GTD によるストリップ回折界の精度評価

正員 白井 宏 (中央大)

非会員 宮 賢一 (中央大)

Accuracy Check of the GTD Diffraction Field by a Conducting Strip

Hiroshi Shirai, Member, Ken'ichi Miya, Non-member (Chuo University)

Electromagnetic plane wave diffraction by a perfectly conducting strip has been analyzed for both H and E polarizations by utilizing high frequency asymptotic method. Formulation is based on the Geometrical Theory of Diffraction (GTD), by which simple physical interpretations can be given and higher order edge diffraction effects are easily included.

In order to clarify the deficiency of the GTD and to correct it, Equivalent Source Method (ESM) has also introduced here. Asymptotic expansion form of the total scattering cross section is derived analytically, and the result is found to agree with those by other methods. Then numerical calculation of the total scattering cross section, as well as far field scattering patterns are made for various strip width, and these results are compared with the exact solutions. The agreement seems to be excellent even for small strip width.

キーワード：導体ストリップ，幾何光学的回折理論 (GTD)，等価波源法 (ESM)，漸近解法，散乱幅

1. ま え が き

はじめに，本論文は平成3年12月に行われた電気学会電磁界理論研究専門委員会における発表 (EMT-91-146) の内容に一部修正，加筆したものである。導体ストリップによる電磁波の散乱問題は，古くから多くの学者によって研究されてきた問題の一つである。今回の特集はこのストリップによる散乱問題の解析がテーマであり，それぞれの解析手法の専門家よりの寄稿が期待される。従って，それぞれの解析法に関連した過去の研究およびその背景についてはそれぞれの分野の方々におまかせし，本論文では幾何光学的回折理論 (Geometrical Theory of Diffraction; GTD) を中心とした高周波漸近解法に関連した分野に話を限ることにする。

1950年代に Keller によって提案された GTD は，それまでの幾何光学の考え方を拡張し回折波に対しても幾何光学的な解釈を取入れた。それ以来，Keller らによって GTD 関連の多くの適用例が報告されている。GTD は波長に比べて比較的大きな物体による電

磁波の散乱解析に有効な方法として広く使用されてきた^{(1)~(3)}。本論文で扱うストリップ散乱体と補対の関係にあるスクリーンのスリット開口による電磁波の透過問題も既に1956年に Karp らによって GTD の適用が報告され，その後も発表が続いている^{(4)~(7)}。導体ストリップによる電磁波散乱問題の比較的古い成果は，文献(7)に詳しくまとめられている。その後 Yu らは高次エッジ回折波の寄与まで含めて GTD で定式化して得た H 偏波の散乱界を Mathieu 関数を用いて表した厳密解と詳細に比較検討している⁽⁸⁾。彼らは多重回折の効果を含めると，ストリップ幅が 0.125λ 以上であればまずまずの，また 0.55λ 以上であれば十分な精度が得られると報告している。最近，小林は導体ストリップによる散乱問題に対して Wiener-Hopf (W-H) 法による解析結果と文献(7)の GTD による結果を比較し，GTD の結果は厳密解の漸近展開と一致しないと報告している⁽⁹⁾。

本論文の主な目的は，(i) GTD を適用して求めた文献(7)に示された導体ストリップによる散乱界の結果はミスプリントであり，正しい結果は小林の示した

結果と完全に一致することを示すこと、(ii)GTDを修正した高次の回折波を含む精密な表現を用いることにより導出した導体ストリップの全散乱幅の漸近解は別解法で現在までに求められている展開項まで完全に一致し、新たな高次項を導出したことである。

本論文では、続く第2章でGTDによる回折界の導出法をまとめ、第3章でGTDの欠点の改善の一方法として等価波源法について述べる。第4章では全散乱幅の漸近展開をGTDを用いて解析的に求め、更にGTDでは求めることができない高次多重回折波の補正項を含めた展開を導出している。また、第5章では遠方散乱パターンの数値計算例を報告し、第6章では結論を述べる。また、以下の解析においては時間因子は $e^{-i\omega t}$ を仮定する。

2. GTDによる散乱界の定式化

図1に示すように幅 $d(=2w)$ の無限に薄い導体ストリップ板が z 軸と平行に置かれ、平面電磁波が x 軸と角度 θ_0 で入射している場合を考える*1。このとき、入射波 u^i ：

$$u^i = \exp(-ikx \cos \theta_0 - iky \sin \theta_0) \dots (1)$$

は磁界が入射面に垂直な H 偏波に対しては H_z を、また電界が入射面に垂直な E 偏波に対しては E_z を表すものとする。

GTDを用いて散乱界を構成する場合、「回折は局所現象である」という考えに基づき、ストリップ導体の表面、エッジによってそれぞれ反射、回折を受けたいろいろな光線を求めそれらの和をとる。以下にそれらの求め方を別々に概説する。

図1 導体ストリップによる回折
Fig. 1. Diffraction by a strip.

*1 以下の議論では入射角度 θ_0 を $(0 \leq \theta_0 \leq \pi)$ の範囲に限定するが散乱体の対称性より、何ら一般性を失わない。

〈2・1〉 反射波 u^r 完全導体の表面で生じる反射波の寄与はスネルの反射則を満足するように決定される。入射波と散乱体とのなす角度で決められた光学的な影との境界(Shadow Boundary: SB)で区切られた反射波の存在領域において散乱合成界に反射波 u^r ：

$$u^r = \tau \exp(-ikx \cos \theta_0 + iky \sin \theta_0) \dots (2)$$

を加える。ここで、 $\tau(=\pm 1)$ は導体表面での反射係数を示し、 H 偏波のとき $\tau=+1$ を、 E 偏波のときは $\tau=-1$ となる。有限な物体による散乱の場合、遠方では散乱体が相対的に無限小の大きさになり、図1中の二つの SB^r は重なってしまうため、事実上反射波の寄与を必要とする領域は存在しなくなる。また同様にすべての観測方向で入射波が存在する。

〈2・2〉 一次回折波 u_1 入射平面波がエッジA、Bそれぞれに直接入射して作るエッジ回折波を一次回折波 u_1 とする。GTDは回折を起こすエッジ間の距離が波長に比べて十分大きいと仮定する。従って、一次回折波についてはストリップを構成する二つのエッジの他方を無限にもっていった場合の回折界、すなわち半平板による回折界を用いる[図2(a)参照]。半平板による平面電磁波の回折はSommerfeldによりFresnel積分を用いて厳密に解かれた問題であり、GTDはその厳密界の漸近解より回折波の大きさを決定している。こうして、エッジAによる回折波 u_{1A} はそのエッジを原点とする局所円筒座標 $(\rho, 0 \leq |\theta_1| \leq \pi)$ を用いて観測点を表すと、エッジAに入射する平面波を $u^i(A)$ として、

$$u_{1A} = C(k\rho_1) D_\tau \left(\frac{\theta_1}{2\pi + \theta_1}, \theta_0 \right) u^i(A) \quad (\theta_1 \geq 0) \dots (3)$$

と表される。ここで、 $C(k\rho_1) = (8\pi k\rho_1)^{-1/2} e^{i(k\rho_1 + \pi/4)}$ は二次元自由空間のグリーン関数の漸近解を表し、

図2 二次エッジ回折波 u_{2B}
Fig. 2. Double edge diffracted wave u_{2B} .

$D_r(\phi, \phi_0)$ は回折係数と呼ばれる回折波の放射パターンを表す関数で、

$$D_r(\phi, \phi_0) = - \left\{ \sec \left(\frac{\phi - \phi_0}{2} \right) + \tau \sec \left(\frac{\phi + \phi_0}{2} \right) \right\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

となる。こうして回折波(3)式はそのエッジ上に入射波と回折パターン D_r をかけあわせた大きさをもつ等価的な波源をもっているように解釈することができる。このように GTD の表現は簡便であり、物理的な意味づけが可能のため便利である。しかし、(3)式は厳密解の漸近解を導出するための条件 $\sqrt{k\rho_1} \cos \{(\theta_1 \pm \theta_0)/2\} \gg 1$ を満足する領域に使用が限られるため、観測点が十分遠方 ($k\rho_1 \gg 1$) であっても SB に近ければ用いることができない。この SB 近傍の領域は二つ以上の光線が複雑に干渉し合う領域であって遷移領域と呼ばれる。事実、この領域では波数 k による逆べき級数の展開は不可能となる。GTD を中心とした漸近解法を用いるときにはこのことに十分注意する必要がある。こうして SB より離れたエッジより遠方の領域にある観測点に対して、一次回折波は二つのエッジ A, B よりの寄与を加えて、

$$u_1 = C(k\rho_1)D_r \left(\frac{\theta_1}{2\pi + \theta_1}, \theta_0 \right) e^{ik(d/2)\cos\theta_0} + C(k\rho_2)D_r(\pi + \theta_2, \pi + \theta_0) e^{-ik(d/2)\cos\theta_0} \quad (\theta_1 \geq 0) \quad \dots\dots\dots (5)$$

と表される。更に観測点が散乱体より十分遠方であれば、

$$\left. \begin{aligned} \rho_{1,2} &\approx \rho \pm (d/2) \cos \theta \\ \theta &\approx \theta_1 \approx \theta_2 \\ C(k\rho_{1,2}) &\approx C(k\rho) e^{\pm ik(d/2)\cos\theta} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (6)$$

と近似できるので、(5)式は

$$u_1 = C(k\rho)D_r \left(\frac{\theta}{2\pi + \theta}, \theta_0 \right) e^{ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} + C(k\rho)D_r(\pi + \theta, \pi + \theta_0) e^{-ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} \quad (\theta \geq 0) \quad \dots\dots\dots (7)$$

となる。(7)式は $|\theta| = \pi - \theta_0$ となる SB 上において回折係数 D が発散すると同時に二つのエッジよりの寄与が相殺する $\infty - \infty$ の形となる。しかし、極限操作によって有界となることを確かめることができ、結局(7)式の u_1 は $k\rho \gg 1$ であれば使用可能な表現となる。こうした特殊な極限操作は平面波入射の遠方散乱界に対して適用できる数少ない事例である⁽¹⁰⁾。

〈2・3〉 多重回折波 u_m 上記の一次回折波は厳密解の波数 k の逆べき級数による漸近展開の主要項を用いて導出した。入射波、または反射波の寄与と比較すると u^i, u^r は $O(1)$ であるのに対して、一次回折波

u_1 は $O(k^{-1/2})$ と $1/2$ 次だけ波数 k の逆べきの次数が高いことになる。更に、高次の波数の逆べき展開を組込むためには、二つ以上のエッジを多重回折して観測点に到達する多重回折波を考慮しなければならない。

平面波がエッジ A に入射して作る一次回折波 u_{1A} は表面を伝搬してエッジ B に到達し、新たな二次回折波 u_{2B} を励振する。GTD によると、例えば図 2(b) のようにエッジ A よりエッジ B に導体の上部 ($y=0_+$) を伝搬してエッジ B で作られる二次回折波 u_{2B}^+ は(3)式の表示を参考にして

$$u_{2B}^+ = C(k\rho_2)D_r(\pi + \theta_2, 2\pi) \frac{1}{2} C(kd) \times D_r(0, \theta_0) u^i(A) \quad \dots\dots\dots (8)$$

と書くことができる⁽¹¹⁾⁽¹²⁾。上式右辺の中央部にある $(1/2)$ 項は表面を伝搬する回折波の等価波源の映像効果を補正するためである。二次回折波にはまた導体ストリップの平板下部 ($y=0_-$) に伝搬する波 u_{2B}^- :

$$u_{2B}^- = C(k\rho_2)D_r(\pi + \theta_2, 0) \frac{1}{2} C(kd) \times D_r(2\pi, \theta_0) u^i(A) \quad \dots\dots\dots (9)$$

も存在する。従って $u_{2B} = u_{2B}^+ + u_{2B}^-$ であるが、回折係数 D を具体的に計算すると、最終結果は上、下二つの寄与とも同じとなり、片方の 2 倍をとって $u_{2B} = u_{2B}^+ + u_{2B}^- = 2u_{2B}^+ = 2u_{2B}^-$ と表すこともできる。

H 偏波 ($\tau=+1$) については、こうして二次回折波 u_2 の主要項を求めることができるが、E 偏波 ($\tau=-1$) に対しては ϕ 、もしくは ϕ_0 が $0, 2\pi$ に対して回折係数 $D_{-1}(\phi, \phi_0)$ が零となってしまうため、結局(8)、(9)式による二次回折波 u_{2B}^+ は零となる。従って、E 偏波に対しては更に高次の漸近展開項の寄与を求めなければならない。この高次の寄与は、一次回折波を励振するためにエッジ上においた等価波源に指向性パターンが含まれ、導体表面上を伝搬する表面波が非等方性の波となるために励振される波である⁽¹³⁾。この高次の表面波によるエッジ回折波は一般にスローブ回折波と呼ばれるものであり、E 偏波の場合には(8)式に対応する二次回折波の主要項は⁽¹²⁾⁻⁽¹⁴⁾

$$u_{2B}^+ = C(k\rho_2) \tilde{D}_{-1}(\pi + \theta_2, \tilde{2\pi}) \frac{i}{2kd} C(kd) \times \tilde{D}_{-1}(\tilde{0}, \theta_0) u^i(A) \quad \dots\dots\dots (10)$$

で与えられる。ここで、 $\tilde{D}_{-1}(\tilde{\cdot}, \cdot)$ は $(\sim)$ 印の付いた変数をそのまま代入すると零となるため、その変数についての導関数をとることを意味している。以上をまとめて二次回折波 u_2 の主要項についての遠方界は、H 偏波については

$$u_2 = C(k\rho)C(kd) \left[\frac{4 \operatorname{sgn}(\theta)}{\cos(\theta/2) \sin(\theta_0/2)} \times e^{ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2} + \frac{4}{\sin(\theta/2) \cos(\theta_0/2)} e^{-ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2} \right] + \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta_0/2)}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta_0/2)} e^{-ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} \quad (11)$$

E 偏波については*,

$$u_2 = C(k\rho)C(kd) \frac{i}{kd} \times \left[\operatorname{sgn}(\theta) \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta_0/2)}{\cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta_0/2)} e^{ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2} + \frac{\cos(\theta/2) \sin(\theta_0/2)}{\sin^2(\theta/2) \cos^2(\theta_0/2)} e^{-ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2} \right] \quad (12)$$

となる。ただし、ここで $\operatorname{sgn}(\theta)$ は符号関数であり、 $\theta \geq 0$ に対し $\operatorname{sgn}(\theta) = \pm 1$ である。この表示はともに等価的な波源をそれぞれのエッジ上においているために、図 2(b) に示すように SB が、導体平板と同じ x 軸方向に現れる。従って、二次回折波 u_2 の表示は $\theta = 0, \pm\pi$ で両偏波とも発散する。 m 次回折波 u_m についても二次回折波 u_2 を導出したのと同じ方法で $m-1$ 次の回折波の表現より m 次回折波のための等価的なエッジ波源を考えることによって計算される。文献(14)の結果を用いると、 $m(\geq 2)$ 次回折波 u_m は正の整数 n に対して漸化式の形に表すことができ、H 偏波に対して

$$u_{2n} = [-2C(kd)]^{2(n-1)} u_2, \quad (13)$$

$$u_{2n+1} = [-2C(kd)]^{2(n-1)} u_3, \quad (14)$$

$$u_3 = C(k\rho)(-2)[C(kd)]^2 \times \left[\frac{4 \operatorname{sgn}(\theta)}{\cos(\theta/2) \cos(\theta_0/2)} e^{ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} + \frac{4}{\sin(\theta/2) \sin(\theta_0/2)} e^{-ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} \right], \quad (15)$$

また E 偏波についても同様に

$$u_{2n} = \left[\frac{i}{2kd} C(kd) \right]^{2(n-1)} u_2, \quad (16)$$

$$u_{2n+1} = \left[\frac{i}{2kd} C(kd) \right]^{2(n-1)} u_3, \quad (17)$$

$$u_3 = C(k\rho) \frac{1}{2} \left[\frac{i}{kd} C(kd) \right]^2 \times \left[\operatorname{sgn}(\theta) \frac{\sin(\theta/2) \cos(\theta_0/2)}{\cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta_0/2)} \times e^{ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2} \right]$$

と表される。以上をまとめて、導体ストリップによる散乱界は多重エッジ回折波 u_m の和を $\bar{u}$ として

$$\bar{u} = u_1 + u_2 + u_3 + \dots = \sum_{m=1}^{\infty} u_m \quad (19)$$

と表される。また、幾何級数の収束和の形を利用すると二次以上の多重回折波は二次、三次の回折波の形にまとめることができ

$$\bar{u} = u_1 + \frac{u_2 + u_3}{1 - R_r}, \quad (20)$$

$$R_r = \begin{cases} [-2C(kd)]^2 & \text{H 偏波 } (\tau=+1) \\ \left[\frac{iC(kd)}{2kd} \right]^2 & \text{E 偏波 } (\tau=-1) \end{cases} \quad (21)$$

ここで、 $1 - R_r = 0$ は導体ストリップ散乱体の複素共振周波数を求めるための共振条件式となる⁽¹³⁾⁽¹⁴⁾。また、この結果は W-H 法による定式化により得られた非一様漸近展開の主要項と同じである⁽⁹⁾。

3. GTD の改善

先に求めた GTD による解は、エッジによる多重回折波のたし合せという明確な物理的な解釈をもち理解しやすい反面、SB 方向 ($\theta=0, \pm\pi$) の観測角においては使用できない。SB を中心とした遷移領域は二つ以上の光線が相互干渉するような場所であり、光線が集中してできるコースティック (caustic, 火線) や焦点近傍の領域同様、簡単な光線近似では表現できない部分である。こうした短所は、GTD の提案のころから指摘され、以来様々な改善のための手法が報告されている。本論文では、等価波源の方法 (Equivalent Source Method; ESM)⁽¹²⁾ によって SB における発散を防ぎ、有界な解を得る方法を用いることにする。この方法によると比較的簡単に有界な界を得ることができるが、漸近展開の高次の項の寄与をすべて含めて計算していないため、波源と二つのエッジ、観測点が一直線にならぶような特別な場合には SB 上で有界であっても不連続となることもある⁽¹²⁾。こうした欠点を更に改善するためには、一様漸近論 (Uniform Asymptotic Theory of Diffraction; UAT)⁽¹⁵⁾ や、スペクトラル領域での解法⁽¹⁶⁾ などによる精密な解析が必要となる。一方、等価波源の方法に関しても様々な手法が考案されている。特に三次元散乱体によるコーナー・曲面回折、SB・コースティックにおける発散防止の工夫についてはストリップ近似、物理光学近似な

*2 研究専門委員会の資料 (EMT-91-146) 中の E 偏波の回折波には回折係数の計算ミスが確認された。

図3 半平板による円筒波の回折

Fig. 3. Half plane diffraction of cylindrical wave.

どの修正に関する研究が注目される⁽¹⁷⁾。本論文では解析を二次元の散乱問題に限定し、多重回折波の寄与を簡単に考慮することを念頭においているため文献(12)の方法を選んだ。

m 次エッジ多重回折波 u_m の SB 上の発散を防ぐには、 $m-1$ 回めのエッジ多重回折波を等価波源に置き換える際に、そのままでは発散する GTD の回折係数を、形式的に一樣漸近解より決定してやればよい。図3に示すような円筒波の半平板による回折波の一樣漸近解を $u_r(\rho, \phi; \rho_0, \phi_0)$ とすれば、すべての観測点の方向に対し GTD の形に表されると仮定して

$$u_r(\rho, \phi; \rho_0, \phi_0) = C(k\rho)D_r(\phi, \phi_0)C(k\rho_0) \quad (22)$$

すなわち、

$$D_r(\phi, \phi_0) = \frac{u_r(\rho, \phi; \rho_0, \phi_0)}{C(k\rho)C(k\rho_0)} \quad (23)$$

より回折係数を決定することができる。この(23)式で数値的に決定された回折係数 D_r を(4)式の代わりに用いることによって形式的に GTD の表現を使うことができ、すべての観測方向に対して発散しない表現が可能となる。こうした一樣な回折係数の解析的な表現には UTD (Uniform Theory of Diffraction) によるものがある⁽¹⁸⁾。こうして、 $m-1$ 次の多重回折波を起こすエッジ上に(23)式回折係数をもつ非等方性の等価波源をおき、 m 次の回折波をその等価波源よりの回折波として再度、一樣漸近解で表現すればよい。

4. 全散乱幅

導体ストリップによる平面波入射時の全散乱幅は、散乱界の前方散乱界より計算することができる⁽⁷⁾⁽¹⁹⁾。いま、入射波 $u^i(\propto E_z^i, H_z^i)$ に対する二次元散乱界 $u^s(\propto E_z^s, H_z^s)$ が遠方で

$$u^s \sim \sqrt{2/\pi k \rho} e^{i(k\rho - \pi/4)} P(\phi) u^i \quad (24)$$

と表されるとき、全散乱幅 σ_r は前方散乱方向 ϕ_f のパターン関数 $P(\phi_f)$ を用いて

$$\sigma_r = -(4/k) \Re e[\lim_{\rho \rightarrow \infty} P(\phi_f)] \quad (25)$$

と表される。上式を用いると σ_r は GTD の結果に対しては簡単に解析的な値を求めることができる。

最初に H 偏波による結果を示す。一、二次回折波による寄与をそれぞれ $\sigma_r^{(1)}, \sigma_r^{(2)}$ とすると(7)式の u_1 , (11)式の u_2 の GTD の結果より(25)式を計算して、

$$\sigma_r^{(1)}(\theta_0)/4w = \sin \theta_0, \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_r^{(2)}(\theta_0)}{4w} = & \frac{-1}{2\sqrt{\pi}(kw)^{3/2}} \\ & \times \left[\frac{\cos \{2kw(1 - \cos \theta_0) - \pi/4\}}{1 - \cos \theta_0} \right. \\ & \left. + \frac{\cos \{2kw(1 + \cos \theta_0) - \pi/4\}}{1 + \cos \theta_0} \right] \quad (27) \end{aligned}$$

となる。GTD によって求められた三次以上の多重回折波の結果をすべて含めた(20)式の $\bar{u}$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\sigma}_r(\theta_0)}{4w} = & \sin \theta_0 - \frac{1}{2\sqrt{\pi}(kw)^{3/2}} \\ & \times \left[1 + \frac{\sin(4kw)}{2\pi kw} + \left(\frac{1}{4\pi kw} \right)^2 \right]^{-1} \\ & \times \left[\left(1 + \frac{\sin(4kw)}{4\pi kw} \right) \right. \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1 - \cos \theta_0) - \pi/4\}}{1 - \cos \theta_0} \\ & + \frac{\cos(4kw)}{4\pi kw} \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1 - \cos \theta_0) + \pi/4\}}{1 - \cos \theta_0} \\ & + \left(1 + \frac{\sin(4kw)}{4\pi kw} \right) \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1 + \cos \theta_0) - \pi/4\}}{1 + \cos \theta_0} \\ & + \frac{\cos(4kw)}{4\pi kw} \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1 + \cos \theta_0) + \pi/4\}}{1 + \cos \theta_0} \\ & \left. + \frac{1}{2\pi(kw)^2} \frac{\cos(4kw)}{\sin \theta_0} \right] \\ & \times \left[1 + \frac{\sin(4kw)}{2\pi kw} + \left(\frac{1}{4\pi kw} \right)^2 \right]^{-1} \quad (28) \end{aligned}$$

となる。上式は文献(5)の GTD による結果と一致している。しかしながら、この結果は GTD によって多重回折波の主要項のみを用いて全散乱幅を計算しているために $k^{-5/2}$ 以下の展開項は正しくない。こうした高次の展開まで求めるには多重回折波の主要項のみではなく補正項を含めて計算しなければならない。例えば、 H 偏波の全散乱幅を k^{-3} までの漸近展開項を求めるためには、二、三次多重回折波の主要項ばかりで

なく、それらの一次補正項が必要となる。多重エッジ回折波の補正項を漸化的に求めるには、文献(21)の方法が適用できる。この方法によれば二、三次回折波 u_2, u_3 は(11), (15)式の主要項に加えて

$$u_2 = C(k\rho)C(kd) \times \left[\frac{4 \operatorname{sgn}(\theta) e^{ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2}}{\cos(\theta/2) \sin(\theta_0/2)} \times \left\{ 1 - \frac{i}{k\rho} \frac{1}{4 \cos^2(\theta/2)} - \frac{i}{kd} \left(\frac{1}{4 \cos^2(\theta/2)} + \frac{1}{4 \sin^2(\theta_0/2)} - \frac{1}{8} \right) + \mathcal{O}(k^{-2}) \right\} + \frac{4 e^{-ikd(\cos\theta - \cos\theta_0)/2}}{\sin(\theta/2) \cos(\theta_0/2)} \times \left\{ 1 - \frac{i}{k\rho} \frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)} - \frac{i}{kd} \left(\frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)} + \frac{1}{4 \cos^2(\theta_0/2)} - \frac{1}{8} \right) + \mathcal{O}(k^{-2}) \right\} \right], \quad (29)$$

$$u_3 = C(k\rho)(-2)[C(kd)]^2 \times \left[\frac{4 \operatorname{sgn}(\theta) e^{ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2}}{\cos(\theta/2) \sin(\theta_0/2)} \times \left\{ 1 - \frac{i}{k\rho} \frac{1}{4 \cos^2(\theta/2)} - \frac{i}{kd} \left(\frac{1}{4 \cos^2(\theta/2)} + \frac{1}{4 \cos^2(\theta_0/2)} + \frac{1}{4} \right) + \mathcal{O}(k^{-2}) \right\} + \frac{4 e^{-ikd(\cos\theta + \cos\theta_0)/2}}{\sin(\theta/2) \sin(\theta_0/2)} \times \left\{ 1 - \frac{i}{k\rho} \frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)} - \frac{i}{kd} \left(\frac{1}{4 \sin^2(\theta/2)} + \frac{1}{4 \sin^2(\theta_0/2)} + \frac{1}{4} \right) + \mathcal{O}(k^{-2}) \right\} \right], \quad (30)$$

となる。上式より二次回折波の一次補正項と四次回折波の主要項、三次回折波の一次補正項と五次回折波の主要項が波数 k の漸近展開において同じオーダーであることがわかる。上式の結果と GTD による四、五次回折波の主要項を用いて全散乱幅(25)式を計算すると

$$\frac{\sigma_T^{(2)}(\theta_0)}{4w} = \frac{-1}{2\sqrt{\pi}(kw)^{3/2}} \left[\frac{\cos\{2kw(1 - \cos\theta_0) - \pi/4\}}{1 - \cos\theta_0} + \frac{\cos\{2kw(1 + \cos\theta_0) - \pi/4\}}{1 + \cos\theta_0} \right]$$

$$+ \frac{1}{32\sqrt{\pi}(kw)^{5/2}} \times \left[\frac{(7 + \cos\theta_0) \cos\{2kw(1 - \cos\theta_0) + \pi/4\}}{(1 - \cos\theta_0)^2} + \frac{(7 - \cos\theta_0) \cos\{2kw(1 + \cos\theta_0) + \pi/4\}}{(1 + \cos\theta_0)^2} \right], \quad (31)$$

$$\frac{\sigma_T^{(3)}(\theta_0)}{4w} = \frac{1}{2\pi(kw)^2 \sin\theta_0} \times \left[\cos(4kw) + \frac{\sin(4kw)}{8kw} \times \frac{5 - \cos^2\theta_0}{\sin^2\theta_0} \right], \quad (32)$$

$$\frac{\sigma_T^{(4)}(\theta_0)}{4w} = \frac{-1}{8\pi^{3/2}(kw)^{5/2}} \times \left[\frac{\cos\{2kw(3 - \cos\theta_0) + \pi/4\}}{1 - \cos\theta_0} + \frac{\cos\{2kw(3 + \cos\theta_0) + \pi/4\}}{1 + \cos\theta_0} \right], \quad (33)$$

$$\frac{\sigma_T^{(5)}(\theta_0)}{4w} = -\frac{\sin(8kw)}{8\pi^2(kw)^3 \sin\theta_0} \quad (34)$$

これらを加えて

$$\sigma_T/4w = (1/4w) \{ \sigma_T^{(1)} + \sigma_T^{(2)} + \sigma_T^{(3)} + \sigma_T^{(4)} + \sigma_T^{(5)} + \mathcal{O}(k^{-7/2}) \} \quad (35)$$

を得る。この結果の $k^{-5/2}$ までは文献(7)の σ_T の漸近展開(4.199)式と完全に一致し、最後の k^{-3} の項は新たな結果である。垂直入射の場合は $\theta_0 = \pi/2$ と置いて

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T(\theta_0 = \pi/2)}{4w} &= 1 - \frac{\cos(2kw - \pi/4)}{\sqrt{\pi}(kw)^{3/2}} + \frac{\cos(4kw)}{2\pi(kw)^2} \\ &\quad - \frac{1}{4\pi^{3/2}(kw)^{5/2}} \left[\cos(6kw + \pi/4) - \frac{7}{4}\pi \cos(2kw + \pi/4) \right] - \frac{1}{8\pi^2(kw)^3} \\ &\quad \times \left[\sin(8kw) - \frac{5}{2}\pi \sin(4kw) \right] + \mathcal{O}(k)^{-7/2} \end{aligned} \quad (36)$$

この結果は文献(7)の σ_T の漸近展開(4.200)式と完全に一致している*。

E 偏波についても同様に求めることができる。全散乱幅についての結果のみを記すと GTD の結果より(25)式を計算して、

*3 以下比較に用いた文献(7)の結果(4.113), (4.118), (4.200)式は関数解析的な手法で求められた結果であり、GTDに関連した手法によって得られたのではないことを付記しておく。

$$\frac{\sigma_T^{(1)}(\theta_0)}{4w} = \sin \theta_0 \quad \dots\dots\dots (37)$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T^{(2)}(\theta_0)}{4w} = & \frac{1}{16\sqrt{\pi}(kw)^{5/2}} \left[\frac{1+\cos \theta_0}{(1-\cos \theta_0)^2} \right. \\ & \times \cos \{2kw(1-\cos \theta_0) + \pi/4\} \\ & + \frac{1-\cos \theta_0}{(1+\cos \theta_0)^2} \\ & \left. \times \cos \{2kw(1+\cos \theta_0) + \pi/4\} \right] \\ & \dots\dots\dots (38) \end{aligned}$$

を得る。ここで、一次回折波による結果は H 偏波と同じとなっている。GTD によって求められた三次以上の多重回折波の主要項をすべて含めた (20) 式の $\bar{u}$ を用いると

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T(\theta_0)}{4w} &= \sin \theta_0 + \frac{1}{16\sqrt{\pi}(kw)^{5/2}} \\ &\times \left[1 - \frac{\sin(4kw)}{128\pi(kw)^3} + \left(\frac{1}{256\pi(kw)^3} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\times \left[\left(1 - \frac{\sin(4kw)}{256\pi(kw)^3} \right) \frac{(1+\cos \theta_0)}{(1-\cos \theta_0)^2} \right. \\ &\times \cos \{2kw(1-\cos \theta_0) + \pi/4\} \\ &+ \frac{\cos(4kw)}{256\pi(kw)^3} \frac{(1+\cos \theta_0)}{(1-\cos \theta_0)^2} \\ &\times \cos \{2kw(1-\cos \theta_0) - \pi/4\} \\ &+ \left(1 - \frac{\sin(4kw)}{256\pi(kw)^3} \right) \frac{(1-\cos \theta_0)}{(1+\cos \theta_0)^2} \\ &\times \cos \{2kw(1+\cos \theta_0) + \pi/4\} \\ &+ \frac{\cos(4kw)}{256\pi(kw)^3} \frac{(1-\cos \theta_0)}{(1+\cos \theta_0)^2} \\ &\left. \times \cos \{2kw(1+\cos \theta_0) - \pi/4\} \right] \\ &- \frac{1}{128\pi(kw)^4} \frac{\cos(4kw)}{\sin \theta_0} \\ &\times \left[1 - \frac{\sin(4kw)}{128\pi(kw)^3} + \left(\frac{1}{256\pi(kw)^3} \right)^2 \right]^{-1} \\ &\dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

となる。上式を垂直入射 ($\theta_0 = \pi/2$) の場合に適用した結果は文献 (6) の GTD の結果と一致している。更に精度の高い結果は、各回折波の波数のオーダーに注意して二次回折波の一、二次補正項と三次回折波の主要項より

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T^{(2)}(\theta_0)}{4w} = & \frac{1}{16\sqrt{\pi}(kw)^{5/2}} \left[\frac{1+\cos \theta_0}{(1-\cos \theta_0)^2} \right. \\ & \times \left[\cos \{2kw(1-\cos \theta_0) + \pi/4\} \right. \\ & \left. + \{3/(1-\cos \theta_0) + 3/8\} \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{\cos \{2kw(1-\cos \theta_0) - \pi/4\}}{2kw} \\ & - \left\{ \frac{45}{4} \frac{1}{(1-\cos \theta_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{14}{16} \frac{1}{1-\cos \theta_0} + \frac{103}{384} \right\} \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1-\cos \theta_0) + \pi/4\}}{4(kw)^2} \left. \right] \\ & + \frac{1-\cos \theta_0}{(1+\cos \theta_0)^2} \\ & \times \left[\cos \{2kw(1+\cos \theta_0) + \pi/4\} \right. \\ & + \{3/(1+\cos \theta_0) + 3/8\} \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1+\cos \theta_0) - \pi/4\}}{2kw} \\ & - \left\{ \frac{45}{4} \frac{1}{(1+\cos \theta_0)^2} \right. \\ & \left. + \frac{14}{16} \frac{1}{1+\cos \theta_0} + \frac{103}{384} \right\} \\ & \times \frac{\cos \{2kw(1+\cos \theta_0) + \pi/4\}}{4(kw)^2} \left. \right] \\ & + \mathcal{O}(k^{-3}), \quad \dots\dots\dots (40) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T^{(3)}(\theta_0)}{4w} = & -\frac{\cos(4kw)}{128\pi(kw)^4 \sin \theta_0} + \mathcal{O}(k^{-5}) \\ & \dots\dots\dots (41) \end{aligned}$$

こうして

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T}{4w} = & \frac{1}{4w} \{ \sigma_T^{(1)} + \sigma_T^{(2)} + \sigma_T^{(3)} + \mathcal{O}(k^{-5}) \} \\ & \dots\dots\dots (42) \end{aligned}$$

を得る。垂直入射の場合は $\theta_0 = \pi/2$ を代入して

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_T(\theta_0 = \pi/2)}{4w} &= 1 + \frac{\cos(2kw + \pi/4)}{8\pi^{1/2}(kw)^{5/2}} \\ &+ \frac{27 \cos(2kw - \pi/4)}{128\pi^{1/2}(kw)^{7/2}} - \frac{\cos(4kw)}{128\pi(kw)^4} \\ &- \frac{4,759 \cos(2kw + \pi/4)}{12,288\pi^{1/2}(kw)^{9/2}} + \mathcal{O}(k^{-5}) \\ &\dots\dots\dots (43) \end{aligned}$$

この結果は k^{-4} のオーダーまでは文献 (7) の σ_T の漸近展開 (4.113), (4.118) 式と完全に一致している。上式右辺の最後の $k^{-9/2}$ の項は新たな結果である。

表1の GTD1 は GTD による一、二次回折波のみによって全散乱幅を、GTD 2 はすべての多重エッジ回折波を含めた $\bar{u}$ より全散乱幅 σ_T を、また GTD 3 は回折波の補正項を含めた漸近表示 (36), (43) 式より全散乱幅をそれぞれ計算したものである。ESM はす

図 4 垂直入射時の全散乱幅
Fig. 4. Total scattering cross section per unit length for normal incidence.

表 1 垂直入射時の全散乱幅
Table 1. Total scattering cross section per unit length for normal incidence.

kw	E wave				H wave			
	exact	GTD1 GTD2 GTD3 ESM	error(%) error(%) error(%) error(%)		exact	GTD1 GTD2 GTD3 ESM	error(%) error(%) error(%) error(%)	
1	0.99085	0.93390 0.93557 1.18182 0.99074	5.74759 5.57804 19.2733 0.01110		0.54540	0.80326 0.64281 0.34073 0.51996	47.2791 17.8602 37.5266 4.66447	
2	0.99478	1.00091 1.00093 0.98973 0.99470	0.61622 0.61823 0.50664 0.00080		1.18426	1.19894 1.18612 1.20134 1.18475	1.23960 0.15706 1.44251 0.04137	
4	0.99896	0.99823 0.99974 0.99914 0.99882	0.07308 0.07208 0.01702 0.01402		0.94244	0.95792 0.94697 0.94033 0.94257	1.64254 0.48067 0.22389 0.01379	
8	0.99976	0.99982 0.99981 0.99975 0.99976	0.00600 0.00500 0.00100 0.00000		1.02332	1.02196 1.02399 1.02345 1.02343	0.13290 0.06547 0.01270 0.01075	
16	—	1.00001 1.00001 1.00002 1.00002	— — — —	—	—	0.99136 0.99164 0.99171 0.99170	— — — —	
32	—	1.00000 1.00000 1.00000 1.00000	— — — —	—	—	0.99711 0.99701 0.99699 0.99699	— — — —	
64	—	1.00000 1.00000 1.00000 1.00000	— — — —	—	—	0.99998 0.99998 0.99997 0.99997	— — — —	

すべての多重回折波を含めて散乱波を求め、全散乱幅を(25)式より数値計算したものである。それぞれの計算には NEC 製のパーソナルコンピュータ PC 9801 RX で 1 秒以内*と非常に短時間で計算できる。表 1 から

も明らかなように、非常に簡単な計算で $kw=1$ の場合についてもかなりよい近似になっていることがわかる。GTD による計算ではストリップ幅が大きくなるとき、高次の項を含めるほど精度が良くなるが、ストリップ幅が小さくなるときは、むしろ二次回折波程度までの散乱幅を計算したほうが良好な値となる。こうした結果は、波数 k に対する散乱幅の漸近展開の特徴をよく表している。ESM を用いるとストリップの幅が小さくなるとき、GTD に比べ一桁以上精度が良くなっていることは注目値する。ESM の方法によって kw を 0.25 から 10.0 まで変化させて $\sigma_T/4w$ を計算させたのが図 4 である。図中の実線は E 波、破線は H 波の結果を、また $\bullet$, $\times$ 印は厳密解の結果⁽²⁰⁾を示す。 $kw \sim 0.7$ 以上では厳密解とよく一致しており、文献(8)の Yu らの結果とほぼ同じ結論を得る。

5. 斜入射時の遠方散乱パターン

前章の結果より明らかなように、 $kw=1$ 、すなわち $w=0.16\lambda$ についても GTD, ESM は精度良い近似になっている。従って、この遠方散乱パターンについてもよい近似となることが期待できる。散乱パターンはストリップ面 (x 軸) に対して対称となるため、 $-90^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ の結果を示す。まず最初にストリップ幅が $d=4\lambda$ の場合について、GTD による結果を図 5 に示す。小丸印($\cdots$)は一次回折波 u_1 によるパターンを示す。入射角 45° に対しては E, H 両偏波とも散乱パターンの絶対値は同じとなる。最大値をとる $\varphi=45^\circ$ 付近で(7)式の u_1 を構成する二つの項はそれぞれ単独では発散するが、項の和の極限値をとると有限値となっていることがわかる。(11), (12)式で求めた二次回折波 u_2 まで含めると両偏波に差異が現れる。実線は E 波、破線は H 波の二次回折波までの寄与の

* 4 パーソナルコンピュータの計測可能な最小時間単位が秒のため、それ以上は計測不能であった。

図 5 GTD による遠方散乱パターン
Fig. 5. Far field scattering pattern calculated by GTD.

図 6 ESM による遠方散乱パターン
Fig. 6. Far field scattering pattern calculated by ESM.

和による散乱パターンである。GTD による解析では二次回折波まで含めると、SB にあたる $\varphi = \pm 90^\circ$ で発散し、これ以上高次の寄与を加えても形はほとんど変化しない。

図 6 は、ESM を用いてストリップ幅 $d(=2w)$ をそれぞれ $1\lambda, 2\lambda, 4\lambda, 8\lambda$ としたときの遠方散乱パターンである。等価波源によって修正した結果は SB における発散が防がれ、GTD の欠点を補正していることがわかる。E(実線)、H(破線) 両偏波とも散乱パター

ンの形はほぼ同様であり、異なるのはストリップ面と平行な $\varphi = \pm 90^\circ$ 付近である。H 偏波の場合には $\varphi = \pm 90^\circ$ で界が急激に減衰している。ストリップの幅が大きくなると散乱パターンは激しく振動するようになる。

6. む す び

本論文では、高周波近似解法である GTD, ESM を用いて導体ストリップによる平面波の散乱について

定式化し、全散乱幅の漸近表示を求めた。この結果は既に報告されている他の手法によるものと比較し、与えられている展開項までは完全に一致していることが確認された。更に、垂直入射についての全散乱幅と遠方散乱パターンについて数値計算を行い、ストリップ幅がかなり小さくても $kw \geq 1$ であれば、GTD, ESM によって多重エッジ回折波の寄与を含めることにより精度の十分良い計算ができることがわかった。本方法は物理的意味をつけた明解な定式化ができることと、パーソナルコンピュータを用い、極めて短時間で散乱パターンを計算できることなどが長所である。短所としては高周波漸近解法であるため、ストリップ幅が小さくなると精度が劣化することである。また GTD によると、SB, コースティック近傍では解が発散してしまうため、この領域では使用が困難となる。この欠点は一樣漸近表示を用いることによって改善することができる。本論文では、ESM による GTD の改善法を示した。しかしながら複雑な散乱体の場合には、SB 付近での発散は ESM の方法で防ぐことができても界が不連続となる場合もある。この欠点については今後の研究課題である。

最後に、文献(9)で小林は文献(7)の導体ストリップ回折界の GTD による解は間違っていると述べているが、ここに示したように GTD の多重回折波の和による結果は彼の導出した W-H 法の漸近解と一致しており、文献(7)の式はプリントミスとして扱われるべきもので、GTD の理論に疑問を投げかける根拠には全くならないことを言及しておく。本研究の一部は 1991 年度中央大学研究用図書費の援助を受けて行われた。(平成 4 年 5 月 21 日受付)

文 献

- (1) J. B. Keller: *J. Opt. Soc. Am.*, **52**, 116 (1962)
- (2) R. C. Hansen (ed.): *Geometrical Theory of Diffraction* (1981) IEEE Press, New York
- (3) G. L. Games: *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves* (1986) Third Edition Revised, Peter Peregrinus Ltd., Herts, United Kingdom
- (4) S. N. Karp & A. Russek: *J. Appl. Phys.*, **27**, 886 (1956)
- (5) J. B. Keller: *J. Appl. Physics*, **28**, 426 (1957)
- (6) S. N. Karp & J. B. Keller: *Optica Acta*, **8**, 61 (1961)
- (7) J. J. Bowman, T. B. A. Senior & P. L. E. Uslenghi (eds.): *Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple*

Shapes, (1987) Revised Printing, Hemisphere Publishing Corp., New York

- (8) J. S. Yu & R. C. Rudduck: *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, **AP-15**, 662 (1967)
- (9) K. Kobayashi: *J. Phys. Soc. Japan*, **60**, 1891 (1991)
- (10) R. C. Menendez & S. W. Lee: *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, **AP-25**, 688 (1977)
- (11) 本郷・小林・高橋: 信学論, **64-B**, 939 (昭 56)
- (12) H. Shirai, K. Hongo & H. Kobayashi: *IECE Trans.*, **E66**, 116 (1986)
- (13) H. Shirai & L. B. Felsen: *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, **AP-34**, 779 (1986)
- (14) H. Shirai & L. B. Felsen: *ibid.*, **AP-34**, 1196 (1986)
- (15) S. W. Lee & J. Boersma: *J. Math. Phys.*, **16**, 1746 (1975)
- (16) H. Shirai & L. B. Felsen: *Wave Motion*, **8**, 449 (1986)
- (17) 稲沢・佐藤・安藤: 電気学会電磁界理論研究, EMT-91-106, 111 (平 3)
- (18) R. G. Kouyoumjian & P. H. Pathak: *Proc. IEEE*, **62**, 1448 (1974)
- (19) E. V. Jull: *Aperture Antennas and Diffraction Theory* (1991) Peter Peregrinus Ltd., Herts, United Kingdom
- (20) S. Skavlem: *Arch. Math. Naturv.*, **B-51**, 61 (1951)
- (21) H. Shirai & L. B. Felsen: *IEEE Trans. Antennas & Propagat.*, **AP-34**, 1106 (1986)

白 井 宏 (正員)

昭和 33 年 3 月 17 日生。57 年 3 月静岡大学大学院工学研究科電気工学専攻修士課程修了。61 年 6 月アメリカ・ポリテクニック大学大学院工学研究科電気工学専攻博士課程修了。以後、同大学研究員を経て、62 年 4 月中央大学理工学部専任講師、63 年 4 月同大学理工学部助教授、現在に至る。Ph. D. 主として、電磁波の高周波散乱・回折現象の解析に関する研究に従事。電子情報通信学会、音響学会、IEEE, Sigma Xi, ASA 会員。

宮 賢 一 (非会員)

昭和 43 年 1 月 6 日生。平成 3 年 3 月中央大学理工学部電気工学科卒業。現在、同大学大学院理工学研究科電気工学専攻博士前期課程在学中。主として、電磁波の高周波散乱解析に関する研究に従事。電子情報通信学会会員。