二次元異方性複合領域の等方化写像理論

正員 寺 門 龍 一 (茨城大)

非会員 草 瀬 新 (茨城大)

1. ま え が き

定常場で領域媒質が等方性、均一性を有する場合に、ポテンシャルはラプラスの方程式を満足する。従って、二次元領域を共役な二調和関数で写像する等角写像法は、用い方を工夫すれば写像関数自身がポテンシャルに結びつくことにより、広く利用されてきた。

ところが、マイクロ波伝送線、光変調器、方向性けい素銅板などに関連して、異方性媒質中の定常場が問題とされることが多くなり^{(1)~(6)}、これは等角写像法の範囲を超えるものである。著者らは、等角写像を包含するような異方性媒質の写像理論を明らかにし、その均一異方性媒質に対する応用例を示した⁽⁶⁾。この写像は、電位とエネルギーを不変に保ち、媒質の誘電率そのものを変換してしまうところに特徴がある。

ここでは、まずこの写像理論の物理的意味を明確にし、続いて、この写像理論が二つ以上の異方性媒質の複合された領域に対しても有効であることを示し、直線の境界線を持つ複合異方性領域を複合等方性領域に変換する、いわゆる等方化の方法について述べる。

2. 二次元異方性領域に対する写像理論の

概要

文献(6)に述べた写像理論の要点は次のとおりである。

z 平面および w 平面上の静電界領域 R_z, R_w で、それぞれ次式が成立するものとする。

$$\left. \begin{aligned} R_z \text{ においては,} \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_z(x, y) &= 0 \\ \mathbf{D}_z(x, y) &= \boldsymbol{\varepsilon}_z(x, y) \cdot \mathbf{E}_z(x, y) \\ R_w \text{ においては,} \\ \operatorname{div} \mathbf{D}_w(u, v) &= 0 \\ \mathbf{D}_w(u, v) &= \boldsymbol{\varepsilon}_w(u, v) \cdot \mathbf{E}_w(u, v) \end{aligned} \right\} \dots\dots (1)$$

ただし、 $\mathbf{D}$: 電束密度、 $\mathbf{E}$: 電界、 $\boldsymbol{\varepsilon}$: 誘電率テンソルである。そのとき R_z と R_w の間に次の写像を考える。

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y) \dots\dots\dots (2)$$

ただし、写像は次の三条件を満たすものとする。

(1)

$$\mathbf{M}(x, y) \equiv \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{pmatrix}, \quad \det \mathbf{M}(x, y) \neq 0 \dots\dots\dots (3)$$

(2) R_z, R_w 内部の電位 $\phi_z(x, y), \phi_w(u, v)$ について、

$$\phi_z(x, y) = \phi_w(u, v) \dots\dots\dots (4)$$

(3)

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{D}_z(x, y) &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi_z(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_z(x, y)}{\partial x} \end{pmatrix} \\ \mathbf{D}_w(u, v) &= \begin{pmatrix} -\frac{\partial \phi_w(u, v)}{\partial v} \\ \frac{\partial \phi_w(u, v)}{\partial u} \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (5)$$

を満たす $\phi_z(x, y), \phi_w(u, v)$ について

$$\phi_z(x, y) = \phi_w(u, v) \dots\dots\dots (6)$$

この写像により $\mathbf{D}, \mathbf{E}, \boldsymbol{\varepsilon}$ は次のような変換を受ける。

$$\mathbf{E}_z = \mathbf{M} \cdot \mathbf{E}_w \dots\dots\dots (7)$$

Mapping Theory of "Isotropy-Izing" of Two-Dimensional Anisotropic Compound Regions. By Ryuichi Terakado, Member & Shin Kusase, Non-member (Faculty of Engineering, Ibaraki University).

寺門龍一: 正員, 茨城大学工学部電気工学科

草瀬 新: 非会員, 茨城大学大学院電気工学専攻〔現在, 日本電装(株)〕

$$D_z = (\det M)(M^{-1})^t \cdot D_w \quad \dots\dots\dots (8)$$

$$\epsilon_w = M^t \epsilon_z M / \det M \quad \dots\dots\dots (9)$$

また、この写像によって領域内のエネルギーは不変に保たれる。そして

$$MM^t / (\det M) = \sqrt{\det \epsilon_z \epsilon_z^{-1}} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を満足する写像によって R_w は等方性媒質となり、そのときの誘電率は

$$\epsilon = \sqrt{\det \epsilon_z} \quad \dots\dots\dots (11)$$

となる。

3. 等方化写像の物理的意味

等方化方程式(10)において、 MM^t は常に対称である。このことから、与えられた領域の等方化のためには、媒質が対称テンソルに表わし得ることが必要である。通常の誘電媒質についてはほとんど問題はない。しかし、ホール素子内部のように静磁界、電流界を合わせて考える場合などでは、媒質は対称テンソルで表わし得ず、この等方化理論は適用できない。

いま、座標 (x, y) で ϵ (対角とは限らない) なる媒質が(2)式の写像によって等方化されるものとし、この写像は(3)式の M を持つとする。そして、 ϵ の固有値を e_1, e_2 、また M の固有値を m_1, m_2 とおく。また、適当な座標軸の直交変換 L_m により $L_m M L_m^t$ が対角になるものとする。(10)式の左から L_m 、右から L_m^t を乗じ、単位行列 $I = L_m^t L_m$ を MM^t の間に入れることにより

$$\frac{(L_m M L_m^t)(L_m M L_m^t)^t}{\det M} \\ = \sqrt{\det \epsilon} L_m \epsilon^{-1} L_m^t$$

よって

$$\begin{bmatrix} m_1/(m_2 \sqrt{e_1 e_2}) & 0 \\ 0 & m_2/(m_1 \sqrt{e_1 e_2}) \end{bmatrix} \\ = L_m \epsilon^{-1} L_m^t \quad \dots\dots\dots (12)$$

を得る。この式から、 ϵ^{-1} がやはり L_m で対角化されることがわかる。また ϵ^{-1} の固有値は $1/e_1, 1/e_2$ であるから、 M と ϵ の固有値に関する一般関係

$$m_2/m_1 = \sqrt{e_1/e_2} \quad \dots\dots\dots (13)$$

を得る。これを座標変換の立場で解釈すれば次のごとくである。

固有値 m_1, m_2 は M の定義に基づき、旧座標に対する新座標の軸の伸びを意味する。従って、 ϵ なる異方性領域が与えられた場合、その主値比の2乗の割合で適当な方向に軸を伸縮させることにより、新座標では領域を等方的に見ることができるのである。

4. 写像による場の連続性の保存

領域が二つ以上の異方性媒質からなる複合領域に対して、ある一つの写像関数による写像を適用した場合の境界線上での場の連続性を検討する。

第1図のように、この境界線 AB は写像後の w 平面領域で境界線 $A'B'$ となるものとする。そして境界線上の点 P において、図のように $e_{z1}, e_{z2}; e_{w1}, e_{w2}$ の単位ベクトルを考える。また、境界線上の P 点近傍媒質1側に P_1 点を、媒質2側に P_2 点をとる。そのとき P 点の媒質1側における電界の接線成分は

$$E_{z1t}(P) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \{e_{z1}^t \cdot E_z(P_1)\} \quad \dots\dots\dots (14)$$

であり、同様に媒質2側では

$$E_{z2t}(P) = \lim_{P_2 \rightarrow P} \{e_{z2}^t \cdot E_z(P_2)\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

である。 e_{z1} と e_{w1} の間には M の定義により

$$e_{w1} = k M^t \cdot e_{z1} \quad \dots\dots\dots (16)$$

の関係がある。ここで、 k は正規化スカラー係数である。(7), (14), (16)式および(7), (15), (16)式より電界の接線成分はそれぞれ

$$E_{z1t}(P) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \left\{ (1/k) \{ (M^t)^{-1} \cdot e_{w1} \}^t \right. \\ \times M \cdot E_w(P_1) \} \\ = \lim_{P_1 \rightarrow P} \{ (1/k) e_{w1}^t M^{-1} M \cdot E_w(P_1) \} \\ = E_{w1t}(P)/k \quad \dots\dots\dots (17)$$

$$E_{z2t}(P) = E_{w2t}(P)/k \quad \dots\dots\dots (18)$$

となる。従って、 $E_{z1t}(P) = E_{z2t}(P)$ と仮定すると、 $E_{w1t}(P) = E_{w2t}(P)$ となり、電界の連続性が写像により保存されることがわかる。

次に電束密度については、 e_{z2} と e_{w2} の関係を(16)式に $\pm\pi/2$ の回転を適用して得られる

$$e_{w2} = k(\det M) M^{-1} e_{z2} \quad \dots\dots\dots (19)$$

と(8)式より

$$D_{z1n}(P) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \{e_{z1}^t \cdot D_z(P_1)\}$$

第1図 異方性媒質の境界部分の写像

Fig. 1. Mapping of the interface between two anisotropic media.

$$= D_{w1n}(P)/\{k \det^2 \mathbf{M}\} \dots \dots \dots (20)$$

$$D_{z2n}(P) = D_{w2n}(P)/\{k \det^2 \mathbf{M}\} \dots \dots \dots (21)$$

よって、 $D_{z1n}(P) = D_{z2n}(P)$ を仮定すれば $D_{w1n}(P) = D_{w2n}(P)$ が成立し、電束密度の連続性は保持されている。

5. 異方性複合領域の等方化

異方性領域が単一均一領域である場合には、その等方化は(10)式により容易に達成される。ここでは複合領域の全体を等方化することを試みる。

複合領域の各部分領域を(10)式によりそれぞれ等方化すると、各領域は一般に分離してしまう。しかし、内部境界線が直線の場合には、アフィン写像の性質に基づきその問題を解決できる。以下、第2図(a)に示す異方性二種複合領域の等方化を考える。

〈5・1〉 等方化写像関数 第2図(a)を写像関数

$$\begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{M}_1^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & (x, y) \in \text{領域 1} \\ \mathbf{M}_2^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & (x, y) \in \text{領域 2} \end{cases} \dots (22)$$

で ν 平面に写像すると、各領域は等方化されるものとする。ここで $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2$ はそれぞれ(10)式を満たしている。この等方化により、領域 1, 2 は分離して第2図(b)のようになる。ここで、領域2を回転、縮尺、平行移動することにより、(c)図のように再び境界線を一致させ得る。そのときの ν 平面から w 平面への写像関数は次の形となる。

第2図 等方化写像過程

Fig. 2. Mapping process of "isotropy-izing".

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{cases} \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} & (\lambda, \mu) \in \text{領域 1} \\ \kappa \mathbf{L}(\theta) \cdot \begin{bmatrix} \lambda \\ \mu \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} & (\lambda, \mu) \in \text{領域 2} \end{cases} \dots \dots \dots (23)$$

ここで、 κ : スカラー定数

$$\mathbf{L}(\theta) = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix}: \text{定ベクトル}$$

である。この後半の写像で、等方性が再び異方性に変わることはない。

以上を合成し、次の等方化写像関数を得る。

$$\begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \begin{cases} \mathbf{M}_1^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} & (x, y) \in \text{領域 1} \\ \kappa \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^t \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_0 \\ v_0 \end{bmatrix} & (x, y) \in \text{領域 2} \end{cases} \dots \dots \dots (24)$$

この写像により、原領域でのテンソル誘電率 ϵ_1, ϵ_2 は新領域では等方性なスカラー誘電率 $\sqrt{\det \epsilon_1}, \sqrt{\det \epsilon_2}$ となる。

〈5・2〉 $\kappa, \mathbf{L}(\theta)$ などの決定 第2図(a), (c)の位置ベクトル $\mathbf{P}_A, \mathbf{P}_B, \mathbf{P}_A'', \mathbf{P}_B''$ を(24)式に入れ、 $\mathbf{P}_A'' - \mathbf{P}_B''$ が領域 1, 2 で一致することより

$$\{(\mathbf{M}_1 \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^{-1})^t - \kappa \mathbf{I}\} (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B) = 0 \dots \dots \dots (25)$$

を得る。ここで、 $\mathbf{I}$ は単位行列である。従って

κ : $(\mathbf{M}_1 \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^{-1})$ の固有値

$(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)$: κ に属する固有ベクトル

の関係となっており、 κ を求めることは固有値問題となる。なお、 κ の値は二つ得られるが、その意義に基づき次式で複号同順に判定する。

$$\text{norm}(\mathbf{M}_1^t \cdot \mathbf{P}) \geq \text{norm}(\mathbf{M}_2^t \cdot \mathbf{P}) \rightarrow \kappa \geq 1 \dots \dots \dots (26)$$

ここで、 $\mathbf{P}$ は境界線と平行な任意のベクトルである。

次に、 $\mathbf{L}(\theta)$ については第2図(a), (b)より

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)^t \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2^t}{|\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B| \sqrt{(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)^t \cdot \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_1^t}} * \\ &\quad * \frac{(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)}{\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_2^t \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)} \\ &= \frac{(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)^t \cdot \mathbf{M}_1}{|\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B| \sqrt{\det \mathbf{M}_1} \sqrt{\det \epsilon_1 \epsilon_2}} * \\ &\quad * \frac{\mathbf{M}_2^t \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)}{\sqrt{(\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)^t \cdot (\epsilon_2 \epsilon_1)^{-1} \cdot (\mathbf{P}_A - \mathbf{P}_B)}} \dots \dots \dots (27) \end{aligned}$$

となる。

平行移動の定ベクトル $\{u_0 \ v_0\}^t$ については、境界線の一端を常に原点にとることに決めれば、これは 0

第3図 等方化写像における境界部分の写像
Fig. 3. Mapping of the interface at the mapping of "isotropy-izing".

となり、以下このように考えるものとする。

〈5・3〉境界における場の連続性 以上の等方化における場の連続性の保存については、電位 ϕ および ϕ は対応する点で同一であり問題はなく、 $\mathbf{E}$, $\mathbf{D}$ について検討する。なお、諸記号は前章に準じて用いる。

まず、第3図の領域1側で考え

$$E_{w1t}(P) = \lim_{P_1 \rightarrow P} \{e_{wt}^t(P_1) \cdot \mathbf{E}_{w1}(P_1)\} \dots (28)$$

ここで、規格化スカラー係数 ν_1 を用い

$$e_{wt}(P_1) = \nu_1 \mathbf{M}_1^t \cdot \mathbf{e}_{zt}(P_1) \dots (29)$$

$$\mathbf{E}_{w1}(P_1) = \mathbf{M}_1^{-1} \cdot \mathbf{E}_{z1}(P_1) \dots (30)$$

であるから、これを入れて

$$\begin{aligned} E_{w1t}(P) &= \nu_1 \lim_{P_1 \rightarrow P} \{e_{zt}^t(P_1) \cdot \mathbf{E}_{z1}(P_1)\} \\ &= \nu_1 E_{z1t}(P) \dots (31) \end{aligned}$$

一方、領域2側から近づける場合も同様に

$$E_{w2t}(P) = \lim_{P_2 \rightarrow P} \{e_{wt}^t(P_2) \cdot \mathbf{E}_{w2}(P_2)\} \dots (32)$$

$$e_{wt}(P_2) = \nu_2 (\kappa \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^t) \cdot \mathbf{e}_{zt}(P_2) \dots (33)$$

$$\mathbf{E}_{w2}(P_2) = (\kappa \mathbf{M}_2 \mathbf{L}(\theta)^t)^{-1} \cdot \mathbf{E}_{z2}(P_2) \dots (34)$$

これら三式より

$$E_{w2t}(P) = \nu_2 E_{z2t}(P) \dots (35)$$

を得る。従って、 $\nu_1 = \nu_2$ が成り立てば写像後も境界において電界の接線成分が等しくなる。(29), (33)式より

$$\begin{aligned} e_{wt}(P_1) - e_{wt}(P_2) \\ = \nu_1 \cdot \mathbf{M}_1^t \cdot \mathbf{e}_{zt}(P_1) - \nu_2 \kappa \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^t \cdot \mathbf{e}_{zt}(P_2) \dots (36) \end{aligned}$$

ここで、 $\mathbf{e}$ は位置に無関係で境界線の傾きのみに依存するベクトルであるから

$$e_{wt}(P_1) = e_{wt}(P_2), \quad e_{zt}(P_1) = e_{zt}(P_2) \dots (37)$$

(37)式を(36)式に入れて

$$(\nu_1 \mathbf{M}_1^t - \nu_2 \kappa \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^t) \mathbf{e}_{zt}(P_1) = 0 \dots (38)$$

第4図 異方性複合領域

Fig. 4. Anisotropic compound region.

$(1/\nu_1)(\mathbf{M}_2^t)^{-1} \mathbf{L}(\theta)^{-1}$ を左乗し、直交行列 $\mathbf{L}(\theta)$ の性質を用いて整理すると

$$\{(\mathbf{M}_1 \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^{-1})^t - (\kappa \nu_2 / \nu_1) \mathbf{I}\} \mathbf{e}_{zt}(P_1) = 0 \dots (39)$$

となり、 $\kappa \nu_2 / \nu_1$ は $(\mathbf{M}_1 \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^{-1})$ の固有値である。一方、(25)式で述べたように κ もまたこの固有値であり、従って

$$\kappa \nu_2 / \nu_1 = \kappa \quad \therefore \nu_1 = \nu_2$$

となり、電界の連続性が確認された。

電束密度についても同様の方法により確認できる。

〈5・4〉異方性複合領域等方化の例 まず一般的な例として、第4図のような境界線が直線で、その傾きが b/a の二種媒質複合領域の等方化を考える。

$$\mathbf{\epsilon}_1 = \begin{bmatrix} \epsilon_{a1} & \epsilon_{b1} \\ \epsilon_{b1} & \epsilon_{c1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{\epsilon}_2 = \begin{bmatrix} \epsilon_{a2} & \epsilon_{b2} \\ \epsilon_{b2} & \epsilon_{c2} \end{bmatrix} \dots (40)$$

とし、(10)式を満たす $\mathbf{M}$ として次式を得る。

$$\mathbf{M}_i = \begin{bmatrix} \sqrt{\epsilon_{ci}/V \det \mathbf{\epsilon}_i} & 0 \\ -\epsilon_{bi}/\sqrt{\epsilon_{ci}/V \det \mathbf{\epsilon}_i} & \sqrt{V \det \mathbf{\epsilon}_i / \epsilon_{ci}} \end{bmatrix} \dots (41)$$

$\mathbf{L}(\theta)$ は(27)式から得られるが、第4図に対する第2図(b)の状態を想定して比較的容易に次式となる。

$$\begin{aligned} \theta &= \cos^{-1} \left[\frac{a \sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1}}{a \sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1} - b \epsilon_{b1}/\sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1}} \right] * \\ &+ \frac{b \epsilon_{b1}/\sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1}}{a \sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1} - b \epsilon_{b1}/\sqrt{\epsilon_{c1}/V \det \mathbf{\epsilon}_1}} * \\ &- \cos^{-1} \left[\frac{a \sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2}}{a \sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2} - b \epsilon_{b2}/\sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2}} \right] * \\ &+ \frac{b \epsilon_{b2}/\sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2}}{a \sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2} - b \epsilon_{b2}/\sqrt{\epsilon_{c2}/V \det \mathbf{\epsilon}_2}} * \dots (42) \end{aligned}$$

κ は $\mathbf{M}_1 \mathbf{L}(\theta) \mathbf{M}_2^t$ の固有値として(26)式の判別を適用して求める。 $\{u_0 v_0\}^t$ は0である。これにより(24)式は定まり等方化が実現する。特に $\det \mathbf{\epsilon}_1 = \det \mathbf{\epsilon}_2$ の場合には全域が単一均等方性領域となる。

次に具体的な例として、第5図(a)のように y 軸を境界線として持つ二種媒質複合無限平行板間領域を考

第 5 図 数値例の領域

Fig. 5. Anisotropic region for an example.

える。与えられた誘電率テンソル

$$\epsilon_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \epsilon_0, \quad \epsilon_2 = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \epsilon_0$$

に対し、下記の計算を行ない(b)図を得る。

$$\epsilon_1 = \sqrt{2} \epsilon_0, \quad \epsilon_2 = 3 \epsilon_0$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & 0 \\ -1/\sqrt{6} & \sqrt{3/2} \end{pmatrix}$$

$$\theta = \cos^{-1} 0 - \cos^{-1} (-1/\sqrt{10}) = -18.4^\circ$$

$$L(\theta) = \begin{pmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ -1/\sqrt{10} & 3/\sqrt{10} \end{pmatrix}$$

$$M_1 L(\theta) M_2^{-1}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \sqrt{\frac{3\sqrt{2}}{5}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{15}} & \sqrt{\frac{\sqrt{2}}{15}} \\ -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{3}{5\sqrt{2}}} + \frac{3}{2} \sqrt{\frac{1}{15\sqrt{2}}} & 3\sqrt{\frac{1}{15\sqrt{2}}} \end{pmatrix}$$

$$\kappa^2 - (10 + 3\sqrt{2})\sqrt{\sqrt{2}} \kappa / (2\sqrt{15}) + 1 = 0$$

$$\kappa = \sqrt{3/(5\sqrt{2})}, \quad \sqrt{5\sqrt{2}/3}$$

$$\text{norm} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$< \text{norm} \left\{ \begin{pmatrix} \sqrt{2/3} & -1/\sqrt{6} \\ 0 & \sqrt{3/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore \kappa = \sqrt{3/(5\sqrt{2})}$$

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 3/(5\sqrt{\sqrt{2}}) & 0 \\ -1/(5\sqrt{\sqrt{2}}) & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & x \geq 0 \end{cases}$$

この写像における諸量の関係は、(4)、(7)、(8)式を適用して次のようになる。

$$\phi_z(x, y) = \phi_w(u, v)$$

$$E_z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} \sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot E_w(u, v) & x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 3/(5\sqrt{\sqrt{2}}) & -1/(5\sqrt{\sqrt{2}}) \\ 0 & 1/\sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \times E_w(u, v) & x \geq 0 \end{cases}$$

$$D_z(x, y) = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \cdot D_w(u, v) & x \leq 0 \\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{\sqrt{2}} & 0 \\ 1/(5\sqrt{\sqrt{2}}) & 3/(5\sqrt{\sqrt{2}}) \end{pmatrix} \times D_w(u, v) & x \geq 0 \end{cases}$$

いま、 z 平面の $x = -1$ に置かれた無限平板電極の電位を $\phi = 1$, $x = 1$ の電極の電位を $\phi = 0$ とする場合の電界を求める。 w 平面においては容易に

$$E_{w1} = \begin{pmatrix} 5/(6\sqrt{\sqrt{2}}) \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$E_{w2} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{\sqrt{2}}/18 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{w1} = D_{w2} = \begin{pmatrix} 5\sqrt{\sqrt{2}}/6 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon_0$$

を得る。よって、求める z 平面の電界は

$$E_{z1} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad E_{z2} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$D_{z1} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 0 \end{pmatrix} \epsilon_0, \quad D_{z2} = \begin{pmatrix} 5/6 \\ 1/6 \end{pmatrix} \epsilon_0$$

となる。また、単位面積あたりの静電容量は w 平面における電束密度に等しく

$$C = (5\sqrt{\sqrt{2}}/6) \epsilon_0$$

である。

6. む す び

二次元均一異方性領域の写像理論を更に進めて、複合領域に対する等方化写像の方法を述べ、その具体例をも示した。この方法は、現在関心が深まりつつある光変調器その他の計算に直接応用可能である。また等角写像を包含する写像理論としても、電磁気学的に興味あるものと考えている。

この写像は一般にはアフィン変換となり、アフィン変換の性質をはあくしておくことにより、等方性領域の電界から、それに対応する異方性領域内の電界は、

容易に理解することができる。そのような観点からもこの写像理論は広く応用の可能性を有するものであると言えよう。(昭和54年4月2日受付)

文 献

- (1) J. Fontanella, C. Andeen & D. Schuele: "Low-frequency dielectric constants of α -quartz, sapphire, MgF_2 , and MgO ", *J. Appl. Phys.*, **45**, 2852 (1974)
- (2) R. P. Owens, J. E. Aitken & T. C. Edwards: "Quasi-static characteristics of microstrip on an anisotropic sapphire substrate", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, **MTT-24**, 499 (1976)
- (3) E. Yamashita & K. Atsuki: "Distributed capacitance of a thin-film electrooptic light modulator", *ibid.*, **MTT-23**, 177 (1975)
- (4) M. Kobayashi: "Analysis of the microstrip and the electrooptic light modulator", *ibid.*, **MTT-26**, 119 (1978)
- (5) 中田: 「3相内鉄形変圧器鉄心内の磁束分布の解析」 電学論 B **95**, 217 (昭 50)
- (6) S. Kusase & R. Terakado: "Mapping theory of two-dimensional anisotropic regions", *Proc. IEEE (Lett.)*, **67** 171 (1979)