位分布を仮定した場合の線路電圧の距離分布

Fig. 4. Voltage distributions of lines, when the uniform potentials are assumed to distribute along the lines I initially.

する。すなわち

$$[E_1(x, 0)] = \begin{bmatrix} E_{011} \\ E_{012} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$[I_1(x, 0)] = [E_2(x, 0)] = [I_2(x, 0)] = [0]$$

線路こう長は 300km と 150km の場合について計算を行なったが、図はそれらの一部を示し、第3図は線路上の定点における電位の時間的変化、第4図はある時刻における線路上の電位分布図である。また比較のために、特に無損失線路についても計算を行なった結果を併記している。計算方法としてデュアメル積分の数値計算については、種々の方法が考えられているが⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾、本論文では Nerken の方法⁽¹⁸⁾を利用した。

第3図および第4図は当然ながら往復反射のありさまを忠実に表現しており、有損失の場合のほうが、無

損失の場合より電位が高くなる場合のあることがわかる。この原因は、反射で極性の変わった波が減衰を受けて打ち消しの効果が小さいまま重畳されるためであると考えられる。従って、「無損失すなわち安全サイド」とは必ずしも言えない。

更に絶対値は小さいが、線路が有損失であっても時間と共に電位が増大する現象が見られる〔例えば第3図(a), (b)〕。

次に線路こう長の影響については、最初に $(l_1, l_2) = (300, 150)$ の場合と $(150, 300)$ の場合とを比較してみよう。第4図(a)~(e)の電位分布図によれば $(300, 150)$ と $(150, 300)$ とでは様相が異なり、 $(300, 150)$ の場合、線路Iの電位分布は正極性であるが、 $(150, 300)$ の場合線路Iの電位分布は負極性のものが多く、特に第4図(b)~(d)ではすべてが負極性になっている。線路電位の時間的変化についても、第3図(a), (b)に極性の違いが見られ、また第4図(e)では、 $(150, 300)$ の場合電位上昇はいずれも小さい。これらの原因はやはり反射波の極性が負であるためである。

第3図(a)は、 $x=0\text{km}$ すなわち、線路Iの始端(A点)における電位の時間的変化を比較したものである。これによれば 0.5ms から電位の相違が現われる。 $(150, 300)$ では負電位となり、絶対値では $(300, 150)$ よりも $(150, 300)$ のほうが小さくなっている。これはB点すなわち線路Iと線路IIの接合点からの反射波が負極性をもち、 $(150, 300)$ のほうが早く観測点すなわち始端に到着するからである。1ms 経過後では、 $(300, 150)$ の場合もB点からの負の反射波が到達するが、電位の減少は少なく依然正極性で、B点からの負の反射波は 300km 伝搬しているため減衰が大きいためと考えられる。

第3図(b)は、 $x=120\text{km}$ すなわち線路Iの途上点における電位の時間的変化を比較したもので、B点からの反射波のために $(150, 300)$ の場合、電位は相当低くなっている。0.4ms 経過後ではA点からの反射波が到達するので $(150, 300)$ も $(300, 150)$ も電位が低くなり、0.6ms 経過後では $(300, 150)$ はB点からの反射波により更に電位は低くなる。また、 $(150, 300)$ の場合はA点とB点でそれぞれ1回ずつ都合2回反射して正極性になった反射波が到達することを示している。また、 $(150, 300)$ には負電位が現われるが、 $(300, 150)$ には正電位しか現われない。

本数値例で一般的にいうと、 $(300, 150)$ の場合、線路Iでは正電位〔例えば第3図(a)~(d)参照〕であり、線路IIでは比較的時間が経過した時負電位が現われることもあるが、 $(150, 300)$ では線路Iでも負電位

が現われる〔例えば第3図(a), (b)〕。また全般を通じて(150, 300)のほうが(300, 150)に比べて大体において電位の絶対値は小さい傾向がある。

次に、(300, 150)と(300, 300)とを比較してみよう。第3図(e)はB点の電位であり、第3図(f)は線路II上B点から30km地点の電位変化である。その絶対値は小さく、B点における線路Iから線路IIへの透過係数が、正でしかも小さいことを示している。pu値を規準にとると、絶対値的には(300, 150)と(300, 300)ではほとんど同じような変化をしているといつてもよいが、厳密にいうと(300, 150)のほうが電位は小さくなっている。これは(300, 150)のほうが線路IIの終端からの負の反射波が早く到着するためである。本数値例ではB点での線路IIへの透過係数が小さいことから、(300, 150)と(300, 300)とではほとんど同じ変化をすることは当然のこととなづける。

最後に、(150, 150)と(150, 300)の比較を行えば、第3図(h)は線路II上B点から60km地点の電位変化であるが、B点で透過した後の電位であるから値は小さい。これを見ると巨視的にはほとんど同じ変化であると言える。拡大すれば大体において、(150, 150)のほうが電位の絶対値は大きく、(150, 150)も(150, 300)も負になることがある。また電位分布図を比較すると大体において同じ変化をしている。ただスケールを拡大すると、時間の初期の間は(150, 150)と(150, 300)は同じ変化であるが、 $t=0.5\text{ms}$ になると(150, 150)は線路IIの終端で反射を起し、その点、すなわち $x=300\text{km}$ の地点では(150, 150)は低くてほとんど零になっている。時間が進むにつれて(150, 150)の電位が低い地点が広がり、更に時間が経過すると(150, 150)は負の電位になる地点が生じ、(150, 300)もほとんど零になってくる。更に時間が経過し、例えば1.5msでは電位は小さくなり、また同じ変化をするようになる。

5. あとがき

多導線系において電位、電流の初期条件を任意に与え、かつ任意の境界条件を線路途中任意点に設定した場合の厳密一般解はまだ与えられていなかった。本論文においては、境界条件を線路の両端および途中の任意点に設定した場合、すなわち初期条件を任意に与えかつ境界条件を3個与えた場合の任意点の電位電流を格子線図法などを用いずに厳密に計算しうることを示した。また簡単な例題に関する数値計算から次のようなことを明らかにした。

(1) 有損失の場合のほうが無損失の場合より電位

が高くなる場合がある。

(2) 無損失と有損失とで電位の違う場合が見られる。

(3) 線路が有損失であっても時間と共に電位が増大する場合がある。

(4) 有損失線路で往復反射のある場合、線路こう長の影響は複雑であり、線路上各地点の電位に与える影響は大きい。

数値計算は大阪府立大学計算センターのTOSBAC 5600を使用して行なった。その折お世話になった同センターの方々に厚く感謝いたします。

(昭和53年3月31日受付, 同53年9月8日再受付)

文 献

- (1) 木戸・稲垣: 電学誌 84, 273 (昭 39)
- (2) 稲垣: 「送電系統における過渡現象の研究」(学位論文・大阪府立大学) p. 20 (昭 45)
- (3) 野田: 電気試験所記念論文集 p. 389 (昭 23)
- (4) 木戸: 電学誌 81, 643 (昭 36)
- (5) 浅野: 行列と行列式(初版) p. 141, 146 (昭 30) 共立出版
- (6) 浅野: 同上 p. 150 (昭 30)
- (7) S. Hayashi: Surges on Transmission Systems (1st ed.) (1955) DENKI-SHOIN
- (8) 宇田川・南雲・飯島: 電気数学II(第2版) p. 22 (昭 38) オーム社
- (9) 稲垣: 「送電系統における過渡現象の研究」(学位論文・大阪府立大学) p. 9 (昭 45)
- (10) 林: 交流理論と過渡現象(第3版) p. 502 (昭 36) オーム社
- (11) L. V. Bewley: Traveling Waves on Transmission Systems (2nd ed.) p. 248 (1951) Dover
- (12) 森脇: 過渡現象計算法(初版) p. 225 (昭 25) 産業図書
- (13) 電気学会: 送電工学改訂版(初版) p. 117 (昭 42)
- (14) 電気工学ハンドブック(初版) p. 1151 (昭 42)
- (15) L. V. Bewley: Traveling Waves on Transmission Systems (2nd ed.) p. 297 (1951) Dover
- (16) 卯本, 原: 昭45電気四学会連大 No. 1097
- (17) 雨谷・吉田・富永: 昭50電気関係学会関西支連 G4-17
- (18) Albert I. Nerken: Electrical Engineering, A.I.E.E. (Letters to the Editor) p. 768 (1937-6)

付 録

(I) (6)式で $s=1$, $x=l_1$ とおき、(8)式を使って $\{\alpha_1^*\}$, $\{\beta_1^*\}$ を解き $\{e_1^*(x)\}$, $\{i_1^*(x)\}$ を得る。ただし、 $\{e_1^*(l_1)\}=\{e_{m1}^*\}$ が未知量として残る。

(II) (6)式で $s=2$, $x=l$ とおき、(10)式を使って $\{\alpha_2^*\}$, $\{\beta_2^*\}$ を解き $\{e_2^*(x)\}$, $\{i_2^*(x)\}$ を得る。ただし、 $\{e_2^*(l)\}$ が未知量として残る。

(III) 得られた式を(9)式に代入して $\{e_2^*(l)\}$ を求め、それを $\{e_2^*(x)\}$ に代入した後 $x=l_1$ として $\{e_2^*(l_1)\}=\{e_{m1}^*\}$ を得、これを $\{e_1^*(x)\}$, $\{i_1^*(x)\}$ に代入する。

(IV) $\{e_2^*(x)\}$, $\{i_2^*(x)\}$ についても同様にして求める。