雷放電路は、フラクタルであるか？

非会員 勝 野 泰 (名古屋大)

正 員 河 崎 善一郎 (大阪大)

正 員 松 浦 虔 士 (大阪大)

Does the Lightning Channel Show the Fractal ?

Yasushi Katsuno, Non-member(Nagoya University), Zen-ichiro Kawasaki, Member, Kenji Matsuura, Member(Osaka University)

キーワード：フラクタル，雷放電路

近年，計算機シミュレーションの分野では形状パターンに着目してフラクタル理論をそれに適用することが多くなってきた。その一例として挙げられるのが，電気トリーの分岐構造⁽¹⁾やリヒテンベルク図のような放電パターンのシミュレーション⁽²⁾である。著者らのグループも雷放電路(ステップトリーダ)のシミュレーション⁽³⁾にこのフラクタル理論の適用を試みている。しかし，雷放電路については，その構造はフラクタル性を有していると考えられているのみで，その解析例はない。そこで本報告では，雷放電路の静止写真からそのフラクタル性の検討を行う。

フラクタルとは，自然界の樹木や川の形など，複雑な形状を定量的に解釈するための手段として考え出されたものである。フラクタル図形の最大の特徴でありその定義は，自己相似性を有しており，関数としては連続であるが至るところで微分不可能であるということであり⁽⁴⁾，複雑で滑らかでない曲線あるいは面で構成されているものである。そして複雑さの度合を定量的に表すのが，フラクタル次元である。その例としてよく挙げられるのがコッホ曲線である。コッホ曲線は，二等辺三角形の繰返しによりできるものであるので当然，自己相似形を有している⁽⁵⁾。一方，自然界に存在するもの，例えばフラクタルであるとされている川の形については，コッホ曲線のように部分と全体が全くの相似形になっているのではなく，同じような複雑さをもった形に見えるのであり，統計的な意味での自己相似になっている。文献(5)によれば，数学的な定義は以下のとおりである。

集合 K の位相次元 $\dim_T(K)$ とハウスドルフ次元 $\dim_H(K)$ について，

$$\dim_T(K) < \dim_H(K) \cdots \cdots (1)$$

が成立するとき，集合 K はフラクタルであるという。すなわち，位相次元 $\dim_T(K)$ は整数値であるので，ハウスドルフ次元 $\dim_H(K)$ が非整数値であるとき K をフラクタルと呼ぶ。そして，このときのハウスドルフ次元をフラクタル次元と呼ぶ。一般にフラクタル次元が大きいほどその図形は，複雑になる。

今回静止写真の解析に適用したフラクタル次元の求め方は，「粗視化の方法」⁽⁶⁾と呼ばれるもので以下のとおりである。フラクタル次元を求める平面図を間隔 r の格子によって 1 辺が r の正方形に分割する。そして，分割された正方形がその平面上においてフラクタル次元を求める図形を含んでいるような正方形の個数を数える。それを $N(r)$ とすると，その図形がフラクタル図形であるならば次式のような関係になる。

$$N(r) \propto r^{-D} \cdots \cdots (2)$$

ここで， r の指数となっている D が，求めるフラクタル次元である。従って両辺に自然対数をとれば，

$$\ln N(r) = -D \cdot \ln r + C \cdots \cdots (3)$$

となり，直線の傾きを求めればよいことになる。

この方法を用いて，19 例の放電路の静止写真についてフラクタル次元を求めた。その結果のうち 2 例の静止写真を図 1 (a)，(b) に，その結果を図 2 に示す。図 2 より直線となり，放電路形状がフラクタルになっているということがいえる。またフラクタル次元については，それがその図形の複雑さの度合を表すものでもあるから，(a) 図と (b) 図を比べれば (b) 図のほうが大きいことが想像できる。実際，図 2 によりその値は，(a) 図については次元 1.09，(b) 図につい

(a) (b)

図 1 自然雷の放電路
Fig. 1. Lightning channels.

□(a) : 次元 1.09, ◇(b) : 次元 1.29

図 2 図 1(a), (b)の $\ln r$ 対 $\ln N(r)$
Fig. 2. $\ln r$ vs. $\ln N(r)$.

図 3 フラクタル次元の分布

Fig. 3. Histogram of Fractal dimension.

ては次元 1.29 と求められている。今回検討した他の写真についても同様な結果が得られており、その結果を図 3 に示す。平均値は 1.221, 標準偏差は 0.116 である。また、この静止写真の放電路の「位相次元」は 1 であるので、求められたハウスドルフ次元と比べると (1) 式を満たしていることがわかる。

以上のことから、今回検討を行った雷放電路につい

ては、十分にフラクタル性をもっていると結論できる。今後は、フラクタル次元の大きさに影響を与えるものは何であるか検討を行う必要がある。またフラクタル理論の他分野への応用も検討したい。

(平成 3 年 1 月 7 日受付)

文 献

- (1) 丸山・工藤：「電気トリーの分岐構造のフラクタル性について」, 第 23 回電気絶縁材料シンポジウム, ED-90-47, EIM-90-56 (平 2)
- (2) L. Niemeyer, et al.: "Fractal Dimension of Dielectric Breakdown", *Phys. Rev. Letters*, 52, 1013 (1984)
- (3) Z. Kawasaki, et al.: "Fractal Model for The Leader of Lightning", *Res. Letters Atmospheric Electricity*, 9, 63
- (4) 高安：フラクタル, 朝倉書店
- (5) 石村・石村：フラクタル数学, 東京図書

勝 野 泰 (非正員)

昭和 41 年 11 月 2 日生。平成元年 3 月名古屋大学工学部電子工学科卒業。同年 4 月同大学大学院博士課程前期進学。雷放電シミュレーションに関する研究に従事。

河 崎 善一郎 (正員)

昭和 24 年 1 月 17 日生。53 年 3 月大阪大学大学院博士課程修了。54 年 4 月～平成元年 7 月名古屋大学空電研究所勤務。平成元年 7 月大阪大学講師。工学博士。環境電磁工学, 雷放電物理に関する研究に従事。

松 浦 虔 士 (正員)

昭和 13 年 1 月 1 日生。37 年 3 月大阪大学大学院修士課程修了。同年 4 月住友電気工業(株)入社。52 年 1 月大阪大学工学部助教授, 63 年 3 月同教授。工学博士。電気エネルギーの発生・伝送・制御に関する研究に従事。