二媒質半無限領域における三次元電磁界問題への 有限要素・境界要素併用解析法の適用

正 員 小 貫 天 (早稲田大)

正 員 若 尾 真 治 (早稲田大)

Application of Hybrid Finite Element and Boundary Element Method to 3 D Electromagnetic Problems with Two Semi-infinite Regions

Takashi Onuki, Member, Shinji Wakao, Member (Waseda University)

The finite element method (FEM) and the boundary element method (BEM), which have entirely different features from each other, are useful for numerical analysis. The FEM suits for the analysis of such a complicated region which includes non-linear materials. However, it has some disadvantages in dealing with the infinitely extending fields. On the other hand, the BEM is useful for analyzing very large linear fields.

Taking account of the advantages in these methods, this paper describes the hybrid utilization of both methods (the hybrid FE-BE method) for the electromagnetic problems with two semi-infinite regions. Each region, which is regarded as a semi-sphere with the radius of infinite length, is constituted of a homogeneous material. The region near the center of two semi-spheres is complicated one, which may include conductive or non-linear materials. In the hybrid FE-BE method for such problems, the BEM is applied to the semi-infinite region and the FEM to the complicated region near the center. In applying the BEM to the semi-infinite region, the boundary element integration over the interface between two homogeneous materials has to be carried out as far as infinity. This paper concerns with the elimination of the infinite boundary integration.

キーワード：二媒質半無限領域，有限要素・境界要素併用法，三次元電磁界解析，鏡像の原理

1. ま え が き

本論文は，電気機器の設計や特性解明に対する応用を前提とした，三次元電磁界の有力な解析手法の開発を目的としている。現在，工学・技術の分野における数値解析手法のなかで，最も有力かつ普及しているものは有限要素法である。また，これに続いて境界要素法も最近採用が多く見られるようになってきた。両者の特徴を考察してみると，この二大解析手法は競合するというよりは，むしろ相補う関係にあるといえる。有限要素法は，考察領域の材質が不均一であったり，非線形性を有していても大きな障害にはならないが，考察領域が無限に広がっている場合には何らかの策を講

じなければならない。一方，境界要素法は領域材質が種々に変動する場合はその処理に手間を要するが，考察領域が無限遠にまで及んでいても苦にはならない。従って，各々の長所が共に発揮されるように両者を併用する手法が提案されるようになった⁽¹⁾⁽²⁾。この有限要素・境界要素併用法は，考察領域が無限遠まで及ぶ解析対象において，外側の均質無限領域は境界要素法に任せ，内側の複雑な部分に有限要素法を適用するというものである。

電磁気に関する諸現象は本質的に無限遠点までその効果が及ぶものであるが，実際の現象の解析にあたっては有限の範囲に解析領域を限定してほとんど差し支えない。しかし，場合によっては無限遠点まで十分に

考慮したい現象に直面する。例えば、高速鉄道を目した磁気浮上システムやリニアモータなどがそれである。図1はリニア誘導電動機のうち短二次片側式と呼ばれるものの原理図である。三相交流による移動磁界に基づく動作特性を説明するには、やはり広範囲の領域を解析・処理する必要がある。これらのモデルは全空間が性質の異なる媒質で二分され、その中心部に複雑な現象を呈する機器・装置が存在する。さきに挙げた例以外にも、大地上に高圧鉄塔がそびえ立つ場合や、実際には無限の寸法はもたないが、鉄板で構成された十分に広い床の上に小型の電気機器が設置されている場合などが考えられる。本論文では、このように異なる二媒質が有限領域から無限領域まで広がっているものを半無限領域と呼ぶことにする。一様な無限領域の解析には有効な境界要素法も、この半無限領域になると適用が難しくなった。

本論文では、この二媒質半無限領域の三次元電磁界問題を有限要素・境界要素併用法により解析する手法について考察する。さきにも述べたとおり、半無限領域を有する解析対象において、外側の均質無限領域は境界要素法に任せ、領域中央付近の複雑な部分に有限要素法を適用する。このような半無限二媒質問題に境界要素法をそのまま適用すると、無限遠点まで続く二媒質間の境界を積分しなければならず、この積分に関して何らかの近似を行う必要が出てくる。この難点を打開するため、電磁気学における鏡像の原理を境界要素法に適用し、この無限まで続く境界積分を消去する手法を提案する。本手法は更に有限要素法を境界要素法と組合せているため、半無限領域問題において、二媒質の中心部に渦電流や非線形性を考慮しなければならない複雑な領域が存在しても解析可能であるという特長を有する。

本手法は静電界、静磁界、渦電流問題などに適用できるが、本文中の定式化に関する論述は渦電流問題について進める。また検証の例題としては、理論解を有する基本的なモデルの解析を行い、本論文で提案する

図1 片側式リニア誘導電動機の原理図
Fig.1. Single-sided linear induction motor.

手法の妥当性を示す。

2. 考察対象モデル

本論文では、全空間を分ける二媒質の構成状況として、以下に示すような三つの場合を考察する。

A型：異なる媒質が平面を境にして全空間を二分している場合。十分に広く厚い鉄にマグネットが磁力で吊り下がっているようなケースがこれに相当する。

B型：異なる媒質が直交する二平面を境にして全空間を1対3に分割している場合。鉄でシールドされた部屋の壁際に電気機器が設置されているようなケースがこれに相当する。

C型：異なる媒質が直交する三平面を境にして全空間を1対7に分割している場合。これはB型の発展型として、同様に鉄でシールドされた部屋の一隅に電気機器が設置されているケースが考えられる。

以上の三つの場合において、電磁気現象のソースとなる機器・装置・励磁電流などが存在する部分を有限要素法により解析し、その外側の均質無限領域に境界要素法を適用する。中央近傍の複雑な振舞いを呈する部分(有限要素法領域)に比べて二媒質の均質空間(境界要素法領域)が十分に広い場合、この空間を半径が無限大の球とみなすことができる(図2)。

図2 二媒質半無限領域問題
Fig.2. Problems with two semi-infinite regions.

3. 境界要素法における無限境界積分項の処理法

本章では図3に示される基本的なモデルをもとに考察を進める。無限遠を半径 $R \rightarrow \infty$ の球面と仮定し、中央近傍の有限要素法領域を Ω_F 、それぞれ異なる媒質で形成される二つの開領域を Ω_α 、 Ω_β とする。また無限遠の球面境界を Γ_0 、二媒質 Ω_α 、 Ω_β 間の半無限境界を Γ_B とする。更に境界要素法領域 Ω_α 、 Ω_β と有限要素法領域 Ω_F との境界をそれぞれ $\Gamma_{F\alpha}$ 、 $\Gamma_{F\beta}$ とし、まとめて Γ_F と表す。以下、境界 Γ_0 、 Γ_B に対する境界積分について検討する。

本論文では、境界要素法で解析する領域に励磁電流は含まれない。従って、この境界要素法領域における場の支配方程式および構成関係式は以下になる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = 0 \dots\dots\dots (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \dots\dots\dots (2)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \dots\dots\dots (3)$$

ただし、 $\mathbf{H}$: 磁界の強さ、 $\mathbf{B}$: 磁束密度、 μ : 透磁率

(1)式より磁気スカラーポテンシャル ψ を(4)式のように定義することができる。

$$\mathbf{H} = -\nabla \psi \dots\dots\dots (4)$$

透磁率 μ の線形性を仮定すれば、(2)~(4)式より

$$\nabla^2 \psi = 0 \dots\dots\dots (5)$$

この(5)式に対する境界積分方程式は、よく知られているように以下の式で表される⁽³⁾。

$$\begin{aligned} \frac{C_P}{4\pi} \psi_P = & \int_{\Gamma_0} u^*(r) \frac{\partial \psi_Q}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_0} q^*(r) \psi_Q d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_B} u^*(r) \frac{\partial \psi_Q}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_B} q^*(r) \psi_Q d\Gamma \\ & + \int_{\Gamma_F} u^*(r) \frac{\partial \psi_Q}{\partial n} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} q^*(r) \psi_Q d\Gamma \\ & \dots\dots\dots (6) \end{aligned}$$

図3 考察領域の原理的配置図
Fig. 3. Investigated problem.

ただし、 C_P は考察点から対象領域を見込む立体角、 $\mathbf{n}$ は境界 Γ 上の単位法線ベクトル、 $u^*(r)$ は Laplace 方程式の基本解 $(=1/4\pi r)$ 、 $q^*(r)$ は $u^*(r)$ の $\mathbf{n}$ 方向微分 $(=\partial u^*/\partial n)$ である。

ここで ψ 、 u^* はただか距離 r の逆数の次数 $O(r^{-1})$ しかもたず、その結果、よく知られているように無限境界 Γ_0 に関する(6)式の境界積分の値は0となる。

次に、二媒質間の半無限境界 Γ_B に対する境界積分について考察する。 Γ_B 上における境界積分は、有限要素法領域に隣接するところから無限遠まで続き、この全区間を離散化し積分することは不可能である。そこで、 Γ_B 上の境界積分項を消去を試みる。

いま考察点 P と境界 Γ_B に関して P の鏡像となる点 $\bar{P}$ を考え、点 P が含まれる領域を Ω_α 、点 $\bar{P}$ が含まれる領域を Ω_β とする(図3)。そして点 P から領域 Ω_α および Ω_β を見た場合、点 $\bar{P}$ から領域 Ω_α および Ω_β を見た場合の各々について境界積分方程式を作成する。

記号の例として、点 P から領域 Ω_α を考察する場合の境界 Γ_B 上の ψ_α 、 $\partial \psi_\alpha / \partial n_\alpha$ に対する影響関数を、それぞれ $u^*(P_\alpha)$ 、 $q^*(P_\alpha)$ と書くならば、上述した四つのケースにおける影響関数 u^* 、 q^* には以下のような関係がある。

$$u^*(P_\alpha) = u^*(\bar{P}_\alpha) = u^*(P_\beta) = u^*(\bar{P}_\beta) \dots\dots\dots (7)$$

$$q^*(P_\alpha) = -q^*(\bar{P}_\alpha) = -q^*(P_\beta) = q^*(\bar{P}_\beta) \dots\dots\dots (8)$$

またスカラーポテンシャルの連続性と磁束密度の法線方向成分の連続性より、領域 Ω_α の物理量 ψ_α 、 $\partial \psi_\alpha / \partial n_\alpha$ と領域 Ω_β の物理量 ψ_β 、 $\partial \psi_\beta / \partial n_\beta$ は境界 Γ_B 上で次の関係にある。

$$\psi_\alpha = \psi_\beta \dots\dots\dots (9)$$

$$\mu_\alpha \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial n_\alpha} = -\mu_\beta \frac{\partial \psi_\beta}{\partial n_\beta} \dots\dots\dots (10)$$

次に点 P から見た領域 Ω_α の境界積分方程式に重み係数 m_α 、点 P から見た領域 Ω_β の境界積分方程式に重み係数 m_β 、点 $\bar{P}$ から見た領域 Ω_α の境界積分方程式に重み係数 $\bar{m}_\alpha$ 、点 $\bar{P}$ から見た領域 Ω_β の境界積分方程式に重み係数 $\bar{m}_\beta$ をそれぞれ乗じて、これら四つの境界積分方程式を加え合せる。このとき(7)~(10)式を考慮すれば、(6)式の境界積分方程式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
& 1/4\pi(m_a C_F \psi_P + \bar{m}_\beta C_{\bar{F}} \psi_{\bar{P}}) \\
& = +m_a \left\{ \int_{\Gamma_F} u^*(P_a) \frac{\partial \psi_a}{\partial n_a} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} q^*(P_a) \psi_a d\Gamma \right\} \\
& + m_\beta \left\{ \int_{\Gamma_F} u^*(P_\beta) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial n_\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} q^*(P_\beta) \psi_\beta d\Gamma \right\} \\
& + \bar{m}_a \left\{ \int_{\Gamma_F} u^*(\bar{P}_a) \frac{\partial \psi_a}{\partial n_a} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} q^*(\bar{P}_a) \psi_a d\Gamma \right\} \\
& + \bar{m}_\beta \left\{ \int_{\Gamma_F} u^*(\bar{P}_\beta) \frac{\partial \psi_\beta}{\partial n_\beta} d\Gamma - \int_{\Gamma_F} q^*(\bar{P}_\beta) \psi_\beta d\Gamma \right\} \\
& + \int_{\Gamma_B} \left(m_a - \frac{\mu_a}{\mu_\beta} m_\beta + \bar{m}_a - \frac{\mu_a}{\mu_\beta} \bar{m}_\beta \right) \\
& \times u^*(P_a) \frac{\partial \psi_a}{\partial n_a} d\Gamma \\
& - \int_{\Gamma_B} (m_a - m_\beta - \bar{m}_a + \bar{m}_\beta) q^*(P_a) \psi_a d\Gamma \quad \dots\dots\dots (11)
\end{aligned}$$

従って以下の条件が成立するとき、半無限境界 Γ_B 上の $\partial\psi/\partial n$ および ψ に関する境界積分項を消去することができる。

$$m_a - \frac{\mu_a}{\mu_\beta} m_\beta + \bar{m}_a - \frac{\mu_a}{\mu_\beta} \bar{m}_\beta = 0 \quad \dots\dots\dots (12)$$

$$m_a - m_\beta - \bar{m}_a + \bar{m}_\beta = 0 \quad \dots\dots\dots (13)$$

つまり、(12)、(13)式を満足するように重み係数 $m_a, m_\beta, \bar{m}_a, \bar{m}_\beta$ を選定し、上述した四つの境界積分方程式を組合せることが、半無限境界 Γ_B 上の境界積分項を消去する基本原理である。

A型～C型の各場合への具体的な適用法については、次章で詳細に述べる。

4. 二媒質半無限領域問題の定式化

<4・1> A型における境界要素法の定式化 A型の二媒質半無限領域を図4に示す。異なる媒質で形成される二つの開領域を改めて Ω_1, Ω_2 と記し、有限要素

(a) (b)

図4 二媒質半無限領域(A型)

Fig. 4. Two semi-infinite regions (type A).

法領域 Ω_F を半無限境界面 Γ_B に関して対称となるように設置する(図4(a))。このようにすれば、境界 Γ_F 上にある考察点 P の鏡像 $\bar{P}$ も常に Γ_F 上に存在することになり、点 $\bar{P}$ におけるポテンシャル $\psi_{\bar{P}}$ は新たな未知数にならない。重み係数4個に対して条件式は(12)、(13)式の二つであるから、重み係数の選定法は何通りか考えられる。ここではまず、考察点 P から自分が含まれている領域を見た場合の境界積分方程式を基準とし

$$m_a = 1 \quad \dots\dots\dots (14)$$

とする。そして残り三つの重み係数 $m_\beta, \bar{m}_a, \bar{m}_\beta$ のうち、一つに適切な既定値を与える。A型の場合は、 $\bar{m}_\beta = 0$ とするのが特に有効である。その理由としては、(11)式左辺にある $\psi_{\bar{P}}$ の項が消滅するため、点 P の鏡像点 $\bar{P}$ におけるポテンシャルを考慮する必要がなくなるからである。この結果、境界 Γ_{F1} と Γ_{F2} は二媒質間の半無限境界面 Γ_B に対して対称である必要がなくなり、図4(b)に示されるように片方の媒質中で有限要素法領域を縮小することもできる。従ってA型の場合は、以下に示す重み係数の組合せを採用する。

$$\left. \begin{aligned} m_a &= 1 \\ m_\beta &= \frac{2\mu_\beta}{\mu_a + \mu_\beta} \\ \bar{m}_a &= \frac{\mu_a - \mu_\beta}{\mu_a + \mu_\beta} \\ \bar{m}_\beta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (15)$$

ただし、 a, β は考察点 P が図4の境界 Γ_{F1}, Γ_{F2} を移動するのに応じて1または2の値をとる。

(15)式を用いて境界要素法により得られるマトリックスは、最終的に以下ようになる。

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} H_1 + \bar{m}_1 \bar{H}_1 & m_2 H_2 \\ m_1 H_1 & H_2 + \bar{m}_2 \bar{H}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\
& = \begin{bmatrix} G_1 + \bar{m}_1 \bar{G}_1 & m_2 G_2 \\ m_1 G_1 & G_2 + \bar{m}_2 \bar{G}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial n_2} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (16)
\end{aligned}$$

ここで、マトリックス上段は点 P が境界 Γ_{F1} 上にあるとき、下段は点 P が境界 Γ_{F2} 上にあるときに対応している。また G, H はそれぞれ(11)式の u^*, q^* の境界積分によって得られる係数である。

<4・2> B型における境界要素法の定式化 B型の二媒質半無限領域を図5に示す。全空間の1/4を占める領域を Ω_1 、もう一方の領域を Ω_2 と記す。B型では二媒質の境界面が90度に折れ曲がっているため、

図 5 二媒質半無限領域(B型)

Fig. 5. Two semi-infinite regions (type B).

点 P の境界面に対する対称点 $\bar{P}$ は二つ存在する。折れ曲がり点を境にこの境界面を X 面, Y 面と名付けるならば[図 5(a)], 点 P の X 面に対する対称点 $\bar{P}_X$ は, 無限境界に関する積分のうち X 面については前節と同様の手法で消去することができるが, Y 面については新たに境界積分項を生み出してしまう。この問題を打開するため, 更に点 $\bar{P}_X$ の Y 面に対する対称点 $\bar{P}'$ を導入しなければならない。また点 $\bar{P}_X$ と点 $\bar{P}'$ から見た無限境界 Γ_B 上の積分方程式の関係は, 点 P と点 $\bar{P}_X$ の関係と全く同じである。従って, 点 $\bar{P}'$ の領域 Ω および Ω_2 に対する境界積分方程式には, 点 P と同じ重み係数 m_1, m_2 を乗ずればよい。これは(12), (13)式の関係を用いれば容易に確認することができる。

これらの議論は, 点 P の Y 面に対する対称点 $\bar{P}_Y$ についても全く同様である。

以上の内容から B 型の場合は X 面, Y 面いずれにも対称となるような直方体領域に有限要素法領域を設定し, 点 $P, \bar{P}, \bar{P}'$ すべてが境界 Γ_F 上にあるようにする。

ここでは, 対称性を有する境界 Γ_F 全面にわたって点 P を動かす際, 組立てられる境界積分方程式が重複しないように注意が必要である。そこで点 P が各対称領域を移動するのに応じて, 重み係数の組合せを以下のように変化させる。(17)~(20)式はそれぞれ点 P が第 1, 第 2, 第 3, 第 4 象限にある場合の重み係数に対応している。ただし, (18)式と(20)式は交換することができる。

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 1 \\ m_2 &= \frac{2\mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ \bar{m}_1 &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_1 + \mu_2} \\ \bar{m}_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (17)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{\mu_1 - \mu_2}{2\mu_2} \\ m_2 &= 0 \\ \bar{m}_1 &= \frac{\mu_1 + \mu_2}{2\mu_2} \\ \bar{m}_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (18)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \\ m_2 &= 1 \\ \bar{m}_1 &= 0 \\ \bar{m}_2 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (19)$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= 0 \\ m_2 &= \frac{\mu_2 - \mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \\ \bar{m}_1 &= \frac{2\mu_1}{\mu_1 + \mu_2} \\ \bar{m}_2 &= 1 \end{aligned} \right\} \dots\dots\dots (20)$$

(17)~(20)式の重み係数を用いて境界積分方程式を組立てると, 最終的に以下のマトリックスが得られる。

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m_1(H_1 + \bar{H}_1') + \bar{m}_1(\bar{H}_{1X} + \bar{H}_{1Y}) \\ m_2(H_2 + \bar{H}_2') + \bar{m}_2(\bar{H}_{2X} + \bar{H}_{2Y}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} m_1(G_1 + \bar{G}_1') + \bar{m}_1(\bar{G}_{1X} + \bar{G}_{1Y}) \\ m_2(G_2 + \bar{G}_2') + \bar{m}_2(\bar{G}_{2X} + \bar{G}_{2Y}) \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial \psi_1}{\partial n_1} \\ \frac{\partial \psi_2}{\partial n_2} \end{bmatrix} \\ & \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

ただし, G, H はそれぞれ(11)式の u^*, q^* の境界積分によって得られる係数である。

〈4・3〉 C 型における境界要素法の定式化 B 型のときと同様, 二媒質が接する境界面すべてに対称となるように有限要素法領域を立方体にとる。 C 型では考察点 P の境界面に対する対称点 $\bar{P}$ は三つあり, 更に点 $\bar{P}$ の対称点 $\bar{P}'$ が三つ, そして点 $\bar{P}'$ の対称点 $\bar{P}''$ が一つ存在する。これら計八つの点からの境界積分方程式を組立てなければ, 半無限境界 Γ_B の境界積分項を消去することはできない。以後の処理は B 型と全く同様に行うことができる。 C 型では点 P と $\bar{P}'$ および点 $\bar{P}$ と $\bar{P}''$ に関して, それぞれの境界積分方程式に乗ずる重み係数が同じになる。あとは境界積分方程式の重複を避けるため, (12), (13)式をもとに 8 通りの重み係数の組合せを作成し, 点 P が各対称領域を移動するのに応じて使い分けられよい。この場合, 四つの重み係数 $m_1, m_2, \bar{m}_1, \bar{m}_2$ のうち, いずれか一つを 0 としたもの 4 通り[(17)~(20)式], および

ずれかを二つを等しいとした6通り中の重複しない4通りを選定する。

〈4・4〉 有限要素法の定式化 領域 Ω_f には、磁気現象の源となる機器・装置・励磁電流 J_0 以外に、渦電流 J_e が発生する導体や非線形性を有する磁性体なども含まれていると仮定する。この領域における支配方程式および構成関係式は以下のようになる。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_e + \mathbf{J}_0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \dots\dots\dots (23)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$\mathbf{J}_e = \sigma \mathbf{E} \quad \dots\dots\dots (26)$$

また、渦電流 J_e に関して次の関係がある。

$$\nabla \cdot \mathbf{J}_e = 0 \quad \dots\dots\dots (27)$$

有限要素法の代表的な定式化としては、磁気ベクトルポテンシャル $\mathbf{A}$ と電気スカラーポテンシャル ϕ を用いる $\mathbf{A}$ - ϕ 法や、電流ベクトルポテンシャル $\mathbf{T}$ と磁気スカラーポテンシャル Ω を用いる $\mathbf{T}$ - Ω 法などが挙げられる⁽⁴⁾。本論文では均質無限領域に磁気スカラーポテンシャルを考察物理量とする境界要素法を適用しているため、スカラーポテンシャルとの接合に都合の良い $\mathbf{T}$ - Ω 法を本領域の定式化として採用する⁽⁶⁾。上の(22)～(27)式より、よく知られている以下の基礎方程式が導かれる。

$$\nabla \times \frac{1}{\sigma} (\nabla \times \mathbf{T}_e) = -\frac{\partial}{\partial t} \{ \mu (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) \} \quad \dots\dots\dots (28)$$

$$\nabla \cdot \mu (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) = 0 \quad \dots\dots\dots (29)$$

(28), (29)式それぞれに、辺要素で表現されるベクトル補間関数 $\mathbf{W}$ および節点要素で表現されるスカラー補間関数 N を用いてガラーキン法を適用すると、残差方程式として最終的に以下の二式が得られる。

$$\int_V \frac{1}{\sigma} \nabla \times \mathbf{T}_e \cdot \nabla \times \mathbf{W} dV + \int_V \mathbf{W} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mu (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) dV = 0 \quad \dots\dots (30)$$

$$\int_V \nabla N \cdot \mu (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) dV - \int_r N \mu (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) \cdot \mathbf{n} d\Gamma = 0 \quad \dots\dots (31)$$

〈4・5〉 境界要素法領域と有限要素法領域の接合条件 境界要素法領域と有限要素法領域間の接合条件としては、ポテンシャルの連続性より以下の関係がある。

$$\psi_{bem} = \Omega_{fem} \quad \dots\dots\dots (32)$$

更に、磁束密度 $\mathbf{B}$ の法線方向成分が境界上で連続であることより

$$\mu_{bem} \frac{\partial \psi_{bem}}{\partial n} = \mu_{fem} (\mathbf{T}_e + \mathbf{T}_0 - \nabla \Omega) \cdot \mathbf{n} \quad \dots\dots (33)$$

本論文では境界要素において、 ψ に対しては一次要素を、その法線方向微分 $\partial \psi / \partial n$ に対しては零次(一定)要素を適用する 0-1 次混合離散化法⁽⁶⁾を採用しているため、上記の境界条件を極めて容易に満足させることが可能である。

5. 数値解析例

本論文で提案する手法を用いて具体的なモデルの解析を行い、その妥当性を検証する。本論文では考察対象を $A \sim C$ 型に分類して手法の定式化を行ったが、半無限境界上の境界積分項を消去する基本原理[(12)式, (13)式]はすべてに共通であるため、どれか一つのケースについて検証すれば十分である。また渦電流問題や非線形問題に対する有限要素法の有効性は自明であるから⁽⁷⁾、今回は理論解の存在する基本的なモデルを検証用例題として採用する。

〈5・1〉 解析モデル 図6に示すモデルは、鉄と空気が平面を境に全空間を二分し空気中にコイル状の直流励磁電流が存在するもので、 A 型の問題に相当する。鉄の比透磁率は3,000で線形とし、励磁コイルの起磁力は1,000 Aである。本例題は励磁電流を磁気モーメントとみなすことで容易に理論解を得ることができる⁽⁸⁾⁽⁹⁾。今回は $(y, z) = (5.0, 25.0)$ mm 一定 (Line 1: 空気領域) および $(y, z) = (5.0, -15.0)$ mm 一定 (Line 2: 鉄領域) の二つの線上で磁束密度 $\mathbf{B}$ の理論値と計算値を比較した。

〈5・2〉 計算結果 以上のようなモデルについて、本論文で提案した手法を用いて解析を行う。図6の破線で囲まれた領域に有限要素法を、外側の半無限領域に境界要素法を適用した。計算時の諸条件は以下のとおりである。

図6 検証用三次元モデル
Fig. 6. Three-dimensional model.

表 1 磁束密度 B の計算値(Line 1)[$10^{-4} T$]
Table 1. Calculated value of the magnetic flux density (Line 1).

X [mm]	B _x		B _y		B _z	
	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値
0.0	0.0	0.0	22.3	20.9	208.1	204.0
4.2	18.6	17.2	22.3	20.7	207.4	203.4
8.4	38.5	36.1	22.2	20.1	204.8	201.2
12.6	61.0	58.0	22.1	19.1	199.0	195.7
16.8	86.4	82.9	21.8	17.6	187.0	183.9
21.0	112.7	108.8	21.1	15.8	164.1	162.0
25.2	132.6	129.0	19.4	13.7	127.9	128.3
29.4	137.5	136.3	16.8	11.5	83.5	87.0
33.6	125.5	128.3	13.6	9.4	42.3	47.6
37.8	103.2	110.2	10.4	7.5	13.3	17.4
42.0	80.0	87.9	7.7	5.9	-2.5	-1.7
46.2	60.9	67.4	5.6	4.6	-9.6	-10.3
50.4	46.6	51.9	4.1	3.5	-12.2	-13.4
54.6	36.0	40.4	3.0	2.7	-12.7	-14.1
58.8	28.1	31.7	2.2	2.1	-12.3	-13.7
63.0	22.3	25.2	1.7	1.6	-11.5	-12.8
67.2	17.8	20.2	1.3	1.3	-10.5	-11.8
70.0	15.4	17.5	1.1	1.1	-9.9	-11.1

表 2 磁束密度 B の計算値(Line 2)[$10^{-4} T$]
Table 2. Calculated value of the magnetic flux density (Line 2).

X [mm]	B _x		B _y		B _z	
	理論値	計算値	理論値	計算値	理論値	計算値
0.0	0.0	0.0	-23.2	-22.1	189.5	187.7
4.2	-19.4	-18.3	-23.1	-21.9	187.7	186.1
8.4	-38.9	-37.0	-22.8	-21.3	182.3	181.1
12.6	-58.4	-55.9	-22.2	-20.2	172.3	171.7
16.8	-77.0	-73.8	-21.2	-18.7	156.8	157.2
21.0	-92.6	-89.6	-19.8	-16.8	135.4	137.4
25.2	-102.7	-100.8	-17.8	-14.8	108.9	112.4
29.4	-105.3	-104.7	-15.4	-12.6	80.1	85.1
33.6	-100.4	-102.6	-12.8	-10.4	52.7	59.4
37.8	-89.7	-95.4	-10.2	-8.4	29.9	35.1
42.0	-76.2	-82.7	-7.9	-6.7	13.1	16.2
46.2	-62.5	-68.9	-6.0	-5.2	2.0	3.4
50.4	-50.2	-55.8	-4.5	-4.0	-4.5	-4.3
54.6	-39.9	-44.6	-3.3	-3.1	-8.0	-8.4
58.8	-31.6	-35.6	-2.5	-2.4	-9.5	-10.2
63.0	-25.1	-28.4	-1.9	-1.8	-9.9	-10.8
67.2	-20.1	-22.8	-1.4	-1.4	-9.7	-10.7
70.0	-17.3	-19.7	-1.2	-1.2	-9.3	-10.3

分割方法：破線で囲まれた領域を $16 \times 16 \times 6$ に不均等分割

有限要素：直方体 1 次要素 1,536 個

節点数 2,023 個

境界要素：長方形 1 次要素 896 個

境界上の節点数 898 個

マトリックス：2,919 $\times$ 2,919

Line 1 および Line 2 における磁束密度 B を上記の条件で計算し、理論値と共に表 1, 表 2 に示す。また理論値と計算値の比較を図 7 に示す。本論文で提案した手法の計算値は理論値と定量的に大変よく一致しており、高精度の解が得られていることがわかる。また、空気領域中の磁束密度分布の様子を図 8 に示す。定性的にも妥当な結果が得られており、図 7 と併せて本手法の基本原則に問題のないことが確認できる。

(a) Line 1 ($Z=25$ mm)

(b) Line 2 ($Z=-15$ mm)

図 7 計算値と理論値の比較
Fig. 7. Comparison between calculated and theoretical values.

図 8 $Y=0$ 平面における磁束密度の分布
Fig. 8. Distribution of magnetic flux density in $y=0$ plane.

なお、今回の計算では SUN SPARCstation 2(28.5 MIPS, 4.2 Mflops)を使用し、連立一次方程式の解法に ILUCGS 法を用いた結果、CPU 時間は約 91 分であった。

6. む す び

本論文では、二媒質半無限境界を有する三次元電磁界問題の解析手法として、電磁気学における鏡像の原理を組み入れた有限要素・境界要素併用法を提案した。また、本手法を用いて理論解を有するモデルの解析を行い、手法の基本原理の妥当性と有効性を確認した。本手法の特長および得られた結果をまとめると以下のようになる。

(1) 本手法は、併用法において鏡像の原理を境界要素法に組入れ、境界要素法の計算過程に一切の近似を入れずに、広大な二媒質間の半無限境界を厳密に処理することを可能とした。特に、鏡像関係を利用して境界積分方程式を作成する際、方程式間の従属性を排除する過程を明らかにした。

(2) 本手法は有限要素法を併用しているため、半無限領域問題において渦電流や非線形性などを考慮しなければならない複雑な領域が存在しても解析が可能である。また有限要素法領域中では、半無限境界が平面でなく湾曲していても差し支えない(図3)。

(3) 本手法は、定式化において均質な開領域に境界要素法を適用している。従って境界要素法計算の特長として、領域境界上の未知量を一度求めてしまえば、内点計算により均質領域中の任意の考察点における磁束密度 B を連続的な物理量として直接算出できる。また境界要素法の考察物理量には磁気スカラーポテンシャル ϕ を採用しており、内点計算をするに際し ϕ の簡単な微分式を用いて B を直接的に導出できるため、基本モデルの解析を行った結果高い解析精度を達成できた。なお、磁気ベクトルポテンシャル A を用いた場合は、三次元問題に対し三成分の計算を必要とし、数値計算上得策ではない。

(4) 有限要素法と境界要素法の併用法では、両手法の接合境界において境界条件の適合を精度良く行うことが重要である。本手法では有限要素法にスカラーポテンシャルとの接合に都合の良い $T-\Omega$ 法を採用し、更に ϕ を変数とする境界要素法に 0-1 次混合離散化法を用いているため、有限要素法と境界要素法を極めて容易に接合することができる。

(平成4年3月3日受付)

文 献

- (1) M. V. K. Chari & P. P. Silvester: Finite Elements in Electrical and Magnetic Field Problems, Chap. 9 (1980)
- (2) O. C. Zienkiewicz: The Finite Element Method (Third edition), Chap. 23, (1977) McGraw-Hill
- (3) C. A. Brebbia & S. Walker: Boundary Element Techniques in Engineering, Chap. 10 (1980) Butterworth & Co
- (4) T. Nakata, N. Takahashi, K. Fujiwara & K. Muramatsu: "Investigation of effectiveness of various methods with different unknown variables for 3-D eddy current analysis", *IEEE Trans. Magnetics*, **26**, 442 (1990)
- (5) 小貫・若尾: 「スカラーポテンシャルを未知数とする有限要素・境界要素併用法による三次元電磁界解析」, 電学論 A, **112**, 346 (平4-5)
- (6) T. Onuki: "Hybrid finite element and boundary element method applied to electromagnetic problems", *IEEE Trans. Magnetics*, **26**, 582 (1990)
- (7) 中田・高橋・藤原・岡田: 「 $T-\Omega$ 法を用いた非線形渦電流問題の解析法」, 電気学会静止器回転機合同研資, SA-86-33, RM-86-40 (昭61)
- (8) Julius Adams Stratton: Electromagnetic Theory, Chap. 4 Sec. 7 (1941) McGraw-Hill
- (9) 例えば、後藤・山崎: 電磁気学演習, p. 213 (昭63) 共立出版

小 貫 天 (正員)

昭和4年7月31日生。26年3月早稲田大学第一理工学部電気工学科卒業。同年4月通産省工業技術院電気試験所入所。29年4月早稲田大学理工学部に奉職。43年4月同大学理工学部教授、現在、同大学理工学部研究所所長。工学博士。39, 40年度電気学会本部・東京支部評議員。62年電気学会論文賞受賞。IEEE 会員。

若 尾 真 治 (正員)

昭和40年7月7日生。平成3年3月早稲田大学大学院理工学研究科修士課程修了。同年4月同大学大学院博士後期課程入学、現在に至る。主として、電磁界の数値解析に関する研究に従事。IEEE, 日本シミュレーション学会会員。