円筒面に分布する電流による インダクタンスの計算法

正 員 依 田 潔 (三菱電機)

A Calculation Method of the Mutual and Self Inductances Generated by Currents on a Cylinder

Kiyoshi Yoda, Member (Mitsubishi Electric Corporation)

Conventional calculation methods of air-core inductance utilized Neumann's equation for solenoidal coils and Fourier series for saddle coils. However inductance formulas for arbitrarily shaped coils on a cylinder have not been well known.

In this paper, mutual and self inductances generated by any currents on a cylinder are expressed using Fourier-Bessel expansion of the vector potential. An experiment shows the validity of the proposed formulas.

キーワード：インダクタンス，任意形状コイル，フーリエ・ベッセル展開

1. はじめに

従来，空心コイルのインダクタンスの計算は，円筒コイルではノイマンの式に基づく方法⁽¹⁾⁽²⁾，くら形コイルでは二重フーリエ級数展開により求める方法⁽³⁾などが知られている。しかし，より一般形状の空心コイルについてインダクタンスを定式化した報告は少ない。最近，ターナらはフーリエ・ベッセル展開を用いて円筒面に分布する電流によるベクトルポテンシャルを表現した⁽⁴⁾。著者は上記表現を用いて，円筒面に分布する電流による相互インダクタンスおよび自己インダクタンスを与える式を導出した。また，モデルコイルを用いて実験値と計算値を比較することにより，導出した式の妥当性を検証した。

2. 理 論

〈2・1〉 相互インダクタンスの計算 図1のように，半径 a および b の同軸上に配置された円筒面 1，2 上の電流密度ベクトル $\underline{i}_1, \underline{i}_2$ を考える。 $\underline{i}_2$ による円筒面 1 上のベクトルポテンシャルを $\underline{A}_{12}$ とすると， $\underline{i}_1$ および $\underline{i}_2$ による相互インダクタンス M_{12} は次式で与えられる⁽⁵⁾。

$$M_{12} = \frac{1}{I_1 I_2} \iiint \underline{A}_{12} \underline{i}_1 dv \dots\dots\dots (1)$$

ここに， I_1, I_2 ：円筒面 1 および 2 における全電流

また，積分は電流密度 $\underline{i}_1$ の存在する体積に対して行う。ところで， $\underline{i}_1, \underline{i}_2$ は円筒座標 (r, ϕ, z) 系で次式により表現できる。

$$\underline{i}_1 = [0, j\phi_1(z, \phi)\delta(r-a), jz_1(z, \phi)\delta(r-a)] \dots\dots\dots (2)$$

$$\underline{i}_2 = [0, j\phi_2(z, \phi)\delta(r-b), jz_2(z, \phi)\delta(r-b)] \dots\dots\dots (3)$$

ここで， $\delta(r)$ はデルタ関数， $j\phi(z, \phi), jz\phi(z, \phi)$ は座

図 1 二つの円筒面上の電流密度分布

Fig. 1. Current distribution two of cylinders having a common axis.

標 (z, ϕ) における電流密度ベクトルの ϕ 方向, z 方向成分であり, 添字 1, 2 はそれぞれ円筒面 1, 2 に対応する。従って, $\underline{A}_{12} = [A_r, A_\phi, A_z]$ とすると (1) 式は次式となる。

$$\begin{aligned} M_{12} &= \frac{1}{I_1 I_2} \iiint \{ A_\phi j\phi_1(z, \phi) \delta(r-a) \\ &\quad + A_z jz_1(z, \phi) \delta(r-a) \} r dr d\phi dz \\ &= \frac{a}{I_1 I_2} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \{ A_\phi(r=a) j\phi_1(z, \phi) \\ &\quad + A_z(r=a) jz_1(z, \phi) \} d\phi dz \quad \dots (4) \end{aligned}$$

ところで, $a > b$ とすると, $A_\phi(r=a)$, $A_z(r=a)$ は次式で与えられる⁽⁴⁾。 μ_0 は真空の透磁率である。なお, $a > b$ としても, 一般性は失われない。

$$\begin{aligned} A_\phi(r=a) &= \frac{\mu_0 b}{4\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(im\phi) \\ &\quad \times \exp(ikz) \{ I_{m-1}(kb) K_{m-1}(ka) \\ &\quad + I_{m+1}(kb) K_{m+1}(ka) \} j\phi_2^m(k) \\ &\quad \dots (5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_z(r=a) &= \frac{\mu_0 b}{2\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk \exp(im\phi) \\ &\quad \times \exp(ikz) K_m(ka) I_m(kb) jz_2^m(k) \\ &\quad \dots (6) \end{aligned}$$

ここに, $j\phi_p^m(k)$, $jz_p^m(k)$ は $j\phi_p(z, \phi)$, $jz_p(z, \phi)$ の二次元フーリエ変換であり, 次式で与えられる⁽⁴⁾ ($p=1, 2$)。

$$\begin{aligned} j\phi_p^m(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-im\phi) \exp(-ikz) \\ &\quad \times j\phi_p(z, \phi) d\phi dz \quad \dots (7) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} jz_p^m(k) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-im\phi) \exp(-ikz) \\ &\quad \times jz_p(z, \phi) d\phi dz \quad \dots (8) \end{aligned}$$

また, 電流連続の式から $j\phi_p^m(k)$ と $jz_p^m(k)$ に対して次式が成り立つ⁽⁴⁾。

$$jz_1^m(k) = -\frac{m}{ka} j\phi_1^m(k) \quad \dots (9)$$

$$jz_2^m(k) = -\frac{m}{kb} j\phi_2^m(k) \quad \dots (10)$$

なお, $I_m(z)$ および $K_m(z)$ は m 次の変形ベッセル関数であり, 任意の実数 z_1 , z_2 に対して次式が成立することが知られている⁽⁴⁾。

$$\begin{aligned} I_{m-1}(z_1) K_{m-1}(z_2) + I_{m+1}(z_1) K_{m+1}(z_2) \\ = -(2m^2/z_1 z_2) I_m(z_1) K_m(z_2) - 2I_m'(z_1) K_m'(z_2) \\ \dots (11) \end{aligned}$$

ここに, $I_m'(z_1)$, $K_m'(z_2)$ はそれぞれ $I_m(z_1)$, $K_m(z_2)$ の微分を表す。(5)~(11)式を(4)式に代入し, 積分順序を交換して計算・整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} M_{12} &= -\frac{\mu_0 ab}{I_1 I_2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk j\phi_1^m(k) * j\phi_2^m(k) \\ &\quad \times I_m'(kb) K_m'(ka) \quad (a > b) \quad \dots (12) \end{aligned}$$

ここで, *: 複素共役演算子

(12)式により, 図1の二つの円筒上に分布する電流による相互インダクタンスが計算できる。

〈2・2〉 自己インダクタンスの計算 半径 a の円筒面に分布する電流による自己インダクタンス L の計算は(11)式において, $a=b$, $I_1=I_2=I$, $j\phi_1^m(k)=j\phi_2^m(k)=j\phi^m(k)$ として, 次式により与えられる。

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\mu_0 a^2}{I^2} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} dk |j\phi^m(k)|^2 \\ &\quad \times I_m'(ka) K_m'(ka) \quad \dots (13) \end{aligned}$$

ここで $|j\phi^m(k)|$: $j\phi^m(k)$ の絶対値

なお, q 重同軸円筒 ($q \geq 2$) に分布する電流による自己インダクタンス L_t は次式で計算できる⁽⁶⁾。

$$\begin{aligned} L_t &= L_1 + L_2 + \dots + L_q + 2(M_{12} + M_{13} \\ &\quad + \dots + M_{q-1,q}) \quad \dots (14) \end{aligned}$$

ここで, $L_1, \dots, L_q$ は各円筒に対応する自己インダクタンス, $M_{12}, \dots, M_{q-1,q}$ は二つの異なる円筒面に分布する電流による相互インダクタンスであり, いずれも(12)式および(13)式を利用することにより計算できる。同時に, (14)式は厚さが無視できない多層巻線コイルの自己インダクタンスを近似的に与える。

3. モデルコイルによる検証

〈3・1〉 計算式の導出 図2のように, 半径 a の円筒面において階段状に流れる一様な幅 $2d$ を有する帯状電流 I (A) を考える。電流分布は幅内で一様分布と仮定する。また, このモデルコイルは z 方向および ϕ 方向に対して対称形状とする。図3に $z \geq 0$, $0 \leq \phi \leq \pi$ におけるモデルコイルの各座標値を示す。なお, 屈曲部の電流経路を図3のように仮定し, 計算を簡単化した⁽⁷⁾。図2および図3の電流分布に対する $j\phi(z, \phi)$ は, 次式で与えられる。

$$\begin{aligned} j\phi(z, \phi) &= \frac{I}{2a} \{ \{ u(z-z_1+d) - u(z-z_1-d) \} \\ &\quad \times \{ u(\phi) - u(\phi - \Phi_{11}(z)) \} \\ &\quad + \{ u(z-z_2+d) - u(z-z_2-d) \} \\ &\quad \times \{ u(\phi - \Phi_{12}(z)) - u(\phi - \Phi_{22}(z)) \} \\ &\quad + \{ u(z-z_3+d) - u(z-z_3-d) \} \\ &\quad \times \{ u(\phi - \Phi_{23}(z)) - u(\phi - \Phi_{33}(z)) \} \} \\ &\quad (z \geq 0, 0 \leq \phi \leq \pi) \\ &\quad \dots (15) \end{aligned}$$

更に, 負の z または ϕ について次式が成り立つ。

図 2 円筒面上の帯状モデルコイル
Fig. 2. Model coil strip on a cylinder.

図 3 モデルコイルの詳細
Fig. 3. Details of the model coil.

$$j\phi(-z, \phi) = -j\phi(z, \phi) \quad (16)$$

$$j\phi(z, -\phi) = j\phi(z, \phi) \quad (17)$$

なお、 $u(z)$ は単位ステップ関数である。また、 $\Phi_i(z)$ は図 3 の $\phi = \phi_1, \phi_2, \phi_3$ に対応する各屈曲部の電流境界線を示す関数であり、次式で与えられる。

$$\Phi_{11}(z) = \phi_1 + (z - z_1)/a \quad (18)$$

$$\Phi_{12}(z) = \phi_1 + (z - z_2)/a \quad (19)$$

$$\Phi_{22}(z) = \phi_2 + (z - z_2)/a \quad (20)$$

$$\Phi_{23}(z) = \phi_2 + (z - z_3)/a \quad (21)$$

$$\Phi_{33}(z) = \phi_3 + (z - z_3)/a \quad (22)$$

(7) 式および (15)～(17) 式から $j\phi^m(k)$ を求めると次式を得る。

$$\begin{aligned} j\phi^m(k) = & -\frac{iI}{\pi d} \left\{ \int_{z_1-d}^{z_1+d} \sin(kz) dz \right. \\ & \times \int_0^{\Phi_{11}(z)} \cos(m\phi) d\phi + \int_{z_2-d}^{z_2+d} \sin(kz) dz \\ & \times \int_{\Phi_{12}(z)}^{\Phi_{22}(z)} \cos(m\phi) d\phi + \int_{z_3-d}^{z_3+d} \sin(kz) dz \\ & \times \left. \int_{\Phi_{23}(z)}^{\Phi_{33}(z)} \cos(m\phi) d\phi \right\} \quad (23) \end{aligned}$$

更に、(18)～(22) 式を用いて計算・整理すると $m=0$

に対して次式を得る。

$$\begin{aligned} j\phi^0(k) = & -\frac{2iI}{\pi kd} \{ \phi_1 \sin(kd) \sin(kz_1) \\ & + \{ \sin(kd) - kd \cos(kd) \} \\ & \times \cos(kz_1)/(ka) + (\phi_2 - \phi_1) \sin(kd) \\ & \times \sin(kz_2) + (\phi_3 - \phi_2) \sin(kd) \\ & \times \sin(kz_3) \} \quad (24) \end{aligned}$$

また、 $m \neq 0$ に対しては次式を得る。

$$\begin{aligned} j\phi^m(k) = & \frac{-iI}{\pi md} \left[\int_{z_1-d}^{z_1+d} dz \sin(kz) \right. \\ & \times \sin \left\{ m \left(\phi_1 + \frac{z - z_1}{a} \right) \right\} \\ & + \int_{z_2-d}^{z_2+d} dz \sin(kz) \\ & \times \left[\sin \left\{ m \left(\phi_2 + \frac{z - z_2}{a} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \sin \left\{ m \left(\phi_1 + \frac{z - z_2}{a} \right) \right\} \right] \\ & + \int_{z_3-d}^{z_3+d} dz \sin(kz) \\ & \times \left[\sin \left\{ m \left(\phi_3 + \frac{z - z_3}{a} \right) \right\} \right. \\ & \left. - \sin \left\{ m \left(\phi_2 + \frac{z - z_3}{a} \right) \right\} \right] \Bigg] \\ = & \frac{-iI}{\pi md} \sum_{n=1}^3 \{ [\cos\{(k-m/a)z_n \\ & - m(\phi_n - z_n/a)\} \\ & \times \sin\{(k-m/a)d\}]/(k-m/a) \\ & - [\cos\{(k+m/a)z_n + m(\phi_n - z_n/a)\} \\ & \times \sin\{(k+m/a)d\}]/(k+m/a)] \\ & + \frac{iI}{\pi md} \{ [\cos\{(k-m/a)z_2 \\ & - m(\phi_1 - z_2/a)\} \\ & \times \sin\{(k-m/a)d\}]/(k-m/a) \\ & - [\cos\{(k+m/a)z_2 + m(\phi_1 - z_2/a)\} \\ & \times \sin\{(k+m/a)d\}]/(k+m/a)] \\ & + \frac{iI}{\pi md} \{ [\cos\{(k-m/a)z_3 \\ & - m(\phi_2 - z_3/a)\} \\ & \times \sin\{(k-m/a)d\}]/(k-m/a) \\ & - [\cos\{(k+m/a)z_3 + m(\phi_2 - z_3/a)\} \\ & \times \sin\{(k+m/a)d\}]/(k+m/a)] \} \quad (25) \end{aligned}$$

(24)～(25) 式を (13) 式に代入して計算すれば、モデルコイルの自己インダクタンスが求まる。ところで、 $j\phi^m(k)$ が (23) 式で与えられるこの計算例では (13) 式の被積分関数が k および m に関して偶関数なの

表1 モデルコイルの諸元
Table 1. Constants of the model coil.

Z_1 (m)	1.2×10^{-1}
Z_2 (m)	8.0×10^{-2}
Z_3 (m)	4.0×10^{-2}
ϕ_1 (rad)	$\pi/6$
ϕ_2 (rad)	$\pi/3$
ϕ_3 (rad)	$\pi/2$
a (m)	1.6×10^{-1}
d (m)	1.0×10^{-2}

表2 モデルコイルの自己インダクタンス
Table 2. Self inductance of the model coil.

計算値	$0.778 \mu\text{H}$
実測値	$0.70 \mu\text{H}$

で⁽⁸⁾⁽⁹⁾, (13)式は次式に書き換えられる。

$$L = -\frac{2\mu_0 a^2}{I^2} \left\{ \int_0^\infty dk |j\phi^0(k)|^2 I_0'(ka) K_0'(ka) \right. \\ \left. + 2 \sum_{m=1}^\infty \int_0^\infty dk |j\phi^m(k)|^2 I_m'(ka) K_m'(ka) \right\} \quad \dots\dots\dots (26)$$

従って, (24)~(26)式から L を計算すればよい。

〈3・2〉 検証結果・考察 表1に図2のモデルコイルの諸元を示す。また, 表2に自己インダクタンスの計算値および測定値を示す。帯状コイルは厚さ0.1 mmの銅板を用いて塩化ビニル製パイプ上に設置した。インダクタンスはLCRメータを用いて100 kHzにおいて測定した。なお, 試作コイルのインダクタンスが小さいため, 100 kHzより低い周波数では測定が困難であった。表2のように, 計算値と測定値はほぼ一致した。測定に用いたLCRメータの精度は $\pm 7\%$ ($\pm 0.05 \mu\text{H}$)である。また計算値は直流における値である。なお, 計算精度0.5%を得るために, 次数 m は19次まで, k の積分範囲は 10^{-5} から500として計算した。今回は, 図2のような比較的単純な形状のコイルのインダクタンスの計算例を示したが, 図2の階段の刻み幅を必要なだけ小さくすれば円筒面上の任意形状の帯状電流によるインダクタンスが計算できる。また, 今回用いたコイルは1ターンであったが, 2タ

ーン以上のコイルに対しても本計算法は有効である。

4. 結 論

円筒面に分布する電流による相互インダクタンスおよび自己インダクタンスを, ベクトルポテンシャルのフーリエ・ベッセル展開表現を用いて定式化した。更に, モデルコイルによる実験値と比較した結果, 導出した式の妥当性を確認できた。本式を用いれば, 円筒面上の任意形状のコイルのインダクタンスを容易に計算できる。

終わりに, 御指導いただいた当社中央研究所 岩本雅民部長, 山田忠利グループマネージャに感謝いたします。
(平成元年7月10日受付)

文 献

- (1) L. Cohen: "An exact formula for the mutual inductance of coaxial solenoids", *Bull. Bureau Standards*, 3, 2, 295 (1907)
- (2) T. H. Fawzi & P. E. Burke: "The accurate computation of self and mutual inductances of circular coils", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-97, 464 (1978)
- (3) 牟田・向井・八木: 「超電導同期機における空心界磁巻線のインダクタンスと磁束分布の三次元的考察」, 電学論B, 99, 449 (昭54-7)
- (4) R. Turner & R. M. Bowley: "Passive screening of switched magnetic field gradients", *J. Phys. E*, 19, 876 (1986)
- (5) 末松: 電磁気学, p. 212 (昭48) 共立出版
- (6) 高橋: 電磁気学, p. 247 (昭53) 裳華房
- (7) A. Gopinath & B. Easter: "Moment method of calculating discontinuity inductance of microstrip right-angled bends", *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.*, 22, 880 (1974)
- (8) 森口: 数学公式III, p. 173 (昭50) 岩波全書
- (9) 寺沢: 数学概論, p. 496 (昭38) 岩波書店

依 田 潔 (正員)

昭和30年7月10日生。55年3月東京工業大学大学院総合理工学研究科修士課程修了。57年3月大阪大学大学院医学研究科修士課程修了。同年4月三菱電機(株)入社。中央研究所において, 主としてNMRに関する研究に従事。現在, スタンフォード大学客員研究員。