クロネッカー積の指数行列に関する演算

正員 竹内 義之 (徳島文理大)

Calculus of Exponential Matrix with Kronecker Product

Yoshiyuki Takeuchi, Member (Tokushima Bunri University)

キーワード：非線形系，クロネッカー積，テンソル記法，行列

1. ま え が き

非線形制御対象の状態方程式⁽¹⁾を

$$\dot{X} = \sum_{l=1}^L A_l X^{(l)} + Bu \quad (L \geq 2)$$

と表した場合，制御則を導くために必要な行列演算に関する命題を導いた。

2. 記号の説明

肉太の記号は行列，肉細の記号はスカラ， I は単位行列， $\otimes$ は Kronecker 積， $X^{[K]}$ は X の K 回の Kronecker 幕 (例 $X^{[2]} = X \otimes X$)， $\cdot$ は行列の積， $I^{(K)}$ は I の K 回の累乗 (例 $I^{(2)} = I \cdot I$)，記号の右肩に付けた T は転置を意味する。

3. 定 義

行列の演算を簡潔に表現するためにテンソル記法⁽¹⁾を導入する。

〔定義 1〕 Kronecker 積 ここでは左方積を定義する。行列 A を

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{bmatrix}$$

としたとき，

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_1^1 B & a_2^1 B \\ a_1^2 B & a_2^2 B \end{bmatrix}$$

を左方積と呼ぶことにする。

4. 演算に関する命題

Kronecker 積を用いた行列演算の命題を示す。

〔命題 1〕 A を $(n \times n)$ の正方行列 $[a_{ij}]$ ($i, j=1, 2, \dots, n$) としたとき

$$e^{(I^{(l)} \otimes A \otimes I^{(K-l-1)})t} = I^{[l]} \otimes e^{At} \otimes I^{[K-l-1]}$$

となる。

〔証明〕

$$\begin{aligned} e^{(I^{(l)} \otimes A \otimes I^{(K-l-1)})t} &= I^{[l]} + (I^{[l]} \otimes A \otimes I^{[K-l-1]})t \\ &\quad + \frac{1}{2!} (I^{[l]} \otimes A \otimes I^{[K-l-1]})^2 t^2 + \dots \end{aligned}$$

右辺は次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} &I^{[K]} + (I^{[l]} \otimes At \otimes I^{[K-l-1]}) + 1/2! (I^{[l]} \cdot I^{[l]}) \\ &\quad \otimes (At \cdot At) \otimes (I^{[K-l-1]} \cdot I^{[K-l-1]}) + \dots \\ &= I^{[K]} + (I^{[l]} \otimes At \otimes I^{[K-l-1]}) \\ &\quad + 1/2! (I^{[l]} \otimes (At)^2 \otimes I^{[K-l-1]}) + \dots \\ &= I^{[l]} \otimes (I + At + 1/2! (At)^2 \\ &\quad + 1/3! (At)^3 + \dots) \otimes I^{[K-l-1]} \\ &= I^{[l]} \otimes e^{At} \otimes I^{[K-l-1]} \quad (\text{証明了}) \end{aligned}$$

〔命題 2〕

$$e^{\sum_{l=1}^K (I^{(l-1)} \otimes A \otimes I^{(K-l)})t} = (e^{At})^{[K]}$$

〔証明〕

$$\begin{aligned} &e^{(A \otimes I^{[K-1]} + I \otimes A \otimes I^{[K-2]} + \dots + I^{[K-1]} \otimes A)t} \\ &= e^{(A \otimes I^{[K-1]})t} e^{(I \otimes A \otimes I^{[K-2]})t} \dots e^{(I^{[K-1]} \otimes A)t} \end{aligned}$$

上式の右辺は，〔命題 1〕より

$$\begin{aligned} &(e^{At} \otimes I^{[K-1]}) (I \otimes e^{At} \otimes I^{[K-2]}) \dots \\ &\quad (I^{[K-1]} \otimes e^{At}) \end{aligned}$$

これは，更に次のように書き改められる。

$$\begin{aligned} &(e^{At} \cdot I^{[K-1]}) \otimes (I \cdot e^{At} \cdot I^{[K-2]}) \otimes \dots \otimes (I^{[K-1]} \cdot e^{At}) \\ &= e^{At} \otimes e^{At} \otimes \dots \otimes e^{At} = (e^{At})^{[K]} \quad (\text{証明了}) \end{aligned}$$

〔命題 3〕

$$(e^{At})^{[K]} X^{[K]} = (e^{At} X)^{[K]}$$

〔証明〕

$$\begin{aligned} &(e^{At})^{[K]} X^{[K]} = (e^{At} \otimes \dots \otimes e^{At}) (X \otimes \dots \otimes X) \\ &= (e^{At} X) \otimes (e^{At} X) \otimes \dots \otimes (e^{At} X) \\ &= (e^{At} X)^{[K]} \end{aligned}$$

〔命題 4〕

$\sum_{k=1}^n (I^{[K-1]} \otimes A \otimes I^{[n-K]})$ の n^n 個の固有値を $\lambda_1, \lambda_2,$

$\dots, \lambda_{n^n}$ ， A の固有値を $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ とすると

$$T[\lambda_1 \lambda_2, \dots, \lambda_{n^n}] = \sum_{i=1}^n I^{[i-1]} \otimes \alpha \otimes I^{[n-i]}$$

となる。ここに，

$$\alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 & & \\ & \alpha_2 & \\ & & \ddots \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

である。

この証明に入るまえに次の補題を証明しておく。

[補題 1] S を A の三角変換行列, すなわち $S^{-1}AS$ が三角行列になるような正則行列とすると

$$(S^{-1})^{[n]}(I^{[K]} \otimes A \otimes I^{[n-K-1]})(S)^{[n]} \\ = I^{[K]} \otimes (S^{-1}AS) \otimes I^{[n-K-1]}$$

が成立する。

(証明) $S^{-1}AS$ は, 対角成分が $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ なる上半三角行列になるものとする。

$$(S^{-1})^{[n]}(I^{[K]} \otimes A \otimes I^{[n-K-1]})(S)^{[n]} \\ = \underbrace{(S^{-1} \otimes \dots \otimes S^{-1})}_{n \text{ 個}} \\ \times \underbrace{(I \otimes \dots \otimes I \otimes A \otimes I \otimes \dots \otimes I)}_{\substack{K \text{ 個} \quad (n-K-1) \text{ 個}}} \\ \times \underbrace{(S \otimes \dots \otimes S)}_{n \text{ 個}}$$

これは次式に書き改められる。

$$\underbrace{(S^{-1}IS) \otimes \dots \otimes (S^{-1}IS) \otimes (S^{-1}AS)}_{K \text{ 個}} \\ \otimes \underbrace{(S^{-1}IS) \otimes \dots \otimes (S^{-1}IS)}_{(n-K-1) \text{ 個}} \\ = I^{[K]} \otimes S^{-1}AS \otimes I^{[n-K-1]} \quad (\text{証明了})$$

次に, [補題 1] を使って [命題 4] を証明する。

$\sum_{k=1}^n (I^{[K-1]} \otimes A \otimes I^{[n-K]})$ の固有値は, 上半または下半三角行列にしたときの対角要素で与えられるから, 上半三角行列にするために, この式に左から $(S^{-1})^{[n]}$, 右から $(S)^{[n]}$ を掛けると

$$\sum_{k=1}^n (S^{-1})^{[n]}(I^{[K-1]} \otimes A \otimes I^{[n-K]})(S)^{[n]} \\ = (S^{-1})^{[n]}(A \otimes I^{[n-1]} + I \otimes A \otimes I^{[n-2]} + \dots + I^{[n-1]} \otimes A)(S)^{[n]}$$

となる。この式に [補題 1] を適用して

$$(S^{-1}AS) \otimes I^{[n-1]} + I \otimes (S^{-1}AS) \otimes I^{[n-2]} \\ + \dots + I^{[n-1]} \otimes (S^{-1}AS)$$

$$= \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \otimes I^{[n-1]} + I \otimes \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix} \\ \otimes I^{[n-2]} + \dots + I^{[n-K]} \otimes \begin{bmatrix} \alpha_1 & & & \\ & \alpha_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \alpha_n \end{bmatrix}$$

となるから固有値は, $\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2} + \dots + \alpha_{i_n}$ ($i_1, i_2, \dots, i_n = 1, 2, \dots, n$) なる n^n 個の値をとる。

(平成 3 年 2 月 1 日受付)

文 献

- (1) 竹内・三宝: 「多項式形非線形系の安定解析と安定化制御」, 電学論 A, 104, 235 (平元-5)
- (2) 横沼: 「テンソル空間と外積代数」, 岩波講座 基礎数学 (昭 57) 岩波書店

竹 内 義 之 (正員)

昭和 36 年神奈川大学工学部電気工学科卒業。平成元年徳島文理大学工学部機械電子工学科助教授。工学博士。システム制御情報学会,

IEEE 会員。