2 スカラポテンシャルを用いた境界要素法による 三次元静磁界解析法の改良

正員 太田 金幸 (慶応大)

正員 沢 孝一郎 (慶応大)

An improvement for 3-D Magnetostatic Field Calculation using Two Scalar Potentials with BEM

Kaneyuki Ohta, Member, Koichiro Sawa, Member (Keio University)

In the case of applying BEM to the 3-D magnetostatic field calculation, the two scalar potentials method introduced by J. Simkin and C. W. Trowbridge, is effective, because it needs fewer unknowns than the vector potential method and brings less calculation error than one potential method. But in the two scalar potentials method we must calculate line integrals on the boundary for making interface conditions between the inhomogeneous regions. In order to improve this disadvantage, we propose a new technique in which the interface conditions can be obtained without this line integrals and consequently we could shorten the calculation time.

In BEM, it is the most significant problem that the nearly singularity of surface integrals appears in calculating the coefficient matrices and potentials at internal points. Especially when the internal point becomes closer to the boundary, the nearly singularity of the integrands becomes severer and numerical calculation of this integrals becomes more difficult. Therefore, we apply Takeda's analytical integral formula to the two scalar potentials method, and have confirmed its validity in accuracy and calculation time.

キーワード：三次元静磁界解析, 境界要素法, 2 スカラポテンシャル法, 接合条件, 解析積分公式

1. ま え が き

境界要素法 (Boundary Element Method ; BEM) は, 有限要素法 (Finite Element Method ; FEM) に比べ問題領域の境界のみをモデル化すればよく, 入力データの作成が容易で, また計算容量も少なくすむため三次元解析に向いている⁽¹⁾。本論文では, BEM によって電気機器の三次元磁界解析を行うため, 一般によく使われる磁気ベクトルポテンシャルによる方法より, 未知数が少なくてすみ, BEM に適用した際に式が簡単になる磁気スカラポテンシャルに着目した。

磁気スカラポテンシャルを用いる方法としては, 古くから, 電流の影響を取除いて考えるレデュースドポテンシャルを用いる方法があったが, 後に Simkin ら

によって, この方法によると磁性体中の磁束密度を計算する際に桁落ち誤差が発生することが指摘され, これに代わって, 磁性体中では別のポテンシャルを用いる 2 スカラポテンシャル法が提案された⁽²⁾。

しかし 2 スカラポテンシャル法では, 異なる媒質間の接合面での接合条件を計算する際に基準点から全節点までの線積分を計算する必要があり, ここで計算時間をとられてしまう。また, 係数マトリックスや内点ポテンシャルを計算する際に現れる積分の準特異性により, 特に内点が境界の近傍になると, 数値積分でこれを評価するには積分のサンプル点数を増やすなどする必要が生じ, 計算時間が増してしまう。この点は, 回転機, アクチュエータなど微小ギャップのある機器の解析の際には重要な問題となる。

そこで著者は、前者の問題に対しては、積分計算を行わずに接合条件を導く方法を提案し、計算時間を節約できることを示した⁽³⁾⁽⁴⁾。また、積分の準特異性については、武田らによる解析積分公式⁽⁵⁾を2スカラポテンシャル法に適用し、計算精度と計算時間を検討した⁽⁴⁾。その結果、境界近傍でも高精度の結果が得られること、計算時間も短いことなど、その有用性を確認した。

2. 2スカラポテンシャル法

〈2・1〉 2スカラポテンシャル法の基礎理論

まず、2スカラポテンシャル法⁽²⁾⁽⁶⁾⁽⁷⁾について簡単に説明する。

なお本論文では、媒質1からなる領域1と媒質2からなる領域2の二つの領域からなる問題について考える。ここで、どちらの領域とも線形で、領域1は開領域とする。また、電流は領域1のみに存在し、領域2には存在しないものとする。

このとき、領域1においては、磁界 H を、次式のように、電流分布のみによる磁界 H_s と領域2による寄与分 H_m とに分けて考える。

$$H = H_s + H_m \quad \dots\dots\dots (1)$$

ここで、 H_s はビオ・サバルの公式によって計算できる。

$$H_s = \int_{\Omega_1} \frac{J(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} d\Omega(r') \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここに、 Ω_1 : 電流が存在する全領域、 r : 領域1の任意の点、 r' : 積分用のダミー変数
 $\nabla \times H_s = J$ となることから、 $\nabla \times H_m = 0$ となり、 H_m に対してスカラポテンシャルが次式のように定義できる。

$$H_m = -\nabla \phi \quad \dots\dots\dots (3)$$

この ϕ をレデュースドスカラポテンシャル (reduced scalar potential) と呼ぶ。これと $\nabla \cdot B = 0$ より、領域1における支配方程式は次式ようになる。

$$\nabla^2 \phi = 0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

領域2では、電流が存在しないので、 $\nabla \times H = 0$ となり、 H に対して直接、スカラポテンシャルが定義できる。

$$H = -\nabla \psi \quad \dots\dots\dots (5)$$

この ψ をトータルスカラポテンシャル (total scalar potential) と呼ぶ。先と同様に、領域2における支配方程式は次式ようになる。

$$\nabla^2 \psi = 0 \quad \dots\dots\dots (6)$$

また、レデュースドポテンシャルとトータルポテン

シャルとの接合条件は、領域1と2の境界における磁束密度の法線成分連続性および、磁界の接線成分連続性から次式ようになる。

$$\mu_1 \frac{\partial \phi}{\partial n} - \mu_1 H_s \cdot n = \mu_2 \frac{\partial \psi}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (7)$$

$$\phi(p) - \int_{p_0}^p H_s \cdot dt = \psi(p) \quad \dots\dots\dots (8)$$

ここで、 μ_1, μ_2 はそれぞれ領域1、領域2の透磁率で、 n は境界における領域2からみた外向き単位法線ベクトル、 t は境界上の任意の単位接線ベクトルである。また、 p_0 は境界上の定点で、トータルポテンシャルの基準点であり、(8)式の左辺第2項は、 p_0 から境界に沿って H_s を線積分したものである。

〈2・2〉 2スカラポテンシャル法 BEM の定式化

続いて2スカラポテンシャル法のBEMによる定式化を示す⁽⁶⁾。

いま、導いた領域1、領域2におけるそれぞれの支配方程式に対応する積分方程式および接合条件を離散化し、マトリックスの形に表せば次のようになる。

$$[H_1]\{\phi\} - [G_1]\left\{\frac{\partial \phi}{\partial n}\right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

$$[H_2]\{\psi\} - [G_2]\left\{\frac{\partial \psi}{\partial n}\right\} = 0 \quad \dots\dots\dots (10)$$

$$\left\{\frac{\partial \phi}{\partial n}\right\} = \frac{\mu_2}{\mu_1} \left\{\frac{\partial \psi}{\partial n}\right\} + \{S_n\} \quad \dots\dots\dots (11)$$

$$\{\phi\} = \{\psi\} + \{S_t\} \quad \dots\dots\dots (12)$$

ここで、 $\{\phi\}, \{\psi\}, \{\partial \phi / \partial n\}, \{\partial \psi / \partial n\}$ は各境界要素の節点における ϕ, ψ およびその法線方向微係数の値を成分としてもつ列ベクトル、また $[H_1], [G_1], [H_2], [G_2]$ は影響係数マトリックスで、一定要素(零次要素)を用いた場合、その ij 成分は次式ようになる。

$$(H_1)_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(r_i, r') d\Gamma(r') - \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (13)$$

$$(G_1)_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(r_i, r') d\Gamma(r') \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$(H_2)_{ij} = \int_{\Gamma_j} q^*(r_i, r') d\Gamma(r') + \frac{1}{2} \delta_{ij} \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$(G_2)_{ij} = \int_{\Gamma_j} u^*(r_i, r') d\Gamma(r') \quad \dots\dots\dots (16)$$

ただし、

$$u^*(r, r') = \frac{1}{4\pi|r - r'|}, \quad q^* = \frac{\partial u^*}{\partial n} \quad \dots\dots\dots (17)$$

また、 δ_{ij} はクロネッカーのデルタ記号、 Γ_j は領域1と2の境界 Γ を要素分割したときの j 番目の要素を表し、 $\{S_n\}$ は各節点における H_s の法線方向成分の値を成分としてもつ列ベクトル、 $\{S_t\}$ は(8)式の右辺第2項に対応し、基準点 p_0 から各節点 p_i まで H_s を

線積分した値を成分にもつ列ベクトルである。

$$(S_n)_j = H_s(p_j) \cdot n(p_j) \dots\dots\dots (18)$$

$$(S_t)_j = \int_{p_0}^{p_j} H_s \cdot dt \dots\dots\dots (19)$$

更に、(11)、(12)式を用いて(9)式から $\{\phi\}$ 、 $\{\partial\phi/\partial n\}$ を消去すれば、最終的に解くべき連立方程式は次式のようになる。

$$\begin{bmatrix} [H_2] & -[G_2] \\ [H_1] & -\frac{\mu_2}{\mu_1}[G_1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\phi\} \\ \{\frac{\partial\phi}{\partial n}\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \{0\} \\ [G_1]\{S_n\} - [H_1]\{S_t\} \end{bmatrix} \dots\dots\dots (20)$$

3. 接合条件計算の改善法

前章の(19)式に示したように、2 スカラポテンシャル法では、接合条件を計算する際に、線積分が必要となり、またその被積分関数も(2)式のように体積分により求めることから、ここでもかなりの計算時間がかかってしまう。そこで本章では、線積分によらずにこの接合条件を求める改善法を提案する⁽³⁾⁽⁴⁾。

いま、領域1と領域2とで透磁率が等しい場合を考える。このとき、問題領域は単に自由空間に電流分布が存在する場合と本質的に同じとなるから、領域1では磁界は H_s のみとなり、 H_m は0とならねばならない。

ここで、領域1における H_m は、

$$H_m = -\nabla\phi = -\int_{\Gamma} \nabla u^* \frac{\partial\phi}{\partial n} d\Gamma + \int_{\Gamma} \nabla q^* \phi d\Gamma \dots\dots\dots (21)$$

と書けるから、これが0となるためには、境界上で $\{\phi\} = \{\partial\phi/\partial n\} = 0$ とならねばならない。そこでこの条件をさきの接合条件(11)、(12)式に代入すれば、

$$\left\{ \frac{\partial\phi}{\partial n} \right\} = -\{S_n\} \dots\dots\dots (22)$$

$$\{\phi\} = -\{S_t\} \dots\dots\dots (23)$$

更にこれらの式を(10)式に代入すれば最終的に次式が得られる。

$$[H_2]\{S_t\} = [G_2]\{S_n\} \dots\dots\dots (24)$$

ここで(19)式で点 p_0 によりポテンシャルの基準点をおいた代わりに、適当な境界節点上で S_t の値を、境界条件として与えて(24)式の連立方程式を解けば、線積分をせずに $\{S_t\}$ を求めることができる。

この(24)式を基にして $\{S_t\}$ を計算しようというのが、本論文で提案する2 スカラポテンシャル法の改善法である。なお、ここでは2体問題に限ったが、以上で述べた議論はそれ以上の多体問題に対しても適用で

きる。

ところで、この(24)式によって $\{S_t\}$ を計算する際には、実際には $[H_2]$ の逆行列を別に計算する必要はない。すなわち、まず(20)式の係数マトリックスをLU分解し、 $[H_2]$ の部分を用いて(24)式から $\{S_t\}$ を求め、更にこの $\{S_t\}$ を用いて(20)式の右辺を計算して、最終的な解を求めればよい。

4. 解析積分公式の導入

BEMでは、(13)～(16)式のような境界積分を計算する必要がある。通常はこれらの境界積分は、その被積分関数が複雑なため、ガウスの積分公式などの数値積分公式を用いて計算されるが、この場合には積分の精度を上げるためには積分のサンプル点数を増さねばならず、比例して計算時間も膨大に増していく。

また、ことに内点ポテンシャル値を計算する際には、内点の位置が境界に近くなると、積分が準特異となり、これを数値積分により精度良く計算するには、何らかの工夫が必要となる。

ところが要素が平面で、問題が本論文のようにラプラス形の場合には、この境界積分は実際に解析的に積分でき、武田らによって、ポテンシャルの補間が任意の次数の場合に対して、この境界積分を漸化的に求める公式が提案されている⁽⁶⁾。これを解析積分公式と呼ぶ。

例えば一定要素を用いた場合には、影響係数は次式のようになる。

$$\int_{\Gamma_j} q^*(r, r') d\Gamma(r') = \sum_{1-2-3} h_{12} \dots\dots\dots (25)$$

$$= \sum_{1-2-3} (-P_{12}) \dots\dots\dots (26)$$

$$\int_{\Gamma_j} u^*(r, r') d\Gamma(r') = \sum_{1-2-3} g_{12} \dots\dots\dots (27)$$

$$= \sum_{1-2-3} (d_{12} Q_{12} - z P_{12}) \dots\dots\dots (28)$$

ここで、1, 2は要素の1辺1-2を表し、 Σ はこれを要素 j のすべての辺についての和をとることを意味する。また P_{12} 、 Q_{12} は次式のようになる。

$$P_{12} = \frac{\Omega_{12}}{4\pi} \dots\dots\dots (29)$$

$$Q_{12} = \frac{1}{4\pi} \log \frac{r_2 + t_2}{r_1 + t_1} \dots\dots\dots (30)$$

ここで、 r_i はソース点から節点 i までの距離、 Ω_{12} はソース点から Δo_{12} を見る立体角で、その他の変数は、図1に示したようなそれぞれの節点に関連した値である。図1で、 $O-XYZ$ は通常の物理座標系、

図 1 解析積分公式における記号の説明⁽⁵⁾
Fig.1. Explanation of the quantities appears in analytical integral formula.

ξ - η - ζ 座標系は、要素 j が $\xi\eta$ 平面上に、ソース点 i が ζ 軸上となり、更に ξ 軸と考察中の節点 12 とが平行となるような座標系である（ただし、 ζ 軸は要素の外向き法線ベクトルと逆向き）。また、

t_a : 節点 a の ξ 座標

d_{ab} : 節点 ab の η 座標

r_a : ソース点 i と節点 a との距離

z : 節点 i の ζ 座標

のようになる。

このように、この解析積分公式によれば、影響係数の厳密な値を得ることができる。そこで本論文では、この解析積分公式を 2 スカラポテンシャル法に適用し、計算精度の向上を図った。

5. 計算結果と検討

〈5・1〉 電気学会モデル まず初めに、第 3 章で提案した接合条件計算の改善法および、第 4 章で述べた解析積分公式の基本的検討を行うために、図 2 に示すような簡単な電気学会モデルの結果について検討する。このモデルは、電気学会において三次元静磁界計算法検証用に制定されたものであり⁽⁶⁾、直方体の鉄心とそれを囲むコイルから成り立っている。

ここで、鉄心部の材質は線形、等方性で、比透磁率は 1,000 とした。また、コイルには 3,000 AT の起磁力を与えた。なお、計算は対称性を利用 1/8 領域のみについて行い、境界（すなわち鉄心）を 20 個の要素に分割した。またビオ・サバルの公式を計算する際に用いるコイルの要素分割数は 16 個で、その形状は 6 面体である。計算にはエンジニアリングワークステーション NEWS を用いた。

なお、以下の図中、“ガウス積分”とは、影響係数の計算においてガウスの積分公式を用い、積分の次数を自動決定し、更にマトリックス作成時において対角

図 2 電気学会三次元静磁界計算法検証用モデル

Fig.2. IEEJ inspection model for 3-D magnetostatic field calculation.

(a) 鉄心上表面付近の B_z
($X=0.0$ mm, $Y=0.0$ mm)

(b) 計算時間の比較

図 3 解析積分公式とガウスの積分公式との比較（電気学会モデル）

Fig.3. Comparison between analytical integral formula and Gaussian quadrature formula (IEEJ model).

成分の計算の際にサブ要素分割を行ったものである⁽⁹⁾。

最初に、ガウス積分と解析積分との比較を行う。

図 3 (a) は、内点を境界（鉄心上表面）に近づけたときの計算結果の比較で、横軸は境界からの距離で、

(a) 鉄心上表面の B_z
($Y=46.9\text{ mm}$, $Z=110.0\text{ mm}$)

(b) 計算時間の比較

図 4 通常法と改善法との比較
(電気学会モデル)

Fig. 4. Comparison between usual and improved two scalar potential method (IEEJ model).

対数でとってある。このように、ガウスの積分公式では、内点が境界に近づき、積分の準特異性が強くなると、積分次数をいくら上げても結果が発散してしまうことがわかる。しかし、解析積分によると、内点がどこにあっても安定した解を得ることができた。

(b)図にはその際に要した内点計算時の計算時間を示した。次数を4, 10, 20, 50点と固定したガウスの積分公式による場合は、ある程度正確な結果を得るためには、積分次数を上げなければならず、膨大な計算時間を要する。これに対し、解析積分によれば比較的計算時間を節約することができ、ガウスの積分公式で次数の自動決定を行ってむだな計算時間を省いた場合よりも計算時間は短くて済んだ。

次に、通常の2スカラポテンシャル法と接合条件計算改善法との比較を行った。ただし、以下の結果において、境界積分はすべて解析積分公式によって計算した。

図4(a)に計算結果の比較を示したが、通常法も改善法ともほぼ等しく実測値に近い結果が得られた。

次に計算時間であるが、(b)図に示すように、2ス

図 5 要素数による接合条件計算時間の変化
Fig. 5. Variation of the calculation time for interface conditions by increasing the number of the elements.

カラポテンシャル法では、計算時間の9割以上が、接合条件の計算にとられ、その他の計算にとられる時間は相対的には極めて少ない。これは $\{S_n\}$, $\{S_t\}$ のいずれの条件を計算する場合でも、 H_s を多数の点で計算することになるが、この H_s を計算するのに(2)式の体積分を計算しなければならないためである。ちなみに電気学会モデルの場合は、 H_s を1回計算するのに約9,700 ms かっており、これは解析積分によって係数マトリックスを作成するのとはほぼ同じ時間である。

接合条件の計算を改善することによって、この接合条件の計算時間を大幅に削減でき、トータル計算時間を約1/10程度にすることができた。

また図5には、要素数を増したときの、線積分(通常法)と改善法による $\{S_t\}$ の計算時間の変化の様子を示す。このように、要素数が約240,000個になると、改善法より線積分で計算するほうが速くなる。

これは、線積分による場合には計算時間 t_l は境界要素数を N_B とすれば、

$$t_l = a \cdot N_B \quad (31)$$

ここで、 a : 比例定数

となるが、改善法の場合は、(24)式で $\{S_t\}$ を計算する際に右辺の計算を行う必要が生じ計算時間 t_i は、

$$t_i = b \cdot N_B^2 \quad (32)$$

ここで、 b : 比例定数

となるためである。

しかし、ここでは境界要素数のみを考え、コイルの要素数は一定として考えている。ところが線積分による場合は、本来はコイルの要素数(N_c)も計算時間と関係し計算時間は、

$$t_l = a' \cdot N_B \cdot N_c \quad (33)$$

図 6 電磁石モデル(ギャップの長さ: 20 mm)
Fig. 6. Electromagnet model (gap length: 20 mm).

ここで、 a' : 比例定数
となる (改善法の場合は無関係)。よって、複雑なモデルを考える場合は、境界要素数のみが増し、コイルの分割数が少ないまといふことはなく、ほぼ $N_b \propto N_c$ となるので、上式は、

$$t_1 \approx a'' \cdot N_b^2 \quad (34)$$

ここで、 a'' : 比例定数
と考えてよく、このように線積分による方法、改善法とも本来は約 N_b^2 のオーダーとなり、また図 5 より明らかに、

$$a'' \approx a' \approx a > b \quad (35)$$

であるので、

$$t_1 > t_i \quad (36)$$

となり、線積分による方法よりも改善法のほうが要素数によらず速くなる。

〈5・2〉 電磁石モデルについて 次に、図 6 に示すような、短ギャップのある電磁石モデルを用いて、解析積分公式の実用性を検証した。このモデルは、図のように向かい合ったコの字形の二つの鉄心と、それに巻き付けた四つの励磁コイルから成り立っている。

ここで、鉄心部の材質は線形、等方性で、比透磁率は 5,000 とし、コイルには一つに対しそれぞれ 900 AT、全体で 3,600 AT の起磁力を与えた。また、この場合も対称性を利用し 1/8 領域のみについて計算を行い、境界を 536 個、コイルを 285 個の要素に分割した。このモデルの計算には、大型計算機 FACOM M-780 を用いた。

図 7 (a) に電磁石モデルにおける通常の 2 スカラポテンシャル法と接合条件の計算を改善する方法との計算結果の比較を示す。ここでは、積分はすべて解析積分によった。このように、解析積分公式を用いることによって、非常に短いギャップをもったモデルの場合でも精度の良い解が得られ、また通常法、改善法とも

電磁石モデル(ギャップ: 20 mm)計算結果

(a) ギャップ中の B_z
($Y=85.0$ mm, $Z=5.0$ mm)

(b) 計算時間の比較

図 7 通常法と改善法との比較(電磁石モデル)
Fig. 7. Comparison between usual and improved two scalar potential method (electromagnet model).

ほぼ等しく実測値に近い結果が得られた。

次に、この際に要した計算時間を (b) 図に示す。接合条件の計算法を改善することによって、接合条件の計算時間を大幅に削減し、トータルの計算時間を約 1/5 程度にすることができた。

6. ま と め

2 スカラポテンシャル法の接合条件計算を改善する方法を提案し、更に影響係数の計算に解析積分公式を適用し、次の結論を得た。

(1) 解析積分公式により内点が境界の近傍にあってもガウスの積分公式に比べ、比較的精度の良い結果を得ることができ、また計算時間も節約することができた。

(2) 2 スカラポテンシャル法の接合条件の計算法を改善する方法によって、計算時間を大幅に短縮することができた。

本研究を進める過程で貴重な御意見をいただいた名古屋大学 守末利弥教授に感謝申し上げます。

(平成 3 年 3 月 1 日受付)

文 献

- (1) C. A. Brebbia, J. C. F. Telles & L. C. Wrobel (田中訳): 境界要素法—理論と応用 (昭 59) 丸善
- (2) J. Simkin & C. W. Trowbridge: "On the use of the total scalar potential in numerical solution of field problems in electromagnetics", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 14, 23 (1979)
- (3) 沢・太田: 「2 スカラポテンシャル BEM における接合条件計算の一改善法」, 平 2 電気学会全大 No. 802
- (4) K. Sawa & K. Ohta: "A study on two scalar potentials BEM for 3D magnetostatic field calculation", *Boundary Elements XII*, Vol. 2 (1990)
- (5) 桑原・武田: 「高次要素を用いた境界要素法による高速・高精度 3 次元電界解析」, 第 7 回電気・電子工学への有限要素法の応用シンポジウム (日本シミュレーション学会) (昭 61)
- (6) W. M. Rucker & K. R. Richiter: "Three-dimensional magnetostatic field calculation using boundary element method", *IEEE Trans. Magetics*, MAG-24, No. 1 (1988)
- (7) C. F. Bryant, M. H. Roberts & C. W. Trowbridge: "Implementing a boundary integral method on transputer system", *ibid.*, MAG-26, 819 (1990)
- (8) 「三次元静磁界数値計算技術」, 電気学会技報 (II 部), No. 286
- (9) 結城・木須: 境界要素法による弾性解析 (昭 62) 培風館

太 田 金 幸 (正員)

昭和 41 年 6 月 13 日生。平成元年 3 月 慶応義塾大学理工学部電気工学科卒業。平成 3 年 3 月同大学大学院理工学研究科電気工学専攻修士課程修了。同年 4 月日本鋼管(株)入社, 現在に至る。在学中は主に境界要素法による磁界解析に関する研究に従事。

沢 孝一郎 (正員)

昭和 39 慶応義塾大学工学部電気工学科卒業。44 年同大学大学院博士課程単位取得退学。42 年同大学工学部助手, 60 年同助教授。現在, 弱電流用電気接点におけるアーク現象, 直流機の整流現象, FEM および BEM を用いた磁界解析などの研究に従事。工学博士。電子情報通信学会会員。