境界要素法による静電界および静磁界解析における 未知ベクトル変数の計算精度への影響

正員 坪井 始 (岡山大)

准員 田中 始男 (岡山大)

Influence of Vector Variables to the Computational Accuracies of Boundary Element Method for Electrostatic and Magnetostatic Problems

Hajime Tsuboi, Member, Motoo Tanaka, Associate (Okayama University)

The applicability of boundary element method has been shown by its applications to scalar potential problems. However, unified formulations for the boundary element method using vector variables and relations between unknown vector variables and the accuracy of the solutions have not been discussed. In this paper, the unified formulation, how to select unknowns and their influence to the accuracy of the solutions in magnetostatics and electrostatics were investigated, and the following results were obtained.

When electric field is assumed as unknown in electrostatic problems, or magnetic flux density or vector potential is assumed as unknown in magnetostatic problems, the formulation for the boundary element method using vector variables can be performed. In magnetostatic problems, the equations for the method using a vector potential were shown, and their suitability was verified. Furthermore, in the method using the vector potential as unknown, there is a tendency for computational error of magnetic flux density to larger than the method using magnetic flux density as unknown, and computational error for the numerical integration of magnetic flux density may become large near the boundary surfaces because of its strong singularity.

キーワード：境界要素法，静電界解析，静磁界解析，ベクトル変数，数値解析

1. ま え が き

電磁界の数値解析法としては、積分方程式法、有限差分法、有限要素法、境界要素法などがあり、各手法の特長に応じた対象に適用されている⁽¹⁾⁽²⁾。このなかで、境界要素法は、適用が磁気飽和のような非線形性のない場に限られるが、必要な入力データ数が少ない、高精度の解が得られるなどの特長があり、最初にスカラーポテンシャル問題に適用され、その有効性が示されている⁽³⁾。

本論文では、電磁波の問題に適用されているベクトル変数を用いた境界要素法⁽⁴⁾について静電界および静磁界問題における検討を行う。スカラーポテンシャルを

用いた境界要素法⁽³⁾は積分方程式法の一つである表面荷法との共通点が多い⁽⁵⁾。また、ベクトル変数を用いた境界要素法は、境界積分法 (Boundary Integral Method)⁽⁴⁾と呼ばれているように、積分方程式法、特に境界積分法から派生した手法と考えられる。静電界問題は、ソースが電位条件あるいは電荷で与えられるため、スカラーポテンシャル問題として扱うことができ、境界要素法による解析手法は確立されている⁽³⁾。しかし、磁界問題および電磁界問題は、ベクトル量である電流のソースを考える必要があり、ベクトル変数の考慮が不可欠となる。静磁界問題においては、磁束密度 (磁界) またはベクトルポテンシャルを未知数とする方法が考えられる。前者については積分方程式法

との関係が検討され⁽⁶⁾、更に磁束密度と電界を未知数とする境界要素法が渦電流問題に拡張されている⁽⁷⁾⁽⁸⁾。また、ベクトルポテンシャルを用いた境界要素法も提案されている^{(9)~(11)}。スカラグリーンの定理を用いた定式化による検討⁽¹²⁾や電界を未知数とする有限要素法についての検討⁽¹³⁾も行われているが、ベクトル変数を用いる境界要素法に関する統一的な定式化の検討、未知変数の違いの計算誤差への影響など十分な考察が行われているとは言えない。従って、本論文では、静磁界および静電界問題においてベクトルグリーンの定理を用いた境界要素法の定式化および外部条件の与え方などについて考察し、未知ベクトル変数が境界要素法に与える影響について計算例を用いて検討する。

2. 定式化

ポテンシャル問題(スカラポテンシャル問題)における境界要素法の定式化はグリーンの定理(以後、ベクトルグリーンの定理と区別するためスカラグリーンの定理と呼ぶ)を用いて行われ⁽³⁾、ポテンシャル問題の実用的解析手法として種々の分野に応用されている。

しかし、磁界問題および電磁界問題においては、ベクトル量のソースである電流を考える必要があり、ベクトル変数の考慮が不可欠となる。スカラグリーンの定理のベクトル類似式は、ベクトルグリーンの定理⁽⁴⁾⁽¹⁴⁾と呼ばれ、ベクトル変数を用いた境界要素法の基礎となる。

また、静電界および静磁界問題の支配方程式はマクスウェルの方程式から得られるが、本論文では媒質が一樣で一定な場合を扱うことにする。

〈2・1〉ベクトル変数を用いた境界要素法の基本式

ベクトル変数としては、電界、磁束密度、ベクトルポテンシャルなどが考えられるが、ここではベクトル変数を用いた境界要素法の統一的な基本式を導出する。

図1の領域 V において、 P と Q を位置に関するベクトル変数とし、その一次および二次導関数が閉曲面(境界面) S とその内部で連続であるとする、ベクトルグリーンの定理は次式で与えられる⁽⁴⁾⁽¹⁴⁾。

$$\begin{aligned} & \iiint_V (\mathbf{Q} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{Q}) dv \\ &= \iint_S (\mathbf{P} \times \nabla \times \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \times \nabla \times \mathbf{P}) \cdot \mathbf{n}' ds \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 V : S に囲まれた領域、 $\mathbf{n}'$: S 上の外向き単位法線ベクトル

図1 境界面と解析領域

Fig. 1. Boundary surface and region to be analyzed.

S 上およびその内部で一次および二次導関数が連続な任意のベクトル変数を $\mathbf{F}$ とし、(1)式において次のように置く。

$$\mathbf{P} = \mathbf{F} \quad (2a)$$

$$\mathbf{Q} = \phi \mathbf{a} \quad (2b)$$

ここで、 $\mathbf{a}$: 任意の単位定ベクトル、 ϕ : 基本解
基本解は静電界、静磁界問題では次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \phi &= \phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') \\ &= \frac{1}{4\pi|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} = \frac{1}{4\pi r} \end{aligned} \quad (3)$$

ここで、 $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, $\mathbf{x}$: 計算点の位置ベクトル、 $\mathbf{x}'$: ソース点の位置ベクトル

(2)式を(1)式へ代入すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{ (\phi \mathbf{a}) \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \{ \nabla \cdot (\phi \mathbf{a}) \} \\ & \quad - \nabla^2 (\phi \mathbf{a}) \} dv \\ &= \iint_S \{ \mathbf{F} \times \nabla \times (\phi \mathbf{a}) - (\phi \mathbf{a}) \times \nabla \times \mathbf{F} \} \cdot \mathbf{n}' ds \end{aligned} \quad (4)$$

$\mathbf{a}$ が定ベクトルであることに注意し、ベクトル公式を用いて(4)式を整理すると次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \{ \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \phi + \mathbf{a} \cdot \nabla \phi (\nabla \cdot \mathbf{F}) \\ & \quad + \mathbf{a} \nabla^2 \phi \} dv - \iint_S \mathbf{a} \cdot \nabla \phi (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}') ds \\ &= \iint_S \{ \mathbf{a} \cdot (\mathbf{n}' \times \mathbf{F}) \times \nabla \phi - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \\ & \quad \times \mathbf{n}' \phi \} ds \end{aligned} \quad (4')$$

(4')式において $\mathbf{a}$ が任意であることを考慮すると、(4')式から次式が得られる。

$$\begin{aligned} & \iint_S \{ (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}') \nabla \phi - (\mathbf{F} \times \mathbf{n}') \times \nabla \phi - (\nabla \times \mathbf{F}) \\ & \quad \times \mathbf{n}' \phi \} ds - \iiint_V \{ (\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}) \phi \\ & \quad + (\nabla \cdot \mathbf{F}) \nabla \phi \} dv = 0 \end{aligned} \quad (4'')$$

計算点($\mathbf{x}$)における演算子 ∇ を、ソース点($\mathbf{x}'$)における演算子 ∇' で置き換え、特異点積分を行うと計算点 i (その位置ベクトルは $\mathbf{x}$)における $\mathbf{F}$ の式が得られる⁽⁴⁾⁽¹⁵⁾。

$$\frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{F}_i = \iint_S \{-(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}') \nabla' \phi + (\mathbf{F} \times \mathbf{n}') \times \nabla' \phi + (\nabla' \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}' \phi\} ds + \iiint_V \{\nabla' \times \nabla' \times \mathbf{F} \phi + \nabla' \cdot \mathbf{F} \nabla' \phi\} dv \quad (5)$$

ここで、

$$\nabla' \phi = -\nabla \phi = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{4\pi |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^3} = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

Ω_i は領域 V を見る立体角で、 i が V の内部にあるとき 4π 、 i が S 上にあるとき 2π 、 i が V の外部にあるとき 0 となる。

また、(5)式右辺の体積分の第1項は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \iiint_V \nabla' \times \nabla' \times \mathbf{F} \phi dv \\ &= \iiint_V \{\nabla' \times (\phi \nabla' \times \mathbf{F}) - \nabla' \phi \times \nabla' \times \mathbf{F}\} dv \\ &= -\iint_S (\nabla' \times \mathbf{F}) \times \mathbf{n}' \phi ds + \iiint_V (\nabla' \times \mathbf{F}) \\ & \quad \times \nabla' \phi dv \end{aligned}$$

従って、(5)式は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{F}_i &= \iint_S \{-(\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}') \nabla' \phi + (\mathbf{F} \times \mathbf{n}') \\ & \quad \times \nabla' \phi\} ds + \iiint_V \{(\nabla' \times \mathbf{F}) \\ & \quad \times \nabla' \phi + \nabla' \cdot \mathbf{F} \nabla' \phi\} dv \quad (6) \end{aligned}$$

(5)式または(6)式がベクトル変数を用いる境界要素法の基本式である。両式において面積分は境界面 S の外のソースの寄与を表し、体積分は V 内のソースの寄与を表す⁽¹²⁾。

(5)式は $\nabla \times \nabla \times \mathbf{F}$ の項が陽に現れているためベクトルポテンシャルのように2階の回転演算で支配方程式が表される場合に適用され、(6)式はマクスウェルの方程式のように1階の微分方程式が支配方程式の場合に適用される。ここで、(6)式が基礎的なベクトル変数を用いた境界要素法の基本式と考えることができる。(6)式において境界面 S をその影響がなくなる無限遠にとるならば、ベクトル $\mathbf{F}$ がその回転と発散の体積分で決まる式となる。このことは、ベクトル場が回転と発散が与えられれば一義的に決まるという数

学的な定義に符合している。従って、(5)式はベクトル変数の支配方程式に応じた(6)式の一つの変形である。以下の節では、このような観点から磁束密度、ベクトルポテンシャル、電界を未知ベクトル変数とする境界要素法の基本式について検討する。

2・2 磁束密度を用いた境界要素法 静磁界問題

問題を解くために、未知ベクトル変数として磁束密度 $\mathbf{B}$ を用いる場合を考える。支配方程式は、マクスウェルの方程式より次式で表される。

$$\nabla \times (\mathbf{B}/\mu) = \mathbf{J} \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (8)$$

ここで、 $\mathbf{J}$: 電流密度、 μ : 透磁率

そこで、 $\mathbf{F} = \mathbf{B}$ として、(7)、(8)式を(6)式へ代入すると次式が得られる⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{4\pi} \mathbf{B}_i &= \iint_S \{-(\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}') \nabla' \phi + (\mathbf{B} \times \mathbf{n}') \\ & \quad \times \nabla' \phi\} ds + \iiint_V \mu \mathbf{J} \times \nabla' \phi dv \quad (9) \end{aligned}$$

(9)式において、 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'$ は表面磁荷に、 $\mathbf{B} \times \mathbf{n}'$ は表面電流に対応し⁽⁶⁾、右辺の体積分はビオサバルの法則による電流の磁束密度への寄与を表している。すなわち、境界面 S を無限遠に遠ざけたとき、その寄与は零となり、(9)式はビオサバルの法則の式となる。二媒質問題の場合は、(9)式から得られる境界面の表裏の式を用いて、 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{n}'$ または $\mathbf{B} \times \mathbf{n}'$ を消去することができ、表面磁荷法または表面電流法の式がそれぞれ得られる⁽⁶⁾。このことは、(9)式は境界面 S に囲まれた閉領域の式であるが、開領域の式である積分方程式の式と等価な式であることを示している。文献(14)において、(9)式の各項の物理的な意味について検討され、(9)式が(7)、(8)式を満たすことが示されている。

図2に示す境界面 S 上の計算点 i における磁束密

図2 境界面 S で区切られた二つの解析領域
Fig. 2. Two regions divided by surface S .

度 $\mathbf{B}$ の境界条件は、磁束密度の法線成分と磁界の接線成分の連続条件を用いて次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{B}_{1i} \cdot \mathbf{n}_{1i} &= \mathbf{B}_{2i} \cdot \mathbf{n}_{1i} \\ (\mathbf{B}_{1i} \times \mathbf{n}_{1i}) / \mu_1 &= (\mathbf{B}_{2i} \times \mathbf{n}_{1i}) / \mu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (10)$$

ここで、 $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$: それぞれ境界面 S における領域 V_1, V_2 側の磁束密度、 μ_1, μ_2 : それぞれ領域 V_1, V_2 の透磁率、 $\mathbf{n}_1$: S 上で V_1 から V_2 へ向かう単位法線ベクトル

(9)式において、 $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{1i}$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}'_1$, $\Omega_i = 2\pi$ として S 上で V_1 側の式を、 $\mathbf{B}_i = \mathbf{B}_{2i}$, $\mathbf{n}' = \mathbf{n}'_2$, $\Omega_i = 2\pi$ として V_2 側の式を N 個の節点において作成すると次式が得られる。

$$\frac{1}{2} [I] \{B_i\} = [C_{1o}] \{B_i\} + \{B_{1o}\} \dots\dots\dots (11a)$$

$$\frac{1}{2} [I] \{B_2\} = [C_{2o}] \{B_2\} + \{B_{2o}\} \dots\dots\dots (11b)$$

ここで、 $[I]$: $3N \times 3N$ の単位行列、 $[C_{1o}]$, $[C_{2o}]$: $3N \times 3N$ の係数行列、 $\{B_i\}, \{B_2\}$: 未知磁束密度 ($3N$ 次)、 $\{B_{1o}\}, \{B_{2o}\}$: 電流などの境界面以外のソースによる磁束密度 ($3N$ 次)

また、(11)式において $\{B_i\}, \{B_{1o}\}, \{B_2\}, \{B_{2o}\}$ は次式で表される。

$$\left. \begin{aligned} \{B_i\} &= \{B_{1n1} \ B_{1u1} \ B_{1v1} \ B_{1n2} \ B_{1u2} \ B_{1v2} \dots\}^T \\ \{B_{1o}\} &= \{B_{1on1} \ B_{1ou1} \ B_{1ov1} \dots\}^T \\ \{B_2\} &= \{B_{2n1} \ B_{2u1} \ B_{2v1} \dots\}^T \\ \{B_{2o}\} &= \{B_{2on1} \ B_{2ou1} \ B_{2ov1} \dots\}^T \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (12)$$

(12)式において、 n は法線方向、 u と v はそれぞれ互いに垂直な接線方向を表す添字である。

(11a), (11b)式は独立な二組の式の形であるが、(10)式より図2に示す境界面上の点 i における次の条件によって関係づけられている。

$$\left. \begin{aligned} B_{1ni} &= B_{2ni} \\ \frac{1}{\mu_1} B_{1ui} &= \frac{1}{\mu_2} B_{2ui} \\ \frac{1}{\mu_1} B_{1vi} &= \frac{1}{\mu_2} B_{2vi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (13)$$

(13)式において、一方の側の $\mathbf{B}$ を未知数として図2に示す境界面上の点 i で(11a), (11b)式を用いて式を組立てれば、磁束密度の各成分を未知数とする最終的な $3N$ 次の連立方程式を作成することができる。

例えば、 $\{B_i\}$ を未知数とする場合には、 $\{B_2\}$ は、(13)式より

$$\{B_2\} = \{B_{1n1} \ \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1u1} \ \frac{\mu_2}{\mu_1} B_{1v1} \dots\}^T$$

と表される。これを(11b)式に代入して $\{B_2\}$ を $\{B_i\}$ で置き換えると次のようになる。

$$\frac{1}{2} [I]' \{B_i\} = [C_{2o}'] \{B_i\} + \{B_{2o}\} \dots\dots\dots (11b')$$

ここで、 $[I]'$: $[I]$ の接線成分に対応する対角項を (μ_2/μ_1) 倍した行列、 $[C_{2o}']$: $[C_{2o}]$ の接線成分に対応する列を (μ_2/μ_1) 倍した行列
(11a)式と(11b')式を加えると次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} ([I] + [I']) \{B_i\} \\ = ([C_{1o}] + [C_{2o}']) \{B_i\} + \{B_{1o}\} + \{B_{2o}\} \end{aligned} \dots\dots\dots (14)$$

(14)式は、計算点 i において、まず V_1 側で式を立て、それに加えて V_2 側の立てたものである。これは、節点法において接続されたインピーダンスごとに隣接節点との関係式を作成し、係数マトリックスに加えていく過程と類似している。(13)式を整理して、次のような形式の $3N$ 元の連立方程式を作成できる。

$$[C] \{B\} = \{d\} \dots\dots\dots (15)$$

ここで、 $[C]$: 最終方程式の係数行列、 $\{B\}$: 未知磁束密度ベクトル、 $\{d\}$: 最終方程式の定数ベクトル

(11b)式の任意の行を定数倍して(14)式の任意の行に加えても、行列の性質から(15)式の解は変わらないから、最終方程式を組立てる際には、誤差が入りにくく、なるべく簡単な形になるように(11b)式の各行を任意の定数倍して(11a)式に加えることができる。

境界面 S は、ベクトルグリーン定理の前提条件を満たせば、任意に選べるが、一様な媒質中に設定することは無意味である。すなわち、(13)式においてすべての成分が連続になるため $(\mu_2/\mu_1) = 1$ となり、 $\mathbf{n}_{2i} = -\mathbf{n}_{1i}$ であることに注意すれば、(11a)式に(11b)式を加えて(14)式は、

$$\{B_{1i}\} = \{B_{1o}\} + \{B_{2o}\} \dots\dots\dots (16)$$

となり、境界積分によって得られる $[C_{1o}]$, $[C_{2o}]$ のマトリックスは消滅する。(16)式は、任意の計算点 i の磁束密度が外部強制項(例えば、ビオサバルの法則)のみで決まることを表しており、境界面の設定した意味はない。

以上により、境界面のどちらかの面上の磁束密度を未知ベクトル変数として連立方程式を作成し、解くことができる磁束密度を未知ベクトル変数とする境界要素法が示された。任意点の磁束密度は、(9)式により求められる。また、ビオサバルの式による電流の影

響のほかに、外部磁界として B_0 が与えられる場合は (9) 式の右辺に B_0 を加えることができる。

また、ほかにベクトルグリーン定理による磁界の式を用いた境界要素法⁽¹⁶⁾の提案があるが、文献(16)では媒質中の電磁界の性質を用いて最終的には表面電流や表面磁荷についての積分方程式に変換している。

〈2・3〉 ベクトルポテンシャルを用いた境界要素法

次に、未知ベクトル変数としてベクトルポテンシャル A を用いた境界要素法による静磁界解析を考える。静磁界問題の支配方程式は、(7)、(8)式で表されるが、ここで、ベクトルポテンシャル A を導入すると、 A は、次式で定義される。

$$\nabla \times A = B \quad \dots\dots\dots (17)$$

(17)式を(7)式へ代入すると、次の A の支配方程式が得られる。

$$\nabla \times \nabla \times A = \mu J \quad \dots\dots\dots (18)$$

また、(17)式を(8)式へ代入すると、

$$\nabla \cdot (\nabla \times A) = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

となり、(8)式はベクトル演算の性質により常に成立する。

A のゲージとし、ローレンツゲージを採用すると、

$$\nabla \cdot A = 0 \quad \dots\dots\dots (20)$$

となり、これは静磁界問題ではクーロンゲージに一致する。

$F=A$ として、(18)、(20)式を(5)式へ代入すると、

$$\begin{aligned} & \frac{\Omega_i}{4\pi} A_i \\ &= \iint_S \{ -(A \cdot n') \nabla' \phi + (A \times n') \times \nabla' \phi \\ &+ (\nabla' \times A) \times n' \phi \} ds + \iiint_V \mu J \phi dv \\ & \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

(21)式は、領域 V 内のベクトルポテンシャル A が、境界面 S 上の A と $\nabla' \times A$ の接線成分によって決まることを表している。右辺の体積分の項はベクトルポテンシャルに対するビオサバルの法則による電流の寄与を表し、 S が無限遠に遠ざかるとき(9)式の場合と同様に(21)式はビオサバルの法則を表す。

計算点 i の磁束密度 B_i は、(21)式で表されるベクトルポテンシャルから両辺の回転演算を行って次のように求められる。

$$\begin{aligned} \frac{\Omega_i}{4\pi} B_i &= \frac{\Omega_i}{4\pi} (\nabla \times A)_i \\ &= - \iint_S \{ [(A \times n') \cdot \nabla'] \nabla' \phi \\ &+ [(\nabla' \times A) \times n'] \times \nabla' \phi \} ds \end{aligned}$$

$$+ \iiint_V \mu J \times \nabla \phi dv \quad \dots\dots\dots (22)$$

(22)式を用いれば、境界面上での数値微分⁽¹⁷⁾は不要である。

境界面 S 上の計算点 i における(21)式のための境界条件は、ベクトルポテンシャルの連続条件と磁界の接線成分の連続条件で、次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} A_{1ni} &= A_{2ni} \\ A_{1ui} &= A_{2ui} \\ A_{1vi} &= A_{2vi} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (23)$$

$$\left. \begin{aligned} (\nabla' \times A)_{1ui}/\mu_1 &= (\nabla' \times A)_{2ui}/\mu_2 \\ (\nabla' \times A)_{1vi}/\mu_1 &= (\nabla' \times A)_{2vi}/\mu_2 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (24)$$

磁束密度を用いた場合と同様に、(21)式を境界面の両側に適用し、(23)式を用いることによって、一節点あたりベクトルポテンシャル三成分に対する三つの方程式を作成することができる。また、(22)式を境界面の両側に適用し、(24)式を用いることにより、磁束密度の接線成分二成分に対する二つの方程式を作成することができる。従って、一つの節点に対して未知数が五成分で、方程式が五つとなり、解くべき連立方程式を組立てることができる。

一つの節点に対する未知数の数が、磁束密度を用いる場合は3で、この場合は5となり不利になるように思われるが、二媒質問題では(21)、(23)式から作られるベクトルポテンシャルの式から、 $(\nabla' \times A) \times n$ の項を消去することができるため、ベクトルポテンシャル三成分で連立方程式を作成でき、大きな不利とはならない。このとき、 $(\nabla' \times A) \times n'$ は、得られた A を用いて磁束密度二成分の連立方程式を作成して、求めることができる。具体的には、 n' の符号に注意して、 V_1 側で作成した(21)式に μ_1/μ_2 をかけて、 V_2 側で作成した(21)式に加えることによって $(\nabla' \times A) \times n'$ の項を消去することができる。

磁束密度を用いる場合と同様に、外部ベクトルポテンシャルとして A_0 を(21)式の右辺に加えることができる。この場合、通常 A_0 はある磁束密度 B_0 を表すように与えるため、次の二つの式を満たす必要がある。

$$\nabla \times A_0 = B_0 \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\nabla \cdot A_0 = 0 \quad \dots\dots\dots (26)$$

以上により、ベクトルポテンシャルを未知ベクトル変数とする静磁界問題のための境界要素法が示された。

また、ベクトルポテンシャルを用いた定式化は、成分ごとにスカラ関数としてスカラグリーン定理を用いて行うこともできる⁽⁹⁾⁽¹³⁾が、ここでは統一的にベ

クトルグリーンの定理を用いる場合について検討する。

〈2・4〉 静電界問題 静電界問題の支配方程式は、マクスウェルの方程式より、電界を $\mathbf{E}$ として次式で表される。

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad \dots\dots\dots (27a)$$

$$\nabla \cdot (\epsilon \mathbf{E}) = \rho \quad \dots\dots\dots (27b)$$

ここで、 ϵ : 誘電率、 ρ : 電荷密度

静電界問題は、スカラーポテンシャル ϕ を導入して

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad \dots\dots\dots (28)$$

とおくことにより、 $\nabla \times \mathbf{E} = 0$ は恒等的に成立するため、(7b)式より $\nabla^2 \phi = -\rho/\epsilon$ なるポアソンの方程式を解く問題に帰着させることができる。そのため、静電界問題は一般に、積分方程式法の一つである表面電荷法⁽¹⁸⁾やスカラーポテンシャルを用いた境界要素法⁽³⁾を用いて解かれている。

一方、(6)式よりポテンシャルを用いずに直接電界 $\mathbf{E}$ を求めることもできる。 $\mathbf{F} = \mathbf{E}$ として、(27a)、(27b)式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{\partial \mathbf{E}_i}{\partial \pi} = \iint_S \{ -(\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}') \nabla' \phi + (\mathbf{E} \times \mathbf{n}') \times \nabla' \phi \} ds + \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon} \nabla' \phi dv \quad \dots\dots (29)$$

S を無限遠に遠ざけると、 $\nabla' \phi \rightarrow 0$ 、 $\phi \rightarrow 0$ となり、

$$\mathbf{E}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon} \iiint_V \frac{\rho \mathbf{r}}{r^3} dv \quad \dots\dots\dots (30)$$

が得られ、クーロンの法則より求めた電界の式に一致する。(29)式は静磁界問題の $\mathbf{B}$ の式によく対応しており、ソースが $\nabla \cdot \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ で与えられるか、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu \mathbf{J}$ で与えられるかの違いがあるのみである。

3. 計算例

ベクトル変数を用いた境界要素法を、理論解のわかっている磁性球モデルおよび三次元モデルとして磁性立方体モデルに適用し、ここで考察した定式化の妥当性を確認した。ここでは静磁界問題を扱ったが(9)式の体積分の値として外部磁束密度を与える問題であるので、この値を(29)式の体積分で置き換え、磁束密度を電界に置き換えれば、ここでの議論はすべて静電界問題にも適用することができる。

〈3・1〉 磁性球モデル 図3に示す半径0.1mの磁性球を $\mathbf{B} = (0, 0, 1)$ の一様磁界中に置いたモデルを用いて、磁束密度を未知ベクトル変数とした場合 (B 法と呼ぶ) とベクトルポテンシャルを未知ベクトル変数とした場合 (A 法と呼ぶ) の計算の比較を行った。このとき、外部磁束密度 $\mathbf{B}_0$ は B 法では(9)式の体積

図3 磁性球モデル

Fig. 3. Magnetic sphere model.

表1 磁性球モデルの計算誤差
Table 1. Computation errors of the magnetic sphere model.

	A法				B法		
	磁束密度の誤差 (%)			ベクトルポテンシャルの誤差 (%)	磁束密度の誤差 (%)		
	$r=0$	$r=0.05$	$r=0.1$ 境界面	$r=0.1$ 境界面	$r=0$	$r=0.05$	$r=0.1$ 境界面
$\mu_s = 10$	-3.48	-3.80	-10.7	-3.27	-0.680	-0.720	-8.17
$\mu_s = 100$	-4.42	-4.76	-13.8	-4.49	-0.782	-0.850	-8.79
$\mu_s = 1,000$	-4.54	-4.88	-14.4	-4.67	-0.835	-0.902	-10.4

分の値として与え、 A 法では後述するようにその回転が $\mathbf{B}_0$ となるような外部ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}_0$ を(21)式の体積分の値として与える。三角形要素としては平面要素を用い、要素上の未知ベクトルは一定とする、いわゆる一定要素を用いた。このとき、要素上に一つの節点を置き、節点で境界条件が成立するように方程式を作成している。また、境界積分はすべて数値積分によって行った⁽¹⁹⁾。

対称性を考慮し、球面の1/8を100の三角形要素に分割し、 $\mu_s = 10, 100, 1,000$ とした場合について、 A 法と B 法による球内部の $z=0$ の平面上、 $r=0, 0.05, 0.1$ の計算誤差を表1に示す。また、 z 軸上の磁束密度の分布を図4に示す。 z 軸上の磁束密度は z 成分のみをもつので、磁束密度の値は z 成分の大きさに等しくなっている。計算精度は、 B 法のほうが1けた良くなっている。これは、 B 法においては磁束密度の接線成分 B_t は $z=0$ の平面上で最大に、 $z=0.1$ の上部で零となり、法線成分 B_n は $z=0$ の平面上で零に、 $z=0.1$ の上部で最大となるため、 B_t と B_n が相補の関係にあつて計算精度が高くなっていると思われる⁽⁶⁾。このことは、表1において、未知ベクトルである $r=0.1$ の磁束密度 (接線成分のみである) の精度に比べて、内部の磁束密度の精度が非常に良くなっ

図 4 z 軸上の磁束密度分布
Fig. 4. Distributions of magnetic flux density on z -axis.

ていることから類推できる。

一方、 A 法の場合は、未知ベクトルである $r=0.1$ のベクトルポテンシャルの精度に比べて、磁束密度の接線成分の計算精度が低い。これは、 B 法のような相補効果がなく、解析的ではあるが求められたベクトル

ルポテンシャルの計算点における微分演算によって磁束密度を求めるために精度が低くなったものと考えられる。

また、図 4、表 1 から明らかなように、比透磁率が大きくなると、 A 法の計算精度が低下している。これは、(21)、(24)式に示されるように磁束密度の境界条件として、 A 法では磁束密度の接線成分のみが使用されるため、表面電流法⁽⁶⁾に似た性質となっているためと思われる。このときの誤差の原因は、(24)式で一方の透磁率が大きくなったときに起きる情報落ちである。 B 法では前述の B_t と B_n の相補の関係によって情報落ちの影響が小さくなっていると考えられる。

A 法では、外部磁束密度 B_0 を考慮するために、外部ベクトルポテンシャル A_0 を導入し、 $B_0=(0, 0, 1)$ として (25)、(26)式を満たすように決定する必要がある。ここでは

$$A_0 = \left(-\frac{y}{2}, \frac{x}{2}, 0 \right) \dots\dots\dots (31)$$

を与えている。この場合の境界面上（球面上）の未知ベクトル変数、すなわちベクトルポテンシャルと磁束密度の接線成分の分布を図 5 に示す。また、(25)、(26)式を満たす他の A_0 を与えた場合も同様の解が得られる⁽²⁰⁾。

〈3・2〉 磁性立方体モデル 図 6 に示す静磁界問題用電気学会モデルを簡略化した磁性立方体モデルに A 法と B 法を適用し、その結果を検討した。この場合も対称性を考慮して、立方体表面の $1/8$ を 384 の要素に分割している。磁性体の比透磁率 μ_s は 10, 100, 1,000 とした。

$z=0$ の平面上の $y=x$ の直線 l_1 上および $z=0.075$ の平面上の $y=x$ の直線 l_2 上の磁束密度の分布を図 7 に示す。同図に示すように、磁性体の外部では A 法と B 法の計算結果はよく一致しているが、内部では若干の差がある。これは、磁性体球モデルで検討したように A 法の精度が低下しているためと考えられる。また、磁性体内部の境界付近で A 法の磁束密度が大きくなっているのは、(22)式によって境界面上のベクトルポテンシャルから磁束密度を計算するため、数値積分における特異性の強い $1/r^4$ の項の影響である。特に M_s が大きくなるとこの傾向が強くなっている。このように、同じ精度の数値積分を行った場合、 B 法に比べて A 法の磁束密度の計算精度は境界付近で低下することがわかる。特に、本モデルの場合、角点の内部でこの傾向が強くなることを示している。図 8 に磁性立方体モデルの $\mu_s=1,000$ のときの磁束密度分布を示す。同図では、磁束密度ベクトルの基点は、

図 5 境界面上のベクトルポテンシャルと磁束密度の接線成分
Fig. 5. Vector potentials and magnetic flux densities on the boundary.

図 6 磁性立方体モデル
Fig. 6. Manetic cube model.

図 7 直線 l_1 , l_2 上の磁束密度分布
Fig. 7. Distributions of magnetic flux density on the lines l_1 and l_2 .

図 8 磁性立方体モデルの磁束密度分布
Fig. 8. Distribution of magnetic flux density of the magnetic cube model.

$y=0$ (x 軸の上方), $y=x$ (直線 l_2 の上方) の平面上に等間隔に配置している。

二つのモデルの計算結果より、ベクトル変数を用いた境界要素法の定式化の妥当性を確認することができた。 A 法、 B 法ともほぼ同様の結果が得られるが、境界上のベクトルポテンシャルによる式の微分演算である回転演算によって磁束密度を求める A 法では、直接磁束密度を求める B 法に比べて精度が低下する傾向があることがわかった。

4. む す び

以上のように、静磁界、静電界解析のためのベクトル変数を用いた境界要素法の定式化を示すと共に、未知ベクトル変数が解の精度に与える影響について検討した。結果をまとめると次のようになる。

(1) ベクトル変数を用いた境界要素法の統一的な定式化を、ベクトルグリーンの定理を用いて示した。このとき、ベクトル変数を磁束密度、ベクトルポテンシャル、電界と置くことにより、静磁界または静電界解析のための定式化を行うことができ、ビオサバールの法則やクーロンの法則による界に矛盾しないことを示した。

(2) ベクトルポテンシャルを用いた場合には、得

られた境界上のベクトル変数から任意点の磁束密度の計算を行うには、ベクトルポテンシャルの解析的な回転演算によって得られた式を用いなければならないことを示した。また、外部からの強制項となる外部ベクトルポテンシャルの選択には任意性があるが、基本式を満たしていれば妥当な解が得られることを示した。

(3) 静磁界解析における、直接磁束密度を用いる手法とベクトルポテンシャルを用いる手法は、ほぼ同様の結果を与えるが、ベクトルポテンシャルを用いる手法では、境界条件の導入の際の情報落ちのため、および求められた境界値による式の微分演算によって磁束密度を計算するため、計算精度が低下する傾向があることがわかった。また、このとき特異性が強くなるため、境界面付近の数値積分には注意を要することがわかった。特に、透磁率の差が大きいほど、計算精度の低下が著しいことがわかった。

準定常問題、過渡応答問題においては、ベクトル変数を用いることが不可欠となり、磁束密度と電界を用いる手法およびベクトルポテンシャルとスカラーポテンシャルを用いる手法が考えられ、今後の検討が必要である。

(平成元年 3 月 27 日 受付, 同 2 年 1 月 10 日 再受付)

文 献

- (1) 宅間: 「小特集 電気電子機器における計算機支援解析技術 II. 電磁機器の解析技術, A. 電界の解析技術」, 電学誌, 108, 209 (昭 63-3)
- (2) 中田: 「小特集 電気電子機器における計算機支援解析技術, II. 電磁機器の解析技術, B. 磁界の解析技術」, 同上, 108, 213 (昭 63-3)
- (3) C. A. プレビア: 境界要素法の基礎と応用, p. 21 (昭 56) 培風館
- (4) A. J. Poggio & E. K. Miller: "Integral Equation Solutions of Three-Dimensional Scattering Problems", Computer Techniques for Electromagnetics (Ed. R. Mittra), p. 159 (1973) Pergamon Press
- (5) 美咲・坪井・藤宮・河上: 「電界解析における表面電荷法と境界要素法の計算精度の比較について」, 電気学会回転機・静止器合同研究, RM-84-45: SA-84-16 (昭 59)
- (6) 美咲・坪井・児仁井: 「境界要素法による三次元磁界解析」, 同上, RM-83-7: SA-83-7 (昭 58)
- (7) 美咲・坪井・川上: 「境界要素法による三次元うず電流分布の一解析法」, 電学論 A, 105, 533 (昭 60-10)
- (8) H. Tsuboi & T. Misaki: "Three-Dimensional Analysis of Eddy Current Distributions by the Boundary Element Method Using Vector Variables", IEEE Trans. Magnetics, MAG-23, 3044 (1987)
- (9) T. Morisue & M. Fukumi: "3-D Eddy Current Calculation Using the Magnetic Vector Potential", ibid., 24, 106 (1988)
- (10) 小貫, 他: 「有限・境界要素併用法による検証モデルの解析」, 電気学会静止器・回転機合同研究, SA-87-12: RM-87-23 (昭 62)

- (11) 榎園・戸高：「端子電圧を考慮した三次元境界要素磁界解析」，同上，SA-88-20；RM-88-42（昭63）
- (12) 福見・守末：「積分方程式法による磁界解析」，同上，SA-88-16；RM-88-38（昭63）
- (13) 篠崎・山下・中前：「電界を未知数とする有限-境界要素法」，日本シミュレーション学会第8回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム，No.15（昭62）
- (14) J. A. Stratton：Electromagnetic Theory，p.250；468（1941）McGraw-Hill
- (15) 電子通信学会論：電磁界の近代解析法，p.1（昭54）電子通信学会
- (16) 石橋：「境界要素法による高周波誘導加熱時のうず電流解析」，電学論B，104，149（昭59-3）
- (17) 福見・守末：「磁界解析の際の接合条件の近似法と誤差の関係」，同上A，108，558（昭63-12）
- (18) 美咲・坪井・位高・原：「表面電荷法による一般三次元電界の一解析法とその応用」，同上A，101，499（昭56-10）
- (19) T. Misaki & H. Tsuboi："Techniques for Boundary Element Analysis of Three-Dimensional Eddy Current Distribution"，*IEEE Trans. Magnetics*，24，146（1988）
- (20) H. Tsuboi & M. Tanaka："External Conditions for the Vector Potential in the Boundary Element Method"，*IEEE Trans. Magnetics*，25，4138（1989）

坪 井 始（正員）

昭和27年4月23日生。53年3月岡山大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年4月同大学工学部電気工学科（現，電気電子工学科）助手，61年7月同助教授，現在に至る。工学博士。主として，電子計算機による電磁界解析とその電気・電子機器の最適設計への応用に関する研究に従事。電子情報通信学会，情報処理学会，IEEE，境界要素法研究会会員。

田 中 始 男（准員）

昭和39年8月11日生。平成元年3月岡山大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年4月岡山大学工学部情報処理工学科助手，現在に至る。主として，境界要素法による電磁界解析に関する研究に従事。