二電子温度プラズマ中におけるイオン音波ソリトンの伝搬特性

正員 山 住 富 也 (中部大)

准員 今井田 隆 (中部大)

准員 加 藤 法 之 (中部大)

正員 池 沢 俊治郎 (中部大)

Propagation Properties of Ion Acoustic Solitons in Two Electron Temperatures Plasma

Tomiya Yamazumi, Member, Takashi Imaida, Associate, Noriyuki Kato, Associate, Shunjiro Ikezawa, Member (Chubu University)

There have been some interests recently in studying the propagation of an ion acoustic soliton in a plasma consisting of two components in electron temperature, each with its unique electron temperature T_h and T_c and density N_{eh} and N_{ec} . The addition of the second component opens the possibility of excitation and propagation of both a compressive and rarefactive soliton. The ion acoustic soliton propagation can be described in terms of a Sagdeev potential $U(\phi)$ with hot and cold electrons. The most striking features are that 1) in the compressive soliton, the characteristics between the Mach number μ and the normalized amplitude $e\phi/(kT_h)$ are reversed when $T = T_h/T_c$ varies, and 2) in the rarefactive soliton, they are reversed when $N = N_{eh}/N_{ec}$ varies.

In this paper Sagdeev potential is analyzed to clarify the property of above-mentioned compressive and rarefactive solitons.

キーワード：二電子温度プラズマ，圧縮ソリトン，希薄ソリトン，逆転領域

1. ま え が き

1965年“ソリトン”と呼ばれる新しい波が，2人のアメリカ人 Zabusky と Kruskal によって発見された。このパルス状の孤立波 (solitary wave) は，互いに衝突によって壊れない粒子的な性質を示すことから soliton と名づけられ，その後物理学および数学上の解析を中心に研究されてきた⁽¹⁾。最も代表的なものに Korteweg de Vries (KDV) 方程式と呼ばれる二階の非線形微分方程式の解析から，数学的にソリトン解を求める方法があり，ソリトン特有の分散現象や非線形現象も解析されている。更に，大振幅のソリトンの記述法として Sagdeev-Potential を用いる方法があり，ソリトンのポテンシャル分布を解析し，プラズマのみならず，通信，情報などの工学の分野に応用される動きがある。

近年，ソリトンは慣性核融合の研究のなかで不安定性の問題として取上げられている。例えば，慣性核融合ではレーザ加熱を行うため，非常に強力なエネルギーがプラズマ中に一度に注入されるが，この反応の際に付随し生じる shock wave が不安定性の原因として問題となっている。更に核融合では加熱を続けていくと，プラズマが二電子温度状態（すなわち二つのマクスウェル分布の重ね合せ）をもつことが明らかにされている。従来の研究例を挙げると，西原らは Sagdeev-Potential を二電子温度プラズマ中のソリトンに適用し理論的に解析を行った⁽²⁾⁽³⁾。

本研究では，Sagdeev-Potential を計算し，二電子温度プラズマ中の圧縮および希薄ソリトンの伝搬可能条件を求め，これまで検討されていなかった部分，すなわち，マッハ数-振幅特性 ($\mu - e\phi/kT_h$) の性質，伝搬可能領域の特性などについて検討した。

2. 二電子温度プラズマと Sagdeev Potential

プラズマ中の電子温度および電子密度の分布は、一般にマクスウェル分布を用いて記述される。しかし、慣性核融合のような場合、すなわち非常に強力なエネルギーを一度に注入する場合、高温電子成分 ($T_h=10$ keV $\sim$) と、衝突などでエネルギーを損失した低温電子成分 ($T_c=0.1\sim 1$ keV) からなる二つの異なった温度をもつエネルギー分布を重畳したような状態が生じる。

Sagdeev Potential は Sagdeev により定義されたソリトン中のポテンシャルの記述法で、西原らにより二電子温度プラズマ中における Sagdeev Potential $U(\phi)$ が拡張され、(1)式のように定義されている⁽²⁾⁽³⁾。

$$U(\phi) = -4\pi[N_i v_i^2 \{-1 + (1 - 2e\phi/Mv_i^2)^{1/2}\} - N_{eh} T_h \exp(e\phi/kT_h) - N_{ec} T_c \exp(e\phi/kT_c)] \quad (1)$$

ここで、 ϕ : ソリトンの振幅、 v_i : ソリトンの伝搬速度、 T_h, T_c および N_{eh}, N_{ec} : 高温電子成分と低温電子成分の温度および密度
振幅を高温電子成分の温度 T_h で規格化すれば、(1)式は

$$U(\phi) = -4\pi[N_i v_i^2 \{-1 + (1 - 2\chi_h \times kT_h/Mv_i^2)^{1/2}\} - N_{eh} T_h \exp(\chi_h) - N_{ec} T_c \exp(\chi_h \cdot T_h/T_c)] \quad (2)$$

ここで、 χ_h は

$$\chi_h = e\phi/(kT_h) \quad (3)$$

である。

また、イオン音波速度 C_{s0} は

$$C_{s0} = [(kT_c/M)\{1 + (N_{eh}/N_{ec})\} / \{1 + (T_c/T_h)(N_{eh}/N_{ec})\}]^{1/2} \quad (4)$$

である。

3. 計算結果

<3.1> 圧縮ソリトン (1)式において次のように規格化する。伝搬速度 v_i をマッハ数で

$$\mu = v_i/C_{s0} \quad (5)$$

と規格化し、更に温度比、密度比で

$$T = T_h/T_c \quad (6)$$

$$N = N_{eh}/N_{ec} \quad (7)$$

と無次元化し、振幅に対する $U(\phi)$ の値を求め、図1~図4に示す。これらの計算で $e\phi/(kT_h)=0$ で $U(\phi)=0$ となる初期条件をみだし、再び $U(\phi)=0$ となる点の値が伝搬可能なソリトンの振幅に相当する。

図1 圧縮ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($T=5, N=4$)

Fig.1. Soliton amplitude vs. Sagdeev potential ($T=5, N=4$).

図2 圧縮ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($T=5, \mu=1.05$)

Fig.2. Soliton amplitude vs. Sagdeev potential ($T=5, \mu=1.05$).

また、伝搬可能な限界条件でのソリトン解をショック解と呼ぶ。このときのソリトン解は、最大振幅 $[e\phi/(kT_h)]_{\max}$ をもつ。

図1は温度比 $T=5$ 、密度比 $N=4$ 一定でマッハ数 μ をパラメータとして $U(\phi)$ を計算した。マッハ数 μ の増大と共にソリトンの振幅も増大することがわかり、これはソリトンの特徴の一つにあたる分散関係を示す。

図2はマッハ数 $\mu=1.05$ 、温度比 $T=5$ 一定で密度比 N をパラメータとして計算した。密度比が増大するとソリトンの振幅も増大していくが、その割合は一定ではなく、徐々に狭まっていく。

図3にマッハ数 $\mu=1.05$ 、密度比 $N=4$ 一定で温度比をパラメータとして計算した。温度比が大きくなるにつれて、ソリトンの振幅は $T=10$ のときまで増加し、 $T=10$ を超えると逆に減少しはじめる。

密度比 N の変化による特性を図4にまとめる。実線は密度比 $N=3$ 、破線は $N=4$ で、温度比がそれぞれ $T=5$ と $T=10$ の場合についての計算結果を示す。 $N=3$ のときは温度比が増大すると振幅が減少する

図 3 圧縮ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($N=4$, $\mu=1.05$)

Fig. 3. Soliton amplitude vs. Sagdeev potential ($N=4$, $\mu=1.05$).

図 4 圧縮ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($\mu=1.05$)

Fig. 4. Soliton amplitude vs. Sagdeev potential ($\mu=1.05$).

が、 $N=4$ の場合、逆になる。

次に、(1)式において $U(\phi)=0$ とおき、振幅 $e\phi/(kT_h)$ とマッハ数 μ の関係を求め、密度比が 4.0 の場合について図 5 に示す。温度比はそれぞれ 3, 7, 11, 15 の場合について行った。ソリトンの分散関係から、振幅が大きいほどマッハ数が大きくなる性質は共通している。しかし、小振幅の場合と大振幅の場合では、ソリトンのマッハ数の温度比に対する依存性は異なってくる。大振幅のとき [$e\phi/(kT_h) > 0.16$], T が大きいとマッハ数も大きくなるが、小振幅では逆である [$e\phi/(kT_h) < 0.1$]。

更に、温度比 T と振幅 $e\phi/(kT_h)$ の関係をマッハ数が $\mu=1.01, 1.05, 1.10$ の場合についてのみ抽出して図 6 に示した。密度比 $N=4$ のとき、マッハ数が 1.01 の場合、振幅は温度比の増加と共に大きくなるが、マッハ数が 1.10 のところでは逆の関係になる。これが、先にふれた逆転領域が現れることにあたり、更に密度比を増大させるに従って、曲線の傾きはより複雑な変化を示すようになる。基本的にはソリトンは分散効果によって、マッハ数の大きなものは振幅が大

図 5 圧縮ソリトンの振幅とマッハ数 ($N=4.0$) の関係

Fig. 5. Soliton amplitude vs. much number ($N=4.0$).

図 6 圧縮ソリトンの温度比と振幅の関係

Fig. 6. Temperature ratio vs. soliton amplitude.

きくなるが、媒質であるプラズマの温度比と密度比のわずかな変動に大きく影響され、振幅とマッハ数の関係が逆転する領域が現れることがわかる。

図 7 は温度比 T と密度比 N の関係である。曲線の左側の部分がソリトンの伝搬可能領域である。この曲線群は温度比と密度比が逆比例の傾向をもつことを示している。マッハ数が大きくなると伝搬可能領域は大きく制限され、例えば振幅が 0.05 で $\mu=1.020$ の場合、この領域はほとんど $N < 4$ の部分に限られる。また、振幅が大きくなるにつれ伝搬可能領域は広がっていく。

図 8 は密度比-最大振幅 [$e\phi/(kT_h)_{\max}$] でソリトンの伝搬領域を示したものである。温度比が大きくなる

図 7 圧縮ソリトンの温度比と密度比の関係
[$e\phi/(kT_h)=0.05, 0.07$]

Fig. 7. Temperature ratio vs. density ratio
[$e\phi/(kT_h)=0.05, 0.07$].

図 8 圧縮ソリトンの密度比と最大振幅
[$e\phi/(kT_h)]_{\max}$ の関係 ($T=4, 6, 8$)

Fig. 8. Density ratio vs. maximum amplitude
($T=4, 6, 8$).

と最大振幅の絶対値が小さくなる。また、密度比が大きいと、最大振幅は大きくなる。

〈3・2〉 希薄ソリトン 希薄ソリトンの特性を、 $\phi < 0$ において計算した。図 9 は $T=15$, $N=10$ 一定のときの $U(\phi)$ を計算した結果である。マッハ数 μ は 1.01~1.07 まで変化させた。マッハ数を大きくすると最大振幅の値も増大するが、 μ が 1.066 のところで臨界条件 (ショック解) となり、更に μ が大きくなると (図中では $\mu=1.07$) になると $U(\phi)$ が再び 0 となる点は存在せず、ソリトンは伝搬不可能となる。

図 10 は $N=14$, $\mu=1.03$ 一定のときの $U(\phi)$ の値を計算した結果である。温度比の値を増大するにつれ振幅は減少する。 $T=12$ に示すように、温度比が小さくなると希薄ソリトンは存在できなくなる。

図 11 は $T=15$, $\mu=1.03$ 一定のときの $U(\phi)$ の値

図 9 希薄ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($T=15$, $N=10$)

Fig. 9. Soliton amplitude vs. sagdeev potential ($T=15$, $N=10$).

図 10 希薄ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($N=14$, $\mu=1.03$)

Fig. 10. Soliton amplitude vs. sagdeev potential ($N=14$, $\mu=1.03$).

図 11 希薄ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($T=15$, $\mu=1.03$)

Fig. 11. Soliton amplitude vs. sagdeev potential ($T=15$, $\mu=1.03$).

を計算したものである。密度比の値の増大に対して振幅は増大し、振幅の変化は温度比の場合 (図 10) と逆になる。

分散関係 (振幅-マッハ数) を図 12 に示す。曲線はマッハ数の最大値に向かって放物線状になり、最大振幅の点はショック解であり、それより左側では解はな

図 12 希薄ソリトンの振幅とマッハ数の関係 ($T=12\sim 20$, $N=5, 10$)

Fig. 12. Soliton amplitude vs. much number ($T=12\sim 20$, $N=5, 10$).

図 13 希薄ソリトンの温度比と密度比の関係 ($e\phi/kT_n = -0.05, -0.07$)

Fig. 13. Temperature ratio vs. density ratio ($e\phi/kT_n = -0.05, -0.07$).

い。温度比が大きくなることによってマッハ数の値は大きくなる。目安として温度比は $T > 10$ で希薄ソリトンは伝搬可能となり、 $T < 10$ では $U(\phi) = 0$ となる解は見つからず、伝搬不可能である。分散特性は、振幅が 0 のとき必ずしも $\mu = 1$ とならず、 $\mu < 1$ のソリトンも存在可能である。密度比 N の値によって、同じ温度比でもマッハ数の値が逆転する領域が出てくる

図 14 希薄ソリトンの密度比と最大振幅の関係 ($T=12, 15$)

Fig. 14. Density ratio vs. maximum amplitude ($T=12, 15$).

(矢印)。 $T=20$ の場合については振幅の絶対値が小さい領域 $[0 > e\phi/(kT_n) > -0.2]$ では密度比の値が大きいほどマッハ数は大きい。振幅の絶対値が大きくなると $[e\phi/(kT_n) < -0.2]$, 密度比の値が小さいほどマッハ数が大きくなる。

図 13 は希薄ソリトンの伝搬領域を密度比と温度比について求めたものである。希薄ソリトンの場合、曲線の右側が伝搬可能である。目安として、伝搬可能領域は $T > 10$ で、温度比と密度比は双曲線状になる。

図 14 は希薄ソリトンの伝搬領域を密度比と振幅について求めたものである。太線は最大振幅を示す。温度比が大きくなると伝搬可能領域は広がる。密度比は 50 より大きくなるとほとんど伝搬領域はなくなる。

4. 検 討

(1) 圧縮ソリトン 図 1 において、二電子温度プラズマ中のソリトンは、マッハ数が大きくなると振幅が大きくなり、ソリトンの基本的性質である分散関係を示していることがわかる。図 2 では、密度比に対する依存性を示し、密度比が大きくなると、振幅も大きくなることがわかる。図 3 では温度比が大きくなっても振幅はほぼ一定のようであるが、これは図 6 で示すように、密度比によって温度比が振幅に与える影響が変化するためである。

具体的には、 $\mu = 1.01$ の場合、 $N = 2$ のときは温度比が大きくなると振幅は減少するが、 $N = 6$ の時には逆に上昇する。従って、図 4 のような分散関係の逆転領域が現れる。温度比と密度比の値の組合せ次第で、振幅が大きいくほど伝搬速度が速いと一概にはいえない場合が存在する。図 5 においては、大振幅の場合と小振幅の場合では、温度比に対する分散関係の依存性が異なることが明らかになった。温度比が高くなると振

図 15 イオンのポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の温度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 15. Ion potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

図 16 高温電子成分のポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の温度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 16. Hot electron potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

図 17 低温電子成分のポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の温度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 17. Cold electron potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

幅の大きな場合ほどマッハ数は加速され、小振幅の場合では逆である(逆転現象)。伝搬領域は図7の $T-N$ 特性から、 T の値が大きければ N の値が小さいところで、また T の値が小さければ N の値が大きいところで必ず伝搬領域が存在していることがわかる。

図5の検討で述べた逆転現象を考察するために、イ

図 18 イオンのポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の密度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 18. Ion potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

図 19 高温電子成分のポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の密度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 19. Hot electron potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

図 20 低温電子成分のポテンシャルと圧縮ソリトンの振幅の密度比特性 ($\mu=1.05$)

Fig. 20. Cold electron potential vs. soliton amplitude ($\mu=1.05$).

オンのポテンシャルおよび高温電子成分、低温電子成分のポテンシャルを T の変化に対し別々に計算を行った結果を図15～図17に示す。図15と図17からのイオンのポテンシャルと低温電子成分のポテンシャルは似通った変化をしている。これは、特に低温電子成分の熱速度が低いためイオン波の振動を避へいするように運動するためである。高温電子成分はこれに対し、熱速度が大きいためイオン波に追従せず、図16

のようになる。 T による伝搬特性への影響を考察すると、 T が高くなる、すなわち低温電子成分の温度が低くなった場合、イオンのポテンシャルは急しゅんに変化するようになり、ソリトンの振幅は小さくなる(図3でポテンシャルの井戸が深くなるのもこのためである)。しかし、 T が大きくなると低温電子成分のポテンシャルもイオンのポテンシャルと同じように変化することと、後述する N の影響もあるので、単純に振幅は減少しないため、逆転現象が起こる。

更に、密度比の影響を検討するため、イオンのポテンシャルおよび高温電子成分、低温電子成分のポテンシャルを N の変化に対し別々に計算を行った結果を図18~20に示す。 N の値を大きくすると、イオンと高温電子成分のポテンシャルは絶対値として増加するが、低温電子成分は減少する。すなわち、先に述べた T に対する影響は、 N が小さいと(低温電子成分の密度が高くなると)、低温電子成分はイオンと同じようなポテンシャルの形になるが、 N が徐々に大きくなり低温電子成分が高温電子成分より十分少なくなると、低温電子成分のポテンシャルの絶対値は小さくなり、全体のポテンシャルに対する影響(イオンのポテンシャルに対しても)は少なくなる。図2のように N が大きくなると振幅の値が増すのは、 U_1 は U_{ec} の影響を受けるため U_{ec} が小さくなると U_1 は増加率が低くなり、 $U(\phi) = U_1 + U_{eh} + U_{ec}$ がプラスの値に戻る(ポテンシャルの井戸を形成する)のが振幅の値が大きくなってからになるからである。

T の値を変化させたとき、 N の値によって振幅の増加率、減少率が異なってくる。よって、図5のように小振幅と大振幅では温度比による依存性が異なり、逆転現象が起こる。また、図6のように N の値によって振幅が変化するため、マッハ数の値が大きくても振幅の小さいソリトンが伝搬するという逆転領域が現れることになる。

(2) 希薄ソリトン 図9において、希薄ソリトンの振幅はマッハ数が大きくなると増大し、 $\mu = 1.066$ で最大振幅(ショック解)となることがわかる。図10では温度比が小さくなると振幅が増大し、 $T = 13.68$ のところでショック解となり、それ以下ではソリトンは存在しない。図11では N の値が大きくなると振幅が増大し、 $N = 19.14$ のところでショック解となる。すなわち、温度比がある程度大きくなければソリトンは存在しない。このことは図13の T - N 特性からもいえる。伝搬領域の境界線は N の値が大きくなるにつれ、 T の値も大きくなる($T = 15$ 近傍)。従って、 T の値が一定以上でなければソリトン

図21 希薄ソリトンの振幅と Sagdeev Potential の関係 ($\mu = 1.12$)

Fig. 21. Soliton amplitude vs. Sagdeev potential ($\mu = 1.12$).

が伝搬不能となることがわかる。図14の密度比-最大振幅特性では、 T が大きいほうが伝搬領域は広がり、最大振幅も大きくなることがわかる。マッハ数を一定とした場合(図中細い破線)、 $N = 10$ 近傍で振幅の絶対値が最小となり、 N の値が違っても振幅は同じ場合が出てくる。このことは図11からもわかる。

圧縮ソリトンと同様にこの逆転領域を $U(\phi) - e\phi/(kT_h)$ 特性で検討する。図21は $T = 12, 20$ および $N = 5, 10$ における希薄ソリトンの場合である。 $T = 20$ の場合は、密度比が高いほうが振幅が大きいが、 $T = 12$ では逆に密度比が高いほうが振幅が大きくなる。

5. ま と め

Sagdeev Potential を用いた理論計算から、二電子温度パラメータとソリトンの伝搬条件の関係を求めた結果、次のような二電子温度特有の温度比、密度比依存性が得られた。

圧縮ソリトンの振幅-マッハ数特性では、大振幅の場合と小振幅の場合では、温度比に対する依存性が異なることがわかった。温度比-振幅特性からは、温度比に対して振幅、マッハ数が敏感に変化する(図6)。特に温度比が増すと大振幅域では $e\phi/(kT_h)$ が減少するが、密度比が増すと($N > 5$)、振幅 $e\phi/(kT_h)$ の極大が現れる。温度比-密度比特性は、ソリトンの伝搬可能領域が μ により分類され、温度比と密度比が逆比例する傾向にあり(図7)、伝搬可能領域は $T < 10$, $N < 10$ の範囲にほとんど限られる。

希薄ソリトンについては、密度比 N により振幅が逆転する領域がある(図12)。振幅の値は圧縮ソリトンの場合の2, 3倍になる(図12)。伝搬可能領域は温度によって制限され(図13, $T > 14$)、温度比が大きいほど最大振幅は大きくなり(図14の太線)、圧縮

ソリトンは逆に小さくなる(図8)。希薄ソリトンは T - N 特性図について T の値がある程度大きくないと伝搬できないことが明らかになった。圧縮ソリトンでは T の値が小さくても N の値が大きければ、伝搬可能領域が存在する。

圧縮ソリトンの最大振幅は温度比の値が大きくなると小さくなるが(図8), 希薄ソリトンでは逆に温度比が大きくなると大きくなる(図14の下の方の曲線)。

今後は上記の結果を二電子温度プラズマを用いた実験的研究⁽⁴⁾により確認する予定である。

本研究に際し議論下さった豊田工大 野中繁彦教授、宇宙研 中村良治教授に感謝する。また、御指導下さった武田 進教授に感謝する。本研究の一部は初期に宇宙科学研究所の共同研究として行われ、本学奨励研究費、石田財団により支援された。

(平成2年5月18日受付, 同2年12月10日再受付)

文 献

- (1) 渡辺: ソリトン物理入門(昭60), 培風館
- (2) Y. Nishihara & M. Tajiri: "Rarefaction Ion Acoustic Solitons in Two-Electron-Temperature Plasma", *J. Phys. Soc. Japan*, **50**, 4047 (1981)
- (3) M. Tajiri & Y. Nishihara: "Solitons and Shock Waves in Two-Electron-Temperature Plasmas", *ibid.*, **54**, 572 (1985)
- (4) T. Yamazumi & S. Ikezawa: "Control of Two-Electron-Temperature Plasma Parameter in a DP Device", *JAP*, **29**, 1807 (1990)

山 住 富 也 (正員)

昭和63年中部大学大学院修士課程修了。以来、二電子温度プラズマ中のソリトンの研究など、プラズマ物理の研究に従事。平成3年同大学博士課程修了。同年名古屋文理短期大学助手。

今井田 隆 (准員)

修士課程修了。

平成元年中部大学工学部電子工学科卒業。以来、二電子温度プラズマ中のソリトンの研究など、プラズマ物理の研究に従事。平成3年同大学

加 藤 法 之 (准員)

平成3年中部大学工学部電子工学科卒業。現在、二電子温度プラズマ中のソリトンの研究など、プラズマ物理の研究に従事。

池 沢 俊治郎 (正員)

昭和42年山梨大学電子卒業。47年名古屋大学博士課程修了。同年中部工業大学講師, 51年同助教授, 61年同教授, 現在に至る。工学博士。その間、名大プラズマ研, 東大宇宙研, FOMプラズマ研(オランダ)でプラズマ物理の研究に従事。現在、CVD用プラズマ源などの研究に従事。日本物理学会, 電子情報通信学会, 応用物理学会, プラズマ・核融合学会, 放電研究グループ会員。