静磁界解析における T - Ω 法と新しい 電流モデルとの関係

正員 長谷部 信也 (明星大)

正員 鹿野 快男 (東京農工大)

Relation of T - Ω Method and a New Current Model in Magnetostatic Fields Analysis

Shinya Hasebe, Member (Meisei University), Yoshio Kano, Member (Tokyo University of
Agriculture and Technology)

This paper clarifies two matters, the source of equation of Ω and the nature of current vector T , of T - Ω method in magnetostatic field analysis. First, we derive a new formula including T_0 (T_0 obtained from exciting current density J_s is expressed as T_0) from the Biot-Savart formula by dyadic operator. From this new formula, the source of equation of Ω is the surface density of magnetic charge ($T_0 \cdot n$) on the boundary of current area. Next, it is clarified that T_0 is the similar value of magnetizing vector M in the ferromagnetic material. Thus, in T - Ω method J_s is converted the surface density of magnetic charge. So, this method is based on the new current model.

キーワード：磁界解析，有限要素法， T - Ω 法，電流モデル，ビオ・サバルの公式，ダイアデック演算

1. はじめに

一般に，磁界に関する方程式の源泉は，ベクトルポテンシャル A で支配方程式を表す手法 (A 法) のように，励磁電流密度 J_s である。これに対し，電流密度 J の性質 ($\nabla \cdot J = 0$) より $\nabla \times T = J$ なる電流ベクトル T に変換する T - Ω 法 (Ω : 変換過程で生ずるスカラーポテンシャル) では⁽¹⁾⁽²⁾，方程式の源泉は T の発散量となり，この手法の大きな特徴となっている。

この手法の静磁界解析への適用は，中田らにより⁽³⁾実用レベルでの扱いが可能となっているが，この新しい手法の確立のためには幾つかの課題が存在している。第一点は T に関する方程式の導出で生ずる Ω の方程式の源泉が明りょうでないこと，第二点は T の性質である。この T と磁界の強さ H を比較した報告もある⁽⁴⁾が，逆に両者の相違が明確になっている。

さて，従来の報告では， Ω に関する微分方程式はいわゆるポテンシャル変換より導出し，境界条件は物理的条件より得る記述が多かった。

こうした微分形による記述は場の局所的な性質を示

すが，全体的な場の性質はつかみにくい面がある。著者らは，前述の課題の解決には場の全体的な性質を明確にする積分形に基づく考察が必要であると考えている。本論文はこの観点で記述し，課題の解決を図っている。まず T - Ω 法の積分形を導出し，この積分形と微分形および境界条件との関係を明りょうにしている。次に，強磁性体での積分形との関連を考察し， T の性格を示している。

すなわち，第2章～第4章では，ビオ・サバルの公式をベクトル演算を拡張したダイアデック演算を用いて展開し，励磁電流密度 J_s ではなく T_0 (J_s 対応する T は未知量ではないので T_0 で表す) を含む新しい公式を導出している。新公式より Ω の積分形を導き， Ω の方程式の源泉が J_s を囲む境界 Γ_0 での面密度 [$T_0 \cdot n$] であることを明確にしている。そして従来の定式化では，この源泉が磁界の境界条件に含まれていることを示す。

第5章では， T_0 の性質に関し考察し，電流を磁荷の面密度で表すアンペアの磁石板および強磁性体を磁化ベクトル M で表す方法との関連を述べている。そ

の結果、 T_0 は磁性体における磁化ベクトル M を励磁電流領域に拡張したものであることを示し、 Ω の方程式の源泉である $[T_0 \cdot n]$ は磁荷の面密度との解釈ができることを述べる。

こうして励磁電流を源泉とする A 法などの従来の方法とは異なり、 T - Ω 法は励磁電流を磁荷の面密度に置き換える新しい電流モデルを前提にしていることを明確にしている。なお本論文は、さきに発表した研究会資料⁽⁵⁾に加筆訂正したものである。

2. ビオ・サバルの公式と A 法との関係

簡単のため、媒質を真空のみに限定すれば、磁束密度 B は次式のビオ・サバル公式で表される (v : 電流の存在する領域、 μ_0 : 真空の透磁率、 r : 注目点 p と作用点 q との距離、なお $(1/r)$ なる関数のこう配演算について、点 p での演算は ∇_p と添え字を付け、点 q での演算には ∇ と添え字を省略する)。

$$B = \frac{1}{4\pi} \int_v \left(\mu_0 J_s \times \nabla \frac{1}{r} \right) dV \quad (1)$$

この公式に対応する微分方程式と構成方程式は次式で示される (H : 磁界の強さ)。

$$\nabla \times H = J_s \quad (2)$$

$$\nabla \cdot B = 0 \quad (3)$$

$$B = \mu_0 H \quad (4)$$

(1)式の公式を、 $\nabla(1/r) = -\nabla p(1/r)$ なる関係を用い、変形すると次式が得られる。

$$B = \nabla p \times \left[\frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\mu_0 J_s}{r} dV \right] \quad (5)$$

上式より、ベクトルポテンシャル A を

$$A = \frac{1}{4\pi} \int_v \frac{\mu_0 J_s}{r} dV \quad (6)$$

と導入でき、 B は次式より得ることができる。

$$B = \nabla \times A \quad (7)$$

また、(6)式のポテンシャル表現に対応する A の偏微分方程式は次式となる。

$$-\nabla^2 A = \mu_0 J_s \quad (8)$$

なお、この方程式は(4)式の関係を用い(7)式を(2)式に代入するいわゆるポテンシャル変換に(9)式のゲージを課すことで得ることもできる。

$$\nabla \cdot A = 0 \quad (9)$$

3. ビオ・サバルの公式と T - Ω 法との関係

(3-1) ビオ・サバルの公式の展開 図1に示す電流モデルを考える。(10)式に示す T_0 を導入するため、図のように、この電流領域を囲む球と同相の境界を Γ_0 とし、この境界に囲まれた内側の領域を v_1 、外

図1 J_s モデルと領域 v_1, v_2 および境界 Γ_0
Fig.1. A model of J_s , area v_1, v_2 and boundary Γ_0 .

側の領域を v_2 とする。

励磁電流密度 J_s の発散は零であるので、領域 v_1 で次式のような T_0 が導入できる。なお、この T_0 は領域 v_2 では0である。

$$J_s = \nabla \times T_0 \quad (10)$$

ここで、(1)式に示すビオ・サバルの公式を J_s ではなく T_0 を含む公式に展開することを試みる。ダイアデック公式を用いることで、(1)式は次のように展開できる (付録参照)。なお、 n は領域 v_1 側の Γ_0 での単位法線ベクトルを示す。

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{v_1} \left\{ -\left(\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) T_0 - \left(\nabla \cdot T_0 \right) \nabla \frac{1}{r} \right\} dV + \int_{\Gamma_0} \left\{ n \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} T_0 + T_0 \nabla \frac{1}{r} \right) - n \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} dS \right] \quad (11)$$

更に、ダイアデック公式 $a \cdot (bc) = (a \cdot b)c$ とベクトル公式より得られる、次の関係

$$\left(n \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) T_0 - n \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) = \nabla \frac{1}{r} \times (T_0 \times n) \quad (12)$$

を用いると、(11)式は次式のようになる。

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int_{v_1} \left\{ -\left(\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) T_0 - \left(\nabla \cdot T_0 \right) \nabla \frac{1}{r} \right\} dV + \int_{\Gamma_0} \left\{ n \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} T_0 + T_0 \nabla \frac{1}{r} \right) - n \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} dS \right] \quad (13)$$

注目点 p が v_1 に属している場合は

$$B = \mu_0 \left[T_0 + \frac{1}{4\pi} \int_{v_1} -\left(\nabla \cdot T_0 \right) \nabla \frac{1}{r} dV + \int_{\Gamma_0} \left\{ n \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} T_0 + T_0 \nabla \frac{1}{r} \right) - n \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} dS \right] \quad (14)$$

となり、点 p が電流を含まない領域 v_2 に属している場合は、上式で $T_0 = 0$ とすればよい。従って、これ以降は(14)式だけを扱うことにする。なお、同様の結果も報告されている⁽⁴⁾が、導出過程が示されていない。

上式で、 $\nabla(1/r)$ なる演算を注目点 p での演算 $\nabla p(1/r)$ に置き換えれば次式を得る。

$$B = \mu_0 \left[T_0 + \frac{1}{4\pi} \times \left\{ \nabla p \left(\int_{v_1} \frac{\nabla \cdot T_0}{r} dV - \int_{r_0} \frac{n \cdot T_0}{r} dS \right) - \nabla p \times \int_{r_0} \frac{T_0 \times n}{r} dS \right\} \right] \dots\dots\dots (15)$$

〈3・2〉 T_0 を含む新しい公式 ここで、上式が元のビオ・サバルの公式と等価であるかの確認が必要となる。(1)式の回転、発散量がそれぞれ(2)、(3)両式となるので、上式の回転、発散量を求めることにする。回転量は次式で示される。

$$\begin{aligned} \nabla \times H &= \nabla \times (B/\mu_0) \\ &= J_s - \nabla p \times \nabla p \times \int_{r_0} \frac{T_0 \times n}{r} dS \\ &\dots\dots\dots (16) \end{aligned}$$

右辺第2項の積分項は(2)式には存在せず、この項は(1)式の展開過程で生じたと解釈できる。上式が(2)式と一致するには次式の条件が必要となる。

$$T_0 \times n = 0 \dots\dots\dots (17)$$

この条件を考慮することで、 B は次式で表される。

$$B = \mu_0 \left[T_0 + \frac{1}{4\pi} \nabla p \times \left\{ \int_{v_1} \frac{\nabla \cdot T_0}{r} dV - \int_{r_0} \frac{n \cdot T_0}{r} dS \right\} \right] \dots\dots\dots (18)$$

上式の発散量は零となるので、(3)式と一致する。

結局、(1)式の J_s を含むビオ・サバルの公式と等価な T_0 を含む新しい公式は、 Γ_0 での(17)式に示す条件の下で、(18)式で表されることがわかった。また、 H に関する表現は次式となる。

$$H = T_0 + \frac{1}{4\pi} \nabla p \times \left\{ \int_{v_1} \frac{\nabla \cdot T_0}{r} dV - \int_{r_0} \frac{n \cdot T_0}{r} dS \right\} \dots\dots\dots (19)$$

4. Ωに関する方程式の源泉と定式化

〈4・1〉 T-Ω法とポテンシャルの関係 ここで、(18)式に示す新公式の右辺の積分項より、体および一重ポテンシャルの和で表されるポテンシャルΩが次式のように導出できる。

$$\Omega = \frac{1}{4\pi} \left(\int_{v_1} \frac{\nabla \cdot T_0}{r} dV - \int_{r_0} \frac{n \cdot T_0}{r} dS \right) \dots\dots\dots (20)$$

(20)式の体ポテンシャルの二次導関数より(21)式の

ポアソン方程式が導かれる。また、境界 Γ_0 でΩは連続であるが、Ωの法線方向の微分値は不連続であり、面密度だけ跳躍する。つまり、(20)式の一重ポテンシャルの面密度は $\mu_0 T_0 \cdot n$ であるので、(22)式の Γ_0 での境界条件(本論文では流束条件と呼ぶことにする)が得られる[導出過程は文献(6)を参照のこと、また式に含まれる添え字の数字は領域 v_1, v_2 に対応する]。なお、媒質のパラメータ μ_0 を考慮している。また、Ωは無限度で零となる。

$$-\mu_0 \nabla^2 \Omega = \mu_0 \nabla \cdot T_0 \dots\dots\dots (21)$$

$$\begin{aligned} n \cdot \{ (\mu_0 \nabla \Omega)_1 - (\mu_0 \nabla \Omega)_2 \} \\ = n \cdot (q_1 - q_2) \\ = -\mu_0 T_0 \cdot n(\Gamma_0) \dots\dots\dots (22) \end{aligned}$$

〈4・2〉 J_s に対応した T_0 およびΩの方程式の源泉

(21)式の方程式はいわゆるポテンシャル変換でも得られる。つまり、(10)式の T_0 を(2)式に代入し、次式のΩを導入する。

$$H = T_0 + \nabla \Omega \dots\dots\dots (23)$$

上式を、(4)式の関係を用い、(3)式に代入することで(21)式となる。また、 Γ_0 で次式に示す磁界の境界条件より(17)式の条件が得られる。

$$(H_1 - H_2) \times n = 0 \dots\dots\dots (24)$$

〈3・2〉節では、(17)式が(1)式のビオ・サバルの公式と等価な T_0 を含む新しい公式[(18)式]が(2)式を満たす条件として示されている。(24)式の境界条件は(2)式の方程式より得られるので、前節の記述のほうが一般性があるといえる。

また、従来のT-Ω法による解析例では、(10)式の T_0 は単純な場合しか報告されず、T-Ω法の実用性に疑問があった。その後、中田らにより図1の励磁電流モデルに対する T_0 が提案されている⁽⁹⁾。この T_0 は z 成分をもち、 z 方向には一定値となる。現在、 T_0 を導出可能な励磁電流モデルでは T_0 の発散が零となる。従って、(21)式の支配方程式では右辺項が零となり、Ωに関する方程式の源泉が存在しないことになる。この点が従来の疑問点であった。

しかし、(20)式の積分形に対応する(22)式の流束条件が存在し、右辺に示す一重ポテンシャルの面密度がΩの方程式の源泉であることがわかる。

〈4・3〉 Γ_0 での面密度を考慮した定式化

次に、図2に示す解析モデルで、Ωに関する方程式のガレルキン法による定式化を示す。

領域は励磁電流 J_s が存在する v_1 と、 J_s が存在しない v_2 からなり、境界 Γ_0 で(22)式の流束条件がある。Ωは Γ_0 で未知量であるので、流束を既知量として扱

う必要がある⁽⁷⁾。近似関数による、領域での方程式の残差と境界での流束の残差を等しいとおけば、各領域での定式化はそれぞれ以下ようになる (Γ_∞ では $\delta\Omega=0$ であるので省略)。

$$-\int_{v_1} \{\delta\Omega\mu_0(\nabla^2\Omega + \nabla \cdot T)\}dV \\ = -\int_{\Gamma_0} \{\delta\Omega(\mu_0\nabla\Omega - q_1) \cdot n_1\}dS \dots (25)$$

$$-\int_{v_2} \{\delta\Omega\mu_0\nabla^2\Omega\}dV \\ = -\int_{\Gamma_0} \{\delta\Omega(\mu_0\nabla\Omega - q_2) \cdot n\}dS \dots (26)$$

弱形式化を行い、(22)式の関係式を考慮すると、

$$\mu_0 \left[\int_{v_1} \{(\nabla\delta\Omega \cdot \nabla\Omega) - \delta\Omega\nabla \cdot T_0\}dV \right. \\ \left. + \int_{v_2} \{\nabla\delta\Omega \cdot \nabla\Omega\}dV \right] \\ = -\int_{\Gamma_0} \{\delta\Omega\mu_0(T_0 \cdot n_1)\}dS \dots (27)$$

なる全領域での関係式が得られる。更に、左辺で領域 v_1 の被積分項の第二項を変形することで、境界積分項は消去され、次式となる。

$$\mu_0 \left[\int_{v_1} \{\nabla\delta\Omega \cdot (\nabla\Omega + T_0)\}dV \right. \\ \left. + \int_{v_2} \{\nabla\delta\Omega \cdot \nabla\Omega\}dV \right] = 0 \dots (28)$$

つまり、(20)式の体、および一重ポテンシャルに対する偏微分方程式の定式化では、このように境界積分項は消去できる。この扱いはベクトルポテンシャルでも可能であり、磁性体での A のポテンシャル

$$A = \frac{1}{4\pi} \left(\int \frac{\nabla \times M}{r} dV + \int \frac{M \times n}{r} dS \right) \dots (29)$$

に対する偏微分方程式における定式化でも境界積分項は消去される⁽⁸⁾。

〈4・4〉 従来の弱形式化による定式化 この定式化では Γ_0 での面密度は考慮されず、近似関数による領域での方程式の残差の最小化を考える。つまり以下のように示される⁽⁹⁾。

図 2 Ω に関する解析モデル
Fig. 2. Analysis model of Ω .

$$-\int_{v_1} \{\delta\Omega\mu_0(\nabla^2\Omega + \nabla \cdot T_0)\}dV \\ - \int_{v_2} \{\delta\Omega\mu_0\nabla^2\Omega\}dV = 0 \dots (30)$$

弱形式化より、以下のように Γ_0 で境界積分項が生ずる。

$$\int_{v_1} \{\nabla\delta\Omega \cdot \mu_0(\nabla\Omega + T_0)\}dV \\ + \int_{v_2} \{\nabla\delta\Omega \cdot \mu_0\nabla\Omega\}dV \\ - \int_{\Gamma_0} \{\delta\Omega\mu_0((\nabla\Omega + T_0)_1 \\ - (\mu_0\nabla\Omega)_2) \cdot n\}dS = 0 \dots (31)$$

この項は磁界の境界条件と関連づけられる。つまり上式の被境界積分項は

$$n \cdot (B_1 - B_2) = n \cdot \{[\mu_0(T_0 + \nabla\Omega)_1] - \mu_0(\nabla\Omega)_2\} \\ = 0 \dots (32)$$

なる磁界の境界条件と一致するので零となり、この定式化は結果として前節で示した(28)式と一致する。

このように、従来の定式化では Ω の源泉は陽に扱われていない。しかし、(32)式の磁界の境界条件は Γ_0 での(22)式の流束条件と一致する。つまり、方程式の源泉である面密度を含むことになるので、従来の定式化の根拠が明りょうとなった。

5. T - Ω 法と新しい電流モデル

〈5・1〉 T - Ω 法とアンペアの磁石板との関係

T - Ω 法と同様に電流を別の量に置き換える方法として、電流を磁荷の面密度で置き換えるアンペアの磁石板の方法が知られている。この方法は、線状導体 m に電流 J が流れているとし、 m を縁とする面 s の両側に二重層を考える (図3参照)。

各々の層に $\pm\omega_m$ の磁荷面密度があるとすれば、電流 J と磁荷面密度 ω_m との関係は次式となり、

$$J = \omega_m dn \dots (33)$$

ここで、 dn : 二重層の厚さ

スカラーポテンシャル ϕ は次式で与えられる⁽⁹⁾。

$$\phi = \frac{1}{4\pi} \left[\int \frac{\omega_m}{r^+} dS - \int \frac{\omega_m}{r^-} dS \right] \dots (34)$$

ここで、 r^+ , r^- : $\pm\omega_m$ の層と注目点 p との距離

図 3 線状導体 m と二重層 s
Fig. 3. A filament conductor m and double layer s .

φ のこの配より H が得られるが、φ は面 s で J の大きさだけ不連続となり、その法線微分は連続となる。

他方、 Ω は前述したように T_0 が導出可能な電流モデルでは T_0 の発散は零であるので、(20) 式は右辺第 1 項が省略され、次式で表される。

$$\Omega = -\frac{1}{4\pi} \int_{\Gamma_0} \frac{n \cdot T_0}{r} dS \quad \dots\dots\dots (35)$$

両ポテンシャルを比較すると次のことがわかる。φ は、(33) 式に示すように磁荷面密度 ω_m の二重層より生じ、面 s で不連続になる二重ポテンシャルの性質を示す。一方、 Ω は (35) 式の $(n \cdot T_0)$ なる面密度により生じ、境界 Γ_0 で連続となる一重ポテンシャルである。このようにして、 T - Ω 法とアンペアの磁石板の方法は異なる。しかし、φ は (34) 式のように磁荷面密度 ω_m によるポテンシャルと解釈されているが、 Ω の解釈はどうであろうか。次節でこの点を考察する。

〈5・2〉 T_0 と磁化ベクトル M との関係 一般に、強磁性体の扱いは次の二つがある。一つは透磁率 μ を用い、真空とは媒質が異なるとする扱いであり、他の一つは真空と同一の媒質とし、磁化ベクトル M を用いることで、磁化電流 J_m を次式のように導入する。

$$\mu_0 J_m = \nabla \times M \quad \dots\dots\dots (36)$$

この M を用いると、ベクトルポテンシャル A は (29) 式で示されるが、変形して次式でも表現できる。

$$A = \frac{1}{4\pi} \int \left(M \times \nabla \frac{1}{r} \right) dV \quad \dots\dots\dots (37)$$

従って、磁束密度 B は以下のように表せる。

$$\begin{aligned} B &= \nabla \times A \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \nabla p \times \left(M \times \nabla \frac{1}{r} \right) \right\} dV \\ &= M - \frac{1}{4\pi} \int \left\{ \left(\nabla \cdot M \right) \nabla \frac{1}{r} \right\} dV \\ &\quad - \int \left\{ (M \cdot n) \nabla \frac{1}{r} dS \right\} \quad \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

上式の $\nabla(1/r)$ 項を注目点 p での演算 $\nabla p(1/r)$ に変換すると、 B は次式のようにになる。

$$B = M + \frac{1}{4\pi} \nabla p \left[\int \frac{\nabla \cdot M}{r} dV - \int \frac{M \cdot n}{r} dS \right] \quad \dots\dots\dots (39)$$

この強磁性体での B の表現と (19) 式の H の表現を比較すると、両式とも媒質のパラメータを含まず、上式の M を T_0 に置き換えれば (19) 式となる。つまり、両式は同一の形である。

そして、上式の $\nabla \cdot M$ 、 $M \cdot n$ はそれぞれ磁性体での磁荷の体積密度 ρ_m 、面密度 ω_m である。従って、(19)

図 4 磁化ベクトル M と電流ベクトル T_0 との関係

Fig. 4. Relation between magnetization vector M and current vector T_0 .

表 1 代表的な静磁界解析手法
Table 1. Characteristic methods in magnetostatic field analysis.

	媒質	方程式の源泉	未知数
A 法	多	J_s	A
磁化ベクトル法	単	J_s	$B_s + B$
表面磁化法	単	J_s	$B_s + \Omega$
T - Ω 法	多	$T_0 \cdot n$	Ω

多: μ が異なる, 単: μ_0 のみ

B_s, B : J_s および磁性体の磁化による磁束密度

式の $\nabla \cdot T_0$ 、 $T_0 \cdot n$ を電流領域での磁荷の体積密度 ρ'_m 、面密度 ω'_m とする解釈ができる。

〈5・3〉 電流ベクトル T_0 の位置づけ ここで、磁性体と電流領域を図 4 のように表し、磁化ベクトル M 、 T_0 を一定値で z 成分のみとすれば、境界 Γ_0^+ 、 Γ_0^- で磁荷の面密度が生じている様子がわかる。

また、この面密度はアンペアの磁石板での磁荷面密度が拡張されたものである。つまり、アンペアの線状導体では厚みがないので磁荷面密度は二重層に分布している。ここでは図 4 のような厚みのある電流領域を対象としているので正負の磁荷面密度が境界 Γ_0^+ 、 Γ_0^- に分布している。

〈5・4〉 静磁界解析における各手法の比較 このようにして、 T - Ω 法は、励磁電流密度 J_s を電流領域の境界での磁荷面密度 ω'_m に置き換える、新しい電流モデルによる手法であるといえる。ここで、代表的な解析手法の比較を表 1 に示す⁽¹⁰⁾。方程式の源泉、未知数を比較して、 T - Ω 法の特異性が明確である。

6. 終りに

以上、静磁界解析における T - Ω 法の基本的な面に関して考察を加えてきた。明確にしたことを以下の 5 項目に示す。

(1) T_0 を含むビオ・サバールの新しい公式を示し、 T - Ω 法の基礎を示した。

(2) Ω の方程式の源泉は電流領域を囲む閉境界

Γ_0 での面密度($T_0 \cdot n$)である。従来の定式化ではこの量が物理的境界条件に含まれている。

(3) J_s と T_0 の関係は磁性体での磁化電流 J_m と磁化ベクトル M の関係を電流領域に拡張したものである。

(4) Γ_0 での面密度($T_0 \cdot n$)は、アンペアの磁石板の扱いを拡張した磁荷の面密度 ω'_m と解釈できる。

(5) A法, 磁化ベクトル法などがいずれも励磁電流を源泉にした手法であるのに対して, T - Ω 法は励磁電流を Γ_0 での磁荷の面密度 ω'_m に置き換える新しい電流モデルを基礎としている。

渦電流場での T の性質およびゲージの扱いは, 今後の課題である。最後に, 本論文の基になった資料⁽⁵⁾に関し貴重な意見をいただいた会員諸氏に深く感謝する。特に, <5・1>節の内容はその示唆によるところが多い。また, 本論文の一部は文部省科学研究費総合研究(A)によることを付記する。

(平成元年11月27日受付, 同2年5月25日再受付)

文 献

- (1) Carpenter, et al. "Comparison of alternative formulation of 3-dimensional magnetic field and eddy current problems at power frequencies", *Proc. Instn. Elect. Engrs*, 124, 1026 (1977)
- (2) D. Rodger: "Finite element method for calculation power frequency 3-dimensional electro magnetic field distribution", *IEE, A-130*, 233 (1983)
- (3) 中田, 他: 「 T - Ω 法を用いた非線形渦電流問題の解析法」, 電気学会研究, SA 86-33 (昭61)
- (4) 宮, 他: 「三次元渦電流解析法 T 法の理論的背景について」, 同上, SA 87-40 (昭62)
- (5) 長谷部, 他: 「 T - Ω 法と新しい電流モデルとの関係」, 同上, SA 89-47 (平元)
- (6) 宇野, 他: ポテンシャル, p.73 (昭43) 培風館
- (7) Hasebe et al. "About Treatment of Gauge of A in 3-D Magnetostatic Analysis." *IEEE Trans. Magnetics*, MAG-23, 3305 (1987)
- (8) 金井, 他: 「三次元磁界解析におけるゲージ条件について」, 第9回計算電気・電子工学シンポジウム1-2 (昭63)
- (9) ゾンマーフェルト: 電磁気学, p.135 (昭50) 講談社
- (10) 「三次元静磁界数値計算技術」, 電学技報(II部), No. 286 (昭63)
- (11) Van Bladel: *Electromagnetic Fields*, p.509 (1964) McGraw-Hill
- (12) 飯田: 新電磁気学(上), p.274 (昭50) 丸善

付 録

(1)式より(11)式の導出

$$\frac{4\pi}{\mu_0}B = \int \left\{ (\nabla \times T_0) \times \frac{1}{r} \right\} dV \quad \cdots \cdots \cdots (付1)$$

$$= \int \left\{ \nabla \frac{1}{r} \cdot \nabla T_0 - \nabla T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right\} dV \quad \cdots \cdots \cdots (付2)$$

$$= \int \left\{ \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} T_0 \right) - T_0 \nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} - \left\{ \nabla \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) - \nabla \nabla \frac{1}{r} \cdot T_0 \right\} \right\} dV \quad \cdots \cdots \cdots (付3)$$

$$= \int \left\{ \nabla \cdot \left(\nabla \frac{1}{r} T_0 + T_0 \nabla \frac{1}{r} \right) - \nabla \left(T_0 \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) - \left(\nabla \cdot \nabla \frac{1}{r} \right) T_0 - (\nabla \cdot T_0) \nabla \frac{1}{r} \right\} dV \quad \cdots \cdots \cdots (付4)$$

(付4)式で, 積分公式⁽¹¹⁾($\dot{F}$:ダイアデック)

$$\int_v \nabla \cdot \dot{F} dV = \int_r n \cdot \dot{F} dS \quad \cdots \cdots \cdots (付5)$$

$$\int_v \nabla a dV = \int_r n a dS \quad \cdots \cdots \cdots (付6)$$

を用いれば(11)式が得られる。(付1)~(付3)式の展開にはそれぞれ以下の公式を用いる⁽¹²⁾。

$$(\nabla \times a) \times b = b \cdot \nabla a - \nabla a \cdot b \quad \cdots \cdots \cdots (付7)$$

特に $a = \nabla(1/r)$ の場合は次式が成立する。

$$b \cdot \nabla \nabla \frac{1}{r} = \nabla \nabla \frac{1}{r} \cdot b \quad \cdots \cdots \cdots (付8)$$

$$\nabla(a \cdot b) = \nabla a \cdot b + \nabla b \cdot a \quad \cdots \cdots \cdots (付9)$$

$$\nabla \cdot (ab) = (\nabla \cdot a)b + a \cdot \nabla b \quad \cdots \cdots \cdots (付10)$$

長谷部 信也 (正員)

昭和21年2月8日生。43年3月山形大学工学部卒業。44年2月東京農工大学工学部電気工学科勤務。同学部助手, 助教授をへて, 平成2年4月明星大学理工学部助教授。工学博士。主として, 磁界の数値解析法を研究。応用磁気学会, 日本シミュレーション学会会員。

鹿野 快男 (正員)

昭和13年8月4日生。45年3月明治大学大学院博士課程修了。同年東京農工大学工学部助手, 現在同教授。主として, 磁気回路, 電磁アクチュエータおよび, 農業, 土木, 生物に関する応用計測を研究。応用物理学会, 計測自動制御学会会員。