光子の量子力学の構成および古典電磁気学との関係

正員 笹 部 薫 (都立科技大)

非会員 安 達 俊 美 (都立科技大)

Construction of Quantum Mechanics for photon and Relations with Classical Electromagnetism

Shigeru Sasabe, Member, Toshimi Adachi, Non-member (Tokyo Metropolitan Institute of Technology)

Following the preceding work, quantum mechanics for the photon is again investigated. First, the second-quantization of the free photon fields is carried out by means of the Lagrangian formalism. Operators of the momentum, of the Hamiltonian, and of the photon number of the system are obtained. Secondly, the interaction of first-quantized photon with the potential is investigated. Correspondence of our theory to the classical electromagnetic theory is also found.

キーワード：光子，電磁界，光学ポテンシャル，第二量子化

1. 序 論

光を粒子的に記述する光子の概念が導入されて以来，1世紀近くが経過した。その間，光と物質との相互作用を記述する量子電磁力学という見事な理論体系が，朝永や Schwinger, Feynman によって完成された。この理論は光子と電子の相互作用を扱う限り，完全に近い実験との一致と予言能力をもっている。また，1963年に Glauber によって光の状態のコヒーレント表示が発見されて，量子光学の幕開けを迎えた。しかし，その後の量子光学の発展と光技術の急速な進歩は，上述の優れた理論体系があるにもかかわらず，物理空間での光子の振舞いについて，詳細な知識を必要とするようになった。このために，多くの研究者によって幾つかの試みが成されてきた⁽¹⁾。

著者らも，さきの論文⁽²⁾で，光子の物理空間での運動を記述するものとして Schrödinger 形の方程式を提案し，主として自由光子の場合について論じてきた。しかしながら，荷電粒子との相互作用をどのように考えるかという問題は残されたままであった。また，量子光学的な見方に対応する議論も成されていない。この論文では，これらの残された幾つかの問題について考察してみたい。

量子光学に対応する議論として，前論文で導入した自由光子に対する波動方程式を，そのまま場の方程式とみての第二量子化を第2章，第3章で示す。ここでは，自由光子に対するラグランジアンを設定し，場の理論の一般論に従って量子化の手続きを行う。ここでは，自由光子の記述に関して，極めて合理的な結果を得ている。

次に，荷電粒子との相互作用の問題を第4章で述べる。量子電磁力学では，光子と荷電粒子の相互作用を決定する際に，ゲージ不変性を指導原理とすることができた。これに対し，光子の運動を記述する我々の理論では，相互作用を決定する指導原理はわかっていないが，これに対する一つの手掛かりは，古典電磁気学との幅広い対応関係にある。これについては第5章で議論される。なお，本論文の数式はすべて，cgs, Gauss 単位系で記述されている。

2. ラグランジアン形式 (自由光子の場合)

次章での第二量子化のために，本章ではラグランジアン形式による定式化を進めてゆく [ラグランジアン形式に関する詳細は参考文献(3)または(4)を参照されたい]。この方式によれば，最初に適切なラグランジアンを設定するだけで，後は定められた手順に従

って計算してゆけば自動的に第二量子化が実現する。我々は自由光子に対して、 Φ_k および $\tilde{\Phi}_k$ を場の量として次のようにラグランジアン密度を与える。

$$\mathcal{L} = -\hbar c \varepsilon_{klm} \Phi_k^* \partial_l \Phi_m + i\hbar \Phi_k^* \partial_0 \Phi_k + \hbar c \varepsilon_{klm} \tilde{\Phi}_k^* \partial_l \tilde{\Phi}_m + i\hbar \tilde{\Phi}_k^* \partial_0 \tilde{\Phi}_k \quad \dots (1)$$

ただし、 $\hbar = h/2\pi$ 、 h : プランク定数、 c : 光速

$$\Phi = \Phi(x), (x) \equiv (\mathbf{r}, t)$$

ここで、 $\partial_k = \partial/\partial x_k$ ($k=1, 2, 3$)、 $\partial_0 = \partial/\partial t$ であり、 ε_{klm} は添字について完全反対称な単位擬テンソルである。また、二重の添字については縮約を表しているものと約束する ($A_k B_k = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$)。古典場の理論から導出される Euler の方程式は

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} - \partial_k \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \varphi)} \right) - \partial_0 \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_0 \varphi)} \right) = 0 \quad \dots (2)$$

ここで、 φ はラグランジアンに含まれる変数としての任意の場の量である。 φ として Φ_k^* をとった場合、(2)式により(1)式のラグランジアン密度から得られる場の運動方程式は、

$$i\hbar \partial_0 \Phi_k = \hbar c \varepsilon_{klm} \partial_l \Phi_m \quad \dots (3a)$$

となる。また、上式に共役な方程式は

$$-i\hbar \partial_0 \Phi_k^* = \hbar c \varepsilon_{klm} \partial_l \Phi_m^* \quad \dots (3b)$$

である。ここに、右肩の*記号はC-数に対しては複素共役を、演算子に対しては共役虚な演算子を表すものと約束する。(3a)式は先の論文⁽²⁾において、自由光子の Schrödinger 方程式として我々が得たものと同一である。しかしながら、(3a)式においては Φ_k はすでに光子の状態関数ではなく、(3a)式は電磁界を代表する場の量としての Φ_k が満たす運動方程式となっている⁽⁵⁾。同様に、 φ として $\tilde{\Phi}_k^*$ をとると、

$$i\hbar \partial_0 \tilde{\Phi}_k = -\hbar c \varepsilon_{klm} \partial_l \tilde{\Phi}_m \quad \dots (3c)$$

を得る。これに共役な方程式は、

$$i\hbar \partial_0 \tilde{\Phi}_k^* = \hbar c \varepsilon_{klm} \partial_l \tilde{\Phi}_m^* \quad \dots (3d)$$

さて、 θ を任意のスカラー量として、(1)式のラグランジアン密度は、

$$\Phi_k \rightarrow \Phi_k e^{i\theta} \quad \dots (4a)$$

および、これに共役な

$$\Phi_k^* \rightarrow \Phi_k^* e^{-i\theta} \quad \dots (4b)$$

なる位相変換に対して不変である。従って、Noether の定理⁽⁶⁾によって、保存則として

$$\frac{\partial}{\partial x_k} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \Phi_m)} \Phi_m - \Phi_m^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \Phi_m^*)} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k} \Phi_k - \Phi_k^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k^*} \right] = 0 \quad \dots (5)$$

が成り立つ。ここで、 Φ の上のドットは時刻 t によ

る微分を表す。そこで、

$$\rho \equiv \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k} \Phi_k - \Phi_k^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k^*} \right] \quad \dots (6a)$$

$$J_k \equiv \frac{1}{i\hbar} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \Phi_m)} \Phi_m - \Phi_m^* \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \Phi_m^*)} \right] \quad \dots (6b)$$

と定義すると、(5)式の保存則は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J} = 0 \quad \dots (7)$$

と表される。(6)式の定義によって(1)式のラグランジアンから ρ 、 $\mathbf{J}$ としてそれぞれ

$$\rho = \Phi_k^* \Phi_k \quad \dots (8a)$$

$$J_k = -ic \varepsilon_{klm} \Phi_l^* \Phi_m \quad \dots (8b)$$

が得られる。これは前論文にて得られた、光子の確率密度 $\rho = \Phi^* \Phi$ と確率流の密度 $\mathbf{J} = (c/i) \Phi^* \times \Phi$ そのものである。ただし、(3)式に見るように、著者らはエネルギー $E > 0$ 、ヘリシティ $\lambda = +1$ の光子の満たす場の方程式と、 $E > 0$ 、 $\lambda = -1$ の光子のそれとは独立な存在としているので、本論文ではこれらの量もそれぞれの光子に対応して2種類考えることができる。実際、(4)式と同様の $\tilde{\Phi}_k$ に関する位相変換に対する $\mathcal{L}$ の不変性から、保存則として再び(7)式を得る。ただし、今の場合には

$$\rho = \tilde{\Phi}_k^* \tilde{\Phi}_k \quad \dots (9a)$$

$$J_k = ic \varepsilon_{klm} \tilde{\Phi}_l^* \tilde{\Phi}_m \quad \dots (9b)$$

である。それゆえに、今後は両者を区別すべく、それぞれの物理量に(+), (-)の添字を加えることにしよう。以上をまとめると、

$$\rho^{(+)} = \Phi^* \Phi \quad \dots (10a)$$

$$\mathbf{J}^{(+)} = -ic \Phi^* \times \Phi \quad \dots (10b)$$

$$\frac{\partial \rho^{(+)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(+)} = 0 \quad \dots (11)$$

$$\rho^{(-)} = \tilde{\Phi}^* \tilde{\Phi} \quad \dots (12a)$$

$$\mathbf{J}^{(-)} = ic \tilde{\Phi}^* \times \tilde{\Phi} \quad \dots (12b)$$

$$\frac{\partial \rho^{(-)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(-)} = 0 \quad \dots (13)$$

さて、(3)式が光子の波動方程式 (Schrödinger 方程式) であった第一量子化の段階では、さきに述べたとおり ρ 、 $\mathbf{J}$ はそれぞれ光子の存在確率およびその流れの密度を意味していたが、(3)式を場の方程式とみる今の場合、両者はそれぞれ光子数密度および光子の流れの密度の演算子と解釈すべきである。

3. 場の量子化

本章では前章で与えられたラグランジアンを基にして、所定の手続きに従って場の量子化を行う。ラグラ

ンジアン(1)式から得られる、 Φ_k に正準共役な運動量は

$$\Pi_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\Phi}_k} = i\hbar \Phi_k^* \quad \dots\dots\dots (14a)$$

また、 $\tilde{\Phi}_k$ に正準共役な運動量は

$$\tilde{\Pi}_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\tilde{\Phi}}_k} = i\hbar \tilde{\Phi}_k^* \quad \dots\dots\dots (14b)$$

正準形式理論から要求される同時刻交換関係は次の通りである。

$$[\Phi_k(x), \Pi_l(y)]_{ET} = i\hbar \delta_{kl} \delta^3(x-y) \quad \dots (15a)$$

$$[\Phi_k(x), \Phi_l(y)]_{ET} = [\Pi_k(x), \Pi_l(y)]_{ET} = 0 \quad \dots\dots\dots (15b)$$

$$[\tilde{\Phi}_k(x), \tilde{\Pi}_l(y)]_{ET} = i\hbar \delta_{kl} \delta^3(x-y) \quad \dots (15c)$$

$$[\tilde{\Phi}_k(x), \tilde{\Phi}_l(y)]_{ET} = [\tilde{\Pi}_k(x), \tilde{\Pi}_l(y)]_{ET} = 0 \quad \dots\dots\dots (15d)$$

あるいは、(14)式の各式を代入すれば、

$$[\Phi_k(x), \Phi_l^*(y)]_{ET} = \delta_{kl} \delta^3(x-y) \quad \dots\dots (16a)$$

$$[\Phi_k(x), \Phi_l(y)]_{ET} = [\Phi_k^*(x), \Phi_l^*(y)]_{ET} = 0 \quad \dots\dots\dots (16b)$$

$$[\tilde{\Phi}_k(x), \tilde{\Phi}_l^*(y)]_{ET} = \delta_{kl} \delta^3(x-y) \quad \dots\dots (16c)$$

$$[\tilde{\Phi}_k(x), \tilde{\Phi}_l(y)]_{ET} = [\tilde{\Phi}_k^*(x), \tilde{\Phi}_l^*(y)]_{ET} = 0 \quad \dots\dots\dots (16d)$$

を得る。ここで、括弧右側の添字「ET」は同時刻(Equal Time)であることを示す。

ハミルトニアン密度は

$$\mathcal{H} = \Pi_k \dot{\Phi}_k + \tilde{\Pi}_k \dot{\tilde{\Phi}}_k - \mathcal{L} \quad \dots\dots\dots (17)$$

で与えられる。(14)式および(1)式を代入すれば、

$$\mathcal{H} = \hbar c \epsilon_{klm} \Phi_k^* \partial_l \Phi_m - \hbar c \epsilon_{klm} \tilde{\Phi}_k^* \partial_l \tilde{\Phi}_m \quad \dots\dots\dots (18)$$

を得る。これにより、系のハミルトニアンとして

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \mathcal{H}(x) \\ &= \hbar c \epsilon_{klm} \int d^3x \Phi_k^* \partial_l \Phi_m \\ &\quad - \hbar c \epsilon_{klm} \int d^3x \tilde{\Phi}_k^* \partial_l \tilde{\Phi}_m \quad \dots\dots\dots (19) \end{aligned}$$

が与えられる。

第2章において、著者らは与えられたラグランジアンから、Eulerの運動方程式に基づいて場の方程式(3a)式を得た。一方において、正準形式理論では運動方程式としていわゆるハイゼンベルグの方程式

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{1}{i\hbar} [\varphi, H] \quad \dots\dots\dots (20)$$

ただし、 $\varphi(t)$: 陽に時刻 t に依存しないがあり、正しい量子化によって両者が等価になることがよく知られている。以下において、光子の運動方程

式(3a)が実際にハイゼンベルグの方程式(20)から導出できる事実を示そう。この事実は、我々の量子化の手続きである(15)式および(16)式の正当性を保証するものである。(19)式を用いて、方程式(20)から

$$\begin{aligned} i\hbar \partial_0 \Phi_j(x) &= [\Phi_j(x), H] \\ &= \hbar c \epsilon_{klm} \int d^3y [\Phi_j(x), \Phi_k^*(y)]_{ET} \\ &\quad \times \partial_l \Phi_m(y) \quad \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

これに、交換関係(16)式を用いれば上式は

$$i\hbar \partial_0 \Phi_k = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_l \Phi_m \quad \dots\dots\dots (22)$$

となる。こうして、著者らは再び(3a)式を得た。全く同様にして $\tilde{\Phi}$ に対する方程式(3c)式も得ることができる。

更に、ハイゼンベルグの運動方程式を使って得られるもう一つの興味深い事実を示しておこう。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\text{div } \Phi) &= \frac{1}{i\hbar} \partial_k [\Phi_k, H] \\ &= -i c \epsilon_{klm} \partial_k \partial_l \Phi_m \\ &= 0 \quad \dots\dots\dots (23) \end{aligned}$$

ゆえに

$$\text{div } \Phi = \text{定数} \quad \dots\dots\dots (24)$$

ここで、単位擬テンソル ϵ_{klm} の完全反対称性の性質を使った。前論文においては $\text{div } \Phi = 0$ は(3a)式の補助的な付加条件⁽⁵⁾であったが、本論文の形式によって(24)式が自然に導かれる。真空中においては(24)式の右辺を0とすべきであるのは言うまでもない。

本章の最後として、系を特徴づける各物理量を求めよう。ラグランジアン形式では、系の全運動量 P は次式で与えられる。

$$P_k = - \int d^3x \Pi_k \partial_k \Phi_l - \int d^3x \tilde{\Pi}_k \partial_k \tilde{\Phi}_l \quad \dots\dots (25)$$

(14)式を代入すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} P_k &= \int d^3x \Phi_k^*(x) \bar{p}_k \Phi_l(x) \\ &\quad + \int d^3x \tilde{\Phi}_k^*(x) \bar{p}_k \tilde{\Phi}_l(x) \quad \dots\dots\dots (26) \end{aligned}$$

ただし、 $\bar{p}_k$ は

$$\bar{p}_k \equiv -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_k} \quad \dots\dots\dots (27)$$

で定義される。また、(3)式を(19)式に代入すれば、系のハミルトニアンも

$$\begin{aligned} H &= \int d^3x \Phi_k^*(x) \bar{E} \Phi_l(x) \\ &\quad + \int d^3x \tilde{\Phi}_k^*(x) \bar{E} \tilde{\Phi}_l(x) \quad \dots\dots\dots (28) \end{aligned}$$

と表すことができる。ここで、

$$\bar{E} \equiv i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \dots\dots\dots (29)$$

である。更に全光子数 N は次式で与えられる。

$$N^{(+)}(t) = \int d^3x \rho^{(+)}(x) = \int d^3x \Phi_k^*(x) \Phi_k(x) \dots\dots\dots (30 a)$$

$$N^{(-)}(t) = \int d^3x \rho^{(-)}(x) = \int d^3x \bar{\Phi}_k^*(x) \bar{\Phi}_k(x) \dots\dots\dots (30 b)$$

$$N(t) = N^{(+)} + N^{(-)} \dots\dots\dots (31)$$

これにハイゼンベルグの方程式 (20) を適用すれば、

$$\begin{aligned} \frac{dN^{(+)}}{dt} &= \frac{1}{i\hbar} [N^{(+)}, H] \\ &= -ic\epsilon_{klm} \iint d^3x d^3y \Phi_k^*(x) \\ &\quad \times [\Phi_n(x), \Phi_k^*(y)]_{ET} \partial_l \Phi_m(y) \\ &\quad - ic\epsilon_{klm} \iint d^3x d^3y \Phi_k^*(y) \partial_l \\ &\quad \times [\Phi_n^*(x), \Phi_m(y)]_{ET} \Phi_n(x) \\ &= -ic\epsilon_{klm} \int d^3x \partial_l \{ \Phi_k^*(x) \Phi_m(x) \} \\ &= 0 \dots\dots\dots (32) \end{aligned}$$

ここで、ダッシュの付いた偏微分記号は積分内では $\partial_i \equiv \partial/\partial y_i$ の意味である。また、 Φ_k が遠方では速やかに減少して、その表面積分が零になるものとした。同様に、 $N^{(-)}$ についても

$$dN^{(-)}/dt = 0 \dots\dots\dots (33)$$

であり、従って

$$dN/dt = 0 \dots\dots\dots (34)$$

を得る。それゆえ、自由光子については $N = \text{定数}$ となり、系の全光子数は保存される。この事実は局所的な光子の保存則である (11) 式および (13) 式からも直ちに導かれる。

4. 相互作用を含む光子の量子力学

本章では、さきの論文⁽²⁾に続いて再び光子の量子力学に立ち戻らう。それゆえ Φ_k , $\bar{\Phi}_k$ は本章では確率関数としての意味をもつ波動関数である⁽⁶⁾。先の論文では、相互作用のない自由光子についてのみ考察してきた。しかし、現実の電磁気現象の多くは荷電粒子との相互作用によって引き起こされるものである。それゆえ、本研究も、光子と荷電との間の相互作用を矛盾なく導入することによって、はじめて有用な理論と成り得るであろう。本章では種々の可能性のうちから、特に相互作用がポテンシャルエネルギー（以後、単にポテンシャルと呼ぶ）の形に書けるものについて考察し

てみたいと思う。

光子の波動方程式として

$$i\hbar \partial_0 \Phi_k(x) = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_l \Phi_m(x) + \Omega_{kl}(r) \Phi_l(x) \dots\dots\dots (35)$$

を仮定する。右辺第 2 項の $\Omega = \{\Omega_{kl}(r)\}$ は 3×3 行列で、陽に時刻 t を含まないものとする。また、 Ω はエネルギーの次元をもち、座標のみの関数であるという意味でポテンシャルエネルギーと呼んでいるが、通常のポテンシャルエネルギーとは異質のものである。荷電粒子に働く通常のポテンシャルとは、電磁界を媒介として荷電粒子間に生じる位置エネルギーを表しているが、 Ω の場合はむしろ、空間の各点における光子と荷電との直接の相互作用の強さを表すものであって、光子間の位置エネルギーではない。これについては、第 6 章で再び触れる。

自由光子の場合に、 $\bar{\Phi}_k$ の満たす波動方程式が形式的に Φ_k^* のそれと同じであった事実から、 $\bar{\Phi}_k$ に対しては

$$-i\hbar \partial_0 \bar{\Phi}_k(x) = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_l \bar{\Phi}_m(x) + \Omega_{kl}^*(r) \bar{\Phi}_l(x) \dots\dots\dots (36)$$

を仮定する。(35), (36) 式に共役な方程式としてそれぞれ

$$-i\hbar \partial_0 \Phi_k^*(x) = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_l \Phi_m^*(x) + \Omega_{kl}^*(r) \Phi_l^*(x) \dots\dots\dots (37)$$

$$i\hbar \partial_0 \bar{\Phi}_k^*(x) = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_l \bar{\Phi}_m^*(x) + \Omega_{kl}(r) \bar{\Phi}_l^*(x) \dots\dots\dots (38)$$

を得る。以上の 4 式を光子の満たす基本方程式として、これから、物理的に意味のある種々の関係式を導こう。最初に、 $\lambda = +1$ 光子の確率密度 $\rho^{(+)}(t)$ の時間変化を求めると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho^{(+)}}{\partial t} &= \frac{\partial \Phi_k^*}{\partial t} \Phi_k + \Phi_k^* \frac{\partial \Phi_k}{\partial t} \\ &= ic \partial_k (\epsilon_{klm} \Phi_l^* \Phi_m) + \frac{i}{\hbar} \{ (\Phi_k^* \Omega_{kl} \Phi_l)^* \\ &\quad - (\Phi_k^* \Omega_{kl} \Phi_l) \} \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

ゆえに、確率密度の保存則

$$\frac{\partial \rho^{(+)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(+)} = \frac{2}{\hbar} \text{Im} \{ \Phi_k^* \Omega_{kl} \Phi_l \} \dots\dots (40)$$

を得る。ただし、ここで記号 Im は

$$\text{Im } A \equiv \frac{A - A^*}{2i} \dots\dots\dots (41)$$

の意味である。同様に $\rho^{(-)}$ についても

$$\frac{\partial \rho^{(-)}}{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(-)} = -\frac{2}{\hbar} \text{Im} \{ \bar{\Phi}_k^* \Omega_{kl}^* \bar{\Phi}_l \} \dots\dots\dots (42)$$

を得る。あるいは、右辺を書き直してそれぞれ

$$\frac{\partial \rho^{(+)} }{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(+)} = \frac{1}{i\hbar} \Phi_k^* (\Omega - \Omega^*)_{kl} \Phi_l$$

..... (43 a)

$$\frac{\partial \rho^{(-)} }{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(-)} = \frac{1}{i\hbar} \tilde{\Phi}_k (\Omega - \Omega^*)_{kl} \tilde{\Phi}_l^*$$

..... (43 b)

となる。ここで Ω^* は Ω のエルミット共役な行列を表す。ポテンシャル Ω がエルミット行列 ($\Omega^* = \Omega$) であるならば (43) 式の右辺は 0 となり、自由光子と同じ保存則を満たす。この場合はポテンシャルによる光子の弾性散乱過程を意味している。しかし、 Ω がエルミット行列でない場合は (43) 式の右辺は零でない有限の値をもち、これが光子の生成または消滅の源となる。

いま、特に Ω が対角形の行列である場合を考えてみよう。その形を

$$\Omega_{kl} = \delta_{kl} \{ U(\mathbf{r}) - iV(\mathbf{r}) \} \quad \text{..... (44)}$$

ただし、 $U(\mathbf{r})$, $V(\mathbf{r})$ は実関数

とくと、(43) 式はそれぞれ

$$\frac{\partial \rho^{(+)} }{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(+)} = -\frac{2}{\hbar} V(\mathbf{r}) \rho^{(+)} \quad \text{..... (45 a)}$$

$$\frac{\partial \rho^{(-)} }{\partial t} + \text{div } \mathbf{J}^{(-)} = -\frac{2}{\hbar} V(\mathbf{r}) \rho^{(-)} \quad \text{..... (45 b)}$$

と書ける。 $V(\mathbf{r}) > 0$ として、上式は単位体積あたり単位時間に $2V/\hbar$ の割合で各々の光子の存在確率が失われていくことを示している。一般に、荷電と光子との散乱現象を考えると、上記の事実は入射光子束から単位時間に $2V/\hbar$ の割合で光子が荷電に吸収されていく過程を表している。

非相対論的量子力学は、その理論形式から本質的に安定な粒子をその対象としている。それゆえに、常に放出と吸収を繰返す光子のごとき相対論的な粒子はその対象外であり、最初から生成・消滅を自然な形で取入れることのできる、場の量子論によって取扱われていた。そしてその代償として、光子の統計性と光子数のみが強調されて、個々の光子の振舞いが明白な形で記述できなかった。(45) 式は確率的な光子の吸収過程を可能としつつ、しかも個々の光子の運動を波動方程式 (35), (36) によって記述することの可能性を我々に与えてくれるものである。実は、このようなアプローチは原子核物理学の分野で既に知られていたことである⁽⁷⁾。すなわち、普通の Schrödinger 方程式を満たす中性子束が核子に入射するとき、確率的に「核」による吸収が起こる。このときの入射中性子の密度が満

たす方程式が (45) 式と完全に同形である。この事実は必ずしも自明ではなく、(45) 式によって初めて明らかになったものである。原子核の散乱理論によれば、(44) 式の形のポテンシャルはその物理的意味から、「吸収ポテンシャル」と呼ばれている⁽⁸⁾。あるいはまた、「光学ポテンシャル」と呼ばれることも多い⁽⁷⁾。この呼び名の由来は、本来実数であるべきポテンシャルの複素数化が、ちょうど物質中での光の屈折と吸収を扱うのに、複素数の屈折率を導入したことに対応している事実に基づく。アナロジーのみによってつけられた「光学ポテンシャル」の名称が、ここにおいて実際に、光の構成要素である光子の波動方程式に再び還元されることは、宿命的なものを感じて興味深い。

次に、自由光子では定数であった $\text{div } \Phi$ の時間変化を求めよう。次章にみるように、この結果を古典電磁気学の立場で考察することにより、我々が仮定したポテンシャルの物理的特性を、より感覚的な電気的特性に書き直すことが可能となる。(35) 式の両辺を ∂_k で微分すれば、

$$i\hbar \partial_k \partial_0 \Phi_k(x) = \hbar c \epsilon_{klm} \partial_k \partial_l \Phi_m(x) + \partial_k \{ \Omega_{kl}(\mathbf{r}) \Phi_l(x) \} = \partial_k \{ \Omega_{kl}(\mathbf{r}) \Phi_l(x) \} \quad \text{..... (46)}$$

ここで、再び ϵ_{klm} の完全反対称性を使った。いま、 Ω が (44) 式と同じく対角形で、かつ座標によらず一様なポテンシャルである場合を考えると、(44) 式は

$$\Omega_{kl} = \delta_{kl} (U_0 - iV_0) \quad \text{..... (47)}$$

ただし、 U_0 , V_0 : 実数

と書ける。ゆえに (46) 式は

$$\frac{d(\text{div } \Phi)}{dt} = \frac{(U_0 - iV_0)}{i\hbar} \text{div } \Phi \quad \text{..... (48)}$$

と表せる。この解は次式で与えられる。

$$\text{div } \Phi(x) = \text{div } \Phi(\mathbf{r}, 0) e^{-i(U_0 t/\hbar)} \times e^{-(V_0 t/\hbar)} \quad \text{..... (49)}$$

すなわち、一様なポテンシャル中では $\text{div } \Phi$ は減衰する振動波の様相を呈する。

5. 古典電磁気学との関係

著者らはさきの論文で、多数の光子がコヒーレントに運動する場合には、 $\Phi \sim \mathbf{E} + i\mathbf{H}$ と置くことで、多くの事例について光子の量子力学と古典電磁気学の間に対応関係がつく事実をみてきた。今回もその方法を適用して、我々が得た結果の古典電磁気学的な理解を試みよう。

今回は、ポテンシャルの形で荷電と光子の相互作用が導入されており、ポテンシャルは個々の光子を確率

的に吸収（または放出）する役目を担っている。それはあくまでも光子と荷電との微視的かつ直接的な作用であり、誘電率や導電率、あるいは透磁率などの巨視的な電気特性で表現できるものではない。しかし同時に、上記の意味の古典電磁気学理解の可能性を否定できないことも、また事実である。その場合は、確率関数である Φ を物質波である E, H と同等にみなすのと同じ意味で、ポテンシャルを物質の電気的特性を表す量と同等にみなす必要がある。それゆえ、両者の関係が式の上で見事に得られても、それらが物理的に等価であると考えるのは誤りである。

真空中では $\Phi \sim E + iH$ と置いたが、後に見るように、物質内では

$$\Phi \sim \sqrt{\epsilon} E + i\sqrt{\mu} H \quad (50)$$

ただし、 ϵ : 誘電率、 μ : 透磁率
と置き換えたほうが適切である。一様な媒質では $\text{div}(\sqrt{\mu} H) = 0$ により、 $\text{div} \Phi$ は実数である。それゆえ、 $U_0 = 0$ のとき、すなわちポテンシャル Ω が

$$\Omega_{kl} = -iV_0 \delta_{kl} \quad (51)$$

の純虚数の場合のみ、古典電磁気学との対応がつく。このとき、(49)式は

$$\text{div} E(x) = \text{div} E(r, 0) e^{-V_0 t/\hbar} \quad (52)$$

と書ける。これに $\text{div} E = 4\pi\rho_e/\epsilon$ を代入すれば

$$\rho_e(x) = \rho_e(r, 0) e^{-V_0 t/\hbar} \quad (53)$$

となる。(53)式は金属内における電荷密度の減少の式に一致する⁽⁹⁾。その表式は

$$\rho_e(x) = \rho_e(r, 0) e^{-t/\tau} \quad (54)$$

ただし、 $\tau \equiv \epsilon/4\pi\sigma$: 緩和時間

と書き表される。ここで、 σ は媒質の導電率である。(53)式と(54)式の比較により、

$$\frac{V_0}{\hbar} = \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \left(\equiv \frac{1}{\tau} \right) \quad (55)$$

を得る。ただし、前述したとおり上の等号は「等価」の意味ではなく、「対応がつく」の意味である。

さて、ポテンシャル形相互作用を含む光子の量子力学と古典電磁気学との対応関係を明確にするために、マクスウェルの方程式を光子の波動方程式(35)の形に書き直してみよう。

基本となる方程式として、電気と磁気の間に完全な対称性をもたせた、拡張されたマクスウェルの方程式⁽¹⁰⁾

$$\text{rot} H = \frac{1}{c} \frac{\partial D}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} J_e \quad (56 a)$$

$$\text{rot} E = -\frac{1}{c} \frac{\partial B}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} J_m \quad (56 b)$$

$$\text{div} D = 4\pi\rho_e \quad (56 c)$$

$$\text{div} B = 4\pi\rho_m \quad (56 d)$$

を仮定する。上式において、 ρ_m は磁荷密度であり、その流れの密度が磁荷流 J_m である。もし、 $\rho_m \neq 0$ であれば、これは Dirac の単極磁荷（モノポール）⁽¹¹⁾ の存在を意味する。更に媒質は一様であって

$$D = \epsilon E \quad (57 a)$$

$$B = \mu H \quad (57 b)$$

が成り立つものとする。いま、便宜的に

$$\sqrt{\epsilon} E + i\sqrt{\mu} H \equiv \Xi \quad (58)$$

とおくと、(56 a), (56 b) から直ちに

$$\text{rot} \Xi = \frac{i\sqrt{\epsilon\mu}}{c} \frac{\partial \Xi}{\partial t} + \frac{i4\pi}{c} \times (\sqrt{\mu} J_e + i\sqrt{\epsilon} J_m) \quad (59)$$

を得る。ここで、

$$J_e = \sigma E \quad (60)$$

と同時に、 J_m と B との間にも同様に次の比例関係を仮定しよう。

$$J_m = \frac{\sigma}{\epsilon} B \quad (61)$$

すると、(59)式の右辺第2項の括弧内は

$$\sqrt{\mu} J_e + i\sqrt{\epsilon} J_m = \frac{\sigma\mu}{\sqrt{\epsilon\mu}} \Xi \quad (62)$$

と書くことができ、(59)式は結局

$$i\hbar \frac{\partial \Xi}{\partial t} = \hbar \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \nabla \times \Xi - i\hbar \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \Xi \quad (63)$$

となる。これは、まさに光子の波動方程式(35)と同形の方程式である。すなわち、両者は

$$\Phi \rightarrow \sqrt{\epsilon} E + i\sqrt{\mu} H \equiv \Xi \quad (64 a)$$

$$c \rightarrow \frac{c}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (64 b)$$

$$\frac{V}{\hbar} \rightarrow \frac{4\pi\sigma}{\epsilon} \quad (64 c)$$

の置き換えによって、互いに結び付いていることに気がつく。ここで注目すべきことは、著者らは(56 b), (56 d)および(61)式に見られる電気と磁気の対称性を仮定したことである。微視世界の法則と巨視世界の法則を結び付ける対応関係(64)式が物理的に確かな根拠をもつものであれば、単極磁荷の存在を示唆する電気・磁気対称性の仮定なしには(63)式が得られないという事実は、光子の量子力学を語るうえで意味深長なものがある。しかし、現実の古典電磁気学では $J_m = \rho_m = 0$ とされており、対応関係によって古典法則を得る際にも、もちろんこの条件は考慮すべきである。(52)式はその一例である。

次に、公式 $\text{div}(E \times H) = H \text{ rot} E - E \text{ rot} H$ 、およびマクスウェルの式(56)から得られる古典電磁気学の保存則

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) + 2c \operatorname{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \\ &= -\frac{8\pi\sigma}{\epsilon}(\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) \dots\dots\dots (65) \end{aligned}$$

を例にとる。上式を $\mathcal{E}$ で表すと、次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial t}(\mathcal{E}^* \cdot \mathcal{E}) - \frac{ic}{\sqrt{\epsilon\mu}} \operatorname{div}(\mathcal{E}^* \times \mathcal{E}) \\ &= -\frac{8\pi\sigma}{\epsilon} \mathcal{E}^* \cdot \mathcal{E} \dots\dots\dots (66) \end{aligned}$$

(66)式もやはり(64)式の置き換えによって、光子の保存則(45 a)式から直ちに得られる。

6. 最後 に

ラグランジアン形式に基づいて自由光子場の第二量子化が行われた。得られた結果はいずれも、物理的に極めて妥当かつ満足のゆくものばかりである。この事実は著者らのアプローチの正しさを間接的に保証するものである。光子に対する場の量子論的扱いは、個々の光子の運動よりも、必然的にその個数と統計性に重点が置かれる事実は、既に何度も述べてきたとおりである⁽²⁾⁽⁵⁾。それではなぜに、本論文第2、第3章のような第二量子化の議論が必要であろうか？ 筆者らの理論は、光子に対する波動方程式[(3 a)および(3 c)式と同形]をその基礎にしてきた。これまでに見たように、両方から得られる結論はことごとく納得のゆくものであるが、両式のもつ物理的本質は未だにとらえ難い感がある。その本質を明確にする最も良い方法は、ベクトル(およびスカラー)ポテンシャル $(\mathbf{A}, \phi)$ を使用する既成の理論との相違点を明らかにすることであろう。これが、先ほどの疑問に対する答えである。相違点を明らかにすることによって、相互作用まで含めて、正しい光子の量子力学に到達することが期待される。

その相互作用の一例として、著者らは第4章でポテンシャル内光子という形式での理論構成を試みた。その理由は、粒子の量子力学からの直接のアナロジーとして、この形式が最も簡単だからである。そこでは、光子の生成・消滅を取入れながらも、波動方程式の形で個々の光子の運動を議論する可能性が示された。しかし、光子に作用するポテンシャルが与えられるということは、光子と荷電粒子との普遍的な相互作用の形が決まったというよりも、荷電粒子の密度と分布が定まった結果として、統計的(あるいは平均的)な相互作用の「強さ」が空間の各点で決定されたのだと考えられる。従って、荷電(あるいは電流)を半古典的に、そして光子を量子論的に扱う事象については、この方向のアプローチが有用であり、その成果が期待さ

れる。しかしながら、荷電粒子自身の量子性も無視できない事象については、これ以外のもっと本質的な方法が重要になると思われる。

また、著者らは第5章で光子の波動方程式と古典電磁気学を結ぶ対応関係を見いだした。自由光子の場合、その意味するところは明白であったが、ポテンシャル相互作用を含む光子の場合、この対応関係の物理的根拠は、現在のところ明らかではない。特に、電気・磁気対称性なしにはこの関係が得られない事実は、古典電磁気学的側面からの理解を困難にする。その解明は、今後の興味ある課題の一つとなるであろう。

(平成2年2月15日受付)

文 献

- (1) R. J. Cook: *Phys. Rev.*, **A25**, 2164; **A26**, 2754 (1982)
- (2) 笹部・安達: 「光子に対する量子力学の構成および Maxwell 方程式との関係」, 電学論 A, **109**, 49 (平成2)
- (3) K. Nishijima: *Fields and Particles* (1969) W. A. Benjamin, Inc.
- (4) J. D. Bjorken, S. D. Drell: *Relativistic Quantum Fields* (1965) McGraw-Hill
- (5) 細野: 「光子に対する量子力学の構成および Maxwell 方程式との関係」に対する討論, 電学論 A, **109**, 558 (平成-12)
- 笹部・安達: 「同上に対する回答」, 同上 A, **109**, 559 (平成-12)
- (6) E. Noether: *Gött. Nachr.* p. 235 (1918)
- K. Nishijima: 参考文献(3), p.14
- (7) 八木: 原子核物理学, 第15版, p.234 (平成) 朝倉書店
- ランダウ・スモロディンスキー: 原子核理論, p.113 (昭35) 丸善
- (8) モット・マッセイ: 衝突の理論, p.15: 208 (昭37) 丸善
- (9) 高橋: 電磁気学, 第28版, p.126 (昭62) 養華房
- (10) J. D. Jackson: *Classical Electrodynamics*, 2nd ed., p.251 (1975) John Wiley & Sons
- (11) 林: 「モノ・ポール」(物理学最前線6), (昭59) 共立出版
- P. A. M. Dirac: *Proc. Roy. Soc.*, **A133**, 60 (1931)
- Phys. Rev.* **74**, 817 (1948)

笹 部 薫 (正員)

昭和21年11月17日生。51年3月京都大学大学院理学研究科博士課程修了。日本学術振興会奨励研究員、東京都立工科短期大学講師、同助教授を経て、61年4月東京都立科学技術大学助教授。理学博士。量子電磁力学および電子の物理特性の研究に従事。日本物理学会会員。

安 達 俊 美 (非会員)

昭和5年1月21日生。37年東京都立大学大学院理学研究科修了。43年東京都立工科短期大学教授を経て、現在東京都立科学技術大学教授。理学博士。素粒子論専攻。日本物理学会会員。