超電導を含む空間の磁場の解析方法

正員 松葉博則 (古河電工 横浜研究所)

Magnetic Field Determination Method of a Superconducting System
Hironori Matsuba (Furukawa Electric Yokohama Laboratories)

Magnetic field penetration through a superconductive wall is expressed in general cases including the wall thickness close to the London penetration depth of the superconductor. In addition, solutions of the field penetration for a superconducting cylinder of infinite length and for a superconducting spherical shell are given. Using the solution, magnetic field penetration through a very thin superconducting film is discussed compared with the conventional solutions.

キーワード: 超電導、磁場解析、ロンドン方程式、シールド

1. まえがき

超電導体により囲まれた空間は開口部からの侵入を除けば、微弱な外部からの磁場の侵入は超電導体の厚さがロンドン長より十分大きい場合は磁場侵入が無視でき完全な遮蔽ができると考えられている。一方ロンドン長に近い厚さの超電導体を通して侵入する磁場についてはロンドン長の測定等の目的で検討されている。^{(1)~(4)}

Pipard⁽⁴⁾は超電導体がロンドンの方程式に従うという条件で無限平板について超電導薄膜の磁場透過についての解を与えている。これによれば空間的に変化する磁場に対しては磁場侵入が起きるが、平等磁場に対しては磁場侵入は起きない。しかし、Pipardはロンドンの第二方程式から導かれる式 $\lambda^2 \nabla^2 \vec{B} = \vec{B}$ のみを用い、磁場 B が連続という条件で磁場侵入を求めているが、この場合は無限平板を想定したときのみ解を得ることが出来、そうでない一般の配置の磁場侵入を得るにはこれだけでは解を定めることが出来ない。このようにこれまでの検討では超電導体を扱うとき磁場の時間変化に伴う電界を無視してきたため解を定める事ができなかったと考えられる。これは静磁場を求めるという考えのため、その変化のもたらす電界は考える必要がないと考えられていたと想像される。

しかし、本文ではこの磁場の変化がいかに緩やかであっても電界を考慮する必要がある事を明らかにし、これにより超電導体により囲まれた空間への磁場侵入解析についての明確な解析方法を得た。さらに数例について具体的に解き、超電導で囲まれた空間に侵入する磁場は内部空間の形状に依存する事を示した。特に高温超電導体多結晶体を遮蔽に用いるとき、等価的磁場侵入長は臨界電流密度が小さいと非常に大きくなり⁽⁵⁾、超電導の

厚さは時にこれと比較しうる大きさになる。実際、我々は高温超電導で出来た円筒の遮蔽効果測定を行い開口部からではない磁場侵入を観測した。⁽⁶⁾ この場合遮蔽効果は小さくなりこの解析が必要となる。

2. 超電導体を通しての侵入磁場の計算原理
外部磁場 B_e は弱く、臨界磁場 $\mu_0 H_c$ (第二種超電導体では下部臨界磁場 $\mu_0 H_{c1}$) を越えない条件を考える。この場合、ロンドンの方程式で超電導体内部の電磁場を取り扱う事が出来る。

<2.1> 超電導体内部での方程式

ロンドンの第一方程式

$$\vec{E} = \mu_0 \lambda^2 \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} = \lambda^2 \text{rot} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{-----}(1)$$

が成立し、またロンドンの第二方程式 $\mu_0 \lambda^2 \text{rot} \vec{J} = -\vec{B}$

とMaxwellの方程式 $\text{rot} \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$ とを組み合わせる

$$\lambda^2 \nabla^2 \vec{B} = \vec{B} \quad \text{-----}(2)$$

が成立する。

<2.2> 境界条件

ここで、境界条件は超電導体と外部空間界面で磁束密度が連続で、かつ電界の接線方向成分が等しい事である。

<2.3> 外部空間

$$\text{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad \text{-----}(3)$$

或いはその積分形

$$v = \oint_C \vec{E} \cdot d\vec{s} = \int_S \text{rot} \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int_S -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = -\frac{\partial \Phi}{\partial t} \quad \text{---}(4)$$

がその条件となる。なお、外部空間ではこれ以外のマクスウェルの方程式を必要に応じて用いる。

<2.4> 解の性質

従って(1),(2),(3)が用いるべき方程式であるが電界を表す式(1),(3)は磁場の時間微分で表されている。このため(2)を時間微分して得られる式と組み合わせて解くことが出来る。

解は時間微分 $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ で与えられる。磁場はその積分形で与えられる。即ち

$$\vec{B} = \int_{t=0}^{t=t} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} dt = \vec{B}_I - \vec{B}_0 \quad \text{-----}(5)$$

の形で得られる。ここで $\vec{B}_I$ は時間的に変化する磁場の解であり(1),(2),(3)で決定できる。 $\vec{B}_0$ は時間的に変化する磁場の解であり(2)を満たす必要があるが、(1),(3)を自動的に満たしており一般的には外部磁場条件だけでは決定出来ない。この磁場は超電導中の永久電流あるいは外部電源による直流電流によりもたらされる磁場であり内部磁場を決定するにはこれを与える必要がある。このようにある静磁場での遮蔽を求める場合、その初期にどのような状態であったかを考える必要がある。なお、以下の解析では特にことわらない限り $\vec{B}_0 = 0$ を仮定する。即ち超電導体中を流れる電流は外部磁場により誘起されたもののみであるとする。静磁場でも通常問題になるのは外部磁場が変化してある値になったとき他の部分の磁場がどのように変わったかが問題だからである。

3 具体的計算

<3.1> 無限長円筒内部磁場

無限長の外径 $2R_a$ 、内径 $2R_b$ の超電導体中空円筒外部に無限遠で平等磁場となる外部磁場 B_E を加えた場合、外部磁場の向きが円筒軸方向、径方向のどちらであっても、円筒内部磁場は外部磁場と同方向の平等磁場 B_I となる。その大きさは超電導体のロンドン長を λ 、厚さを $d_s = R_a - R_b$ とし、 $R_a, R_b \gg \lambda$ の場合

$$\frac{B_I}{B_E} = \sqrt{\frac{R_a}{R_b}} \frac{2}{\frac{R_b}{\lambda} \sinh\left(\frac{d_s}{\lambda}\right) + 2 \cosh\left(\frac{d_s}{\lambda}\right)} \quad \text{-----}(6)$$

で与えられる。(Appendix 1,2)

<3.2> 超電導球殻内部磁場

超電導薄膜が外径 $2R_a$ 、内径 $2R_b$ の球殻を形成している時は厚さを $d_s = R_a - R_b$ とし、 $R_a, R_b \gg \lambda$ の場合

$$\frac{B_I}{B_{\infty}} = \frac{4 \left(\frac{R_a}{\lambda}\right)^2}{\frac{R_b}{\lambda} \left\{ 5 \frac{R_a}{\lambda} \cosh\left(\frac{d_s}{\lambda}\right) - \frac{R_b}{\lambda} \cosh\left(\frac{d_s}{\lambda}\right) + \frac{R_a R_b}{\lambda^2} \sinh\left(\frac{d_s}{\lambda}\right) \right\}}$$

で与えられる。(Appendix 3)

4 超電導薄膜の磁場透過

(6)によれば超電導体中空円筒の壁の厚さが $d_s < \lambda$ かつ、 $R_b d_s \gg \lambda^2$ を満たせば

$$\frac{B_I}{B_E} = \frac{2\lambda^2}{R_b d_s} \quad \text{-----}(8)$$

と de Genes, Claassen が導いた近似式が得られる。しかし超電導薄膜が球殻を形成している時は

$$\frac{B_I}{B_E} = \frac{4\lambda^2}{R_b d_s} \quad \text{-----}(9)$$

と(8)と異なった近似式が得られる。このように磁場透過は超電導薄膜の形状に支配される。

5 結論

これまで超電導による遮蔽効果を計算する明確な式は与えられていなかったがこれを明らかにし、具体的な解析例を示した。

Appendix 1

無限長円筒一軸方向外部磁場

1図の如く無限長の外径 $2R_a$ 、内径 $2R_b$ の超電導体中空円筒の外部軸方向に外部磁場 B_E を加えた場合に内部に誘起される磁場を求めてみる。この場合形状から超電導体円筒の軸を z 座標とする円筒座標を用いる。

超電導体内部の磁場を与える方程式(2)は

$$\frac{\partial^2 B}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B}{\partial r} = \frac{B}{\lambda^2} \quad \text{-----}(A-1)$$

1図 無限長超電導体円筒に軸方向に外部平等磁場を加えた場合の磁場

Fig.1 Magnetic fields of a superconducting hollow cylinder of infinite length for an axial external field

であり、この解は

$$B_z(r) = C_1 I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) + C_2 K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \text{-----(A-2)}$$

である。ここで I, K は変形された Bessel 関数である。

円筒内部では電流源が存在しないので

$$B_{z\text{in}} = B_{z1} \text{ (Constant)}, B_{\theta\text{in}} = 0, B_{r\text{in}} = 0$$

が得られる。

境界条件は(3)より

$$E_\theta = -\frac{r}{2} \frac{\partial B_{z\text{in}}}{\partial t} \quad \text{-----(A-3)}$$

が得られるから $Ra = a\lambda$, $Rb = b\lambda$ としたとき

$$B_{zE} = C_1 I_0(a) + C_2 K_0(a) \quad \text{-----(A-4)}$$

$$B_{z1} = C_1 I_0(b) + C_2 K_0(b) \quad \text{-----(A-5)}$$

$$-\frac{b}{2} \frac{\partial B_{z1}}{\partial t} = -\lambda^2 \left[I_1(b) \frac{\partial C_2}{\partial t} - K_1(b) \frac{\partial C_2}{\partial t} \right] \quad \text{-----(A-6)}$$

となる。

解は境界条件を与える式を解くことにより得られ

$$\frac{B_{z1}}{B_{zE}} = \frac{2[I_0(b)K_1(b) + I_1(b)K_0(b)]}{b[I_0(a)K_0(b) - I_0(b)K_0(a)] + 2[I_0(a)K_1(b) + I_1(b)K_0(a)]} \quad \text{-----(A-7)}$$

となる。近似式は、 $a, b \gg 1$ の場合 I, K の漸近展開

$$I_\nu(z) \approx \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, K_\nu(z) \approx \sqrt{\frac{\pi}{2z}} e^{-z} \text{ を用い}$$

$$\frac{B_{z1}}{B_{zE}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{2}{b \sinh(a-b) + 2 \cosh(a-b)} \quad \text{-----(A-8)}$$

で表される。さらに $a, b \gg d = a - b \gg 1$ の場合には

$$\frac{B_{z1}}{B_{zE}} = \sqrt{\frac{a}{b}} \frac{4}{b} e^{-d} \quad \text{-----(A-9)}$$

と簡単な式になる。

Appendix 2

無限長円筒一径方向外部磁場

2図の如く無限長の外径 $2Ra$ 、内径 $2Rb$ の超電導体中空円筒の外部径方向に無限遠で r 方向平等静磁場 $B_{r\infty}$ を加えた場合を考える。また、その形状から超電導体円筒の軸を z 座標とする円筒座標を用いる。

超電導体内部の磁場を与える方程式(2)は

$$\frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} - \frac{B_r}{r^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = \frac{B_r}{\lambda^2}$$

2図 無限長超電導体円筒に無限遠で $\theta = 0$ 方向に外部平等静磁場 $B_{r\infty}$ を加えた場合の磁場

Fig.2 Magnetic fields of a superconducting hollow cylinder of infinite length for an transverse external field

$$\frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} - \frac{B_\theta}{r^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{B_\theta}{\lambda^2} \quad \text{-----(A-10)}$$

(A-10)の解として $B_r = f(r)\cos\theta$, $B_\theta = g(r)\sin\theta$ を考えると

$b_1(r) = f(r) - g(r)$, $b_2(r) = f(r) + g(r)$ に対して

$$\frac{d^2 b_1(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{db_1(r)}{dr} - \frac{1}{\lambda^2} b_1(r) = 0 \quad \text{-----(A-11)}$$

$$\frac{d^2 b_2(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{db_2(r)}{dr} - \left(\frac{4}{x^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_2(r) = 0 \quad \text{-----(A-12)}$$

が得られるから、これらの解は

$$b_1(r) = B_{11} I_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) + B_{12} K_0\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \text{及び}$$

$$b_2(r) = B_{21} I_2\left(\frac{r}{\lambda}\right) + B_{22} K_2\left(\frac{r}{\lambda}\right) \quad \text{-----(A-13)}$$

で与えられる。

円筒外部の磁場は、無限遠で r 方向平等静磁場 $B_{r\infty}$ を与える解

$$B_{er}(r) = B_{r\infty} \left(1 - \frac{C^2}{r^2} \right) \cos\theta, \quad B_{e\theta}(r) = -B_{r\infty} \left(1 + \frac{C^2}{r^2} \right) \sin\theta \quad \text{-----(A-14)}$$

である。

円筒内部の磁場は中心で有限の値を有する解

$$B_{ir}(r) = B_1 \cos\theta, \quad B_{i\theta}(r) = -B_1 \sin\theta \quad \text{-----(A-15)}$$

で与えられる。

円筒内部と超電導内部での磁場の境界条件は $r = Rb = b\lambda$ で円筒内部と超電導内部の磁場が等しいと置くと

$$B_{11} I_0(b) + B_{12} K_0(b) = 2B_1 \quad \text{-----(A-16)}$$

$$B_{21}I_2(b) + B_{22}K_2(b) = 0 \quad \text{----- (A-17)}$$

電界に関する境界条件は円筒内部では(A-15)からz成分のみが存在しその大きさは

$$E_z(b) = -b\lambda \sin\theta \frac{\partial B_I}{\partial t} \quad \text{----- (A-18)}$$

であり、また、超電導内部の電場は(1), (A-17)より

$$E_z(b) = \frac{\lambda \sin\theta}{2} \left[-\frac{\partial B_{11}}{\partial t} I_0'(b) - \frac{\partial B_{12}}{\partial t} K_0'(b) + \frac{\partial B_{21}}{\partial t} I_2'(b) + \frac{\partial B_{22}}{\partial t} K_2'(b) \right] \quad \text{--- (A-19)}$$

であるから

$$-B_{11}I_0'(b) - B_{12}K_0'(b) + B_{21}I_2'(b) + B_{22}K_2'(b) = 2bB_I \quad \text{---- (A-20)}$$

である。

円筒外部と超電導外部表面での境界条件は $r=Ra=a$ で

$$B_{11}I_0(a) + B_{12}K_0(a) = 2B_{r\infty} \quad \text{----- (A-21)}$$

$$B_{21}I_2(a) + B_{22}K_2(a) = -2B_{r\infty} \frac{c^2}{a^2} \quad \text{----- (A-22)}$$

ここで $C=c\lambda$ と置き換えた。

電界に関する境界条件は円筒外部の電界が

$$E_z(a) = -a\lambda \left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) \sin\theta \frac{\partial B_{r\infty}}{\partial t} \quad \text{----- (A-23)}$$

でありまた、超電導内部の電場は(1), (A-22)より

$$E_z(a) = \frac{\lambda \sin\theta}{2} \left[-\frac{\partial B_{11}}{\partial t} I_0'(a) - \frac{\partial B_{12}}{\partial t} K_0'(a) + \frac{\partial B_{21}}{\partial t} I_2'(a) + \frac{\partial B_{22}}{\partial t} K_2'(a) - 4B_{r\infty} \frac{1}{a} \frac{c^2}{a^2} \right] \quad \text{--- (A-24)}$$

で与えられるから

$$\begin{aligned} & -B_{11}I_0'(a) - B_{12}K_0'(a) + B_{21}I_2'(a) + B_{22}K_2'(a) \\ & = 2a \left[-\left(1 - \frac{c^2}{a^2} \right) + \frac{2}{a^2} \frac{c^2}{a^2} \right] B_{r\infty} \quad \text{---- (A-25)} \end{aligned}$$

となる。

解は境界条件を与える式を解くことにより得られ

$$\begin{aligned} \frac{B_I}{B_{r\infty}} &= \frac{2[I_0(b)K_1(b) + I_1(b)K_0(b)]}{b[I_0(a)K_0(b) - I_0(b)K_0(a)] + 2[I_0(a)K_1(b) + I_1(b)K_0(a)]} \\ \frac{c^2}{a^2} &= 1 - \frac{2}{a} \frac{b[I_1(a)K_0(b) + I_0(b)K_1(a)] + 2[I_1(a)K_1(b) - I_1(b)K_1(a)]}{b[I_0(a)K_0(b) - I_0(b)K_0(a)] + 2[I_0(a)K_1(b) + I_1(b)K_0(a)]} \quad \text{----- (A-27)} \end{aligned}$$

と求める磁場が得られる。(A-26)は軸方向外部磁場の場合の解(A-7)と同一で超電導円筒の外部磁場減衰は磁場方向に因らないことが分かる。さて $a, b \gg 1$ の場合

$$\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{a} \frac{\sinh(a-b)}{\cosh(a-b)} \quad \text{----- (A-28)}$$

と簡単な式になる。さらに $a-b > 1, a, b \gg 1$ のときは

$$\frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{2}{a} \quad \text{----- (A-29)}$$

となる。3図に(A-26)より得られる遮蔽係数を示す。 $d > 1$ 程度から近似式(A-8), (A-9)が使えることが分かる。

3図 超電導体円筒の遮蔽係数 ($a=100$)

Fig.3 Shielding Factor of a Superconducting Hollow Cylinder

Appendix 3

超電導球殻-一様外部磁場

4図の如く外径 $2Ra$ 、内径 $2Rb$ の超電導球殻の外部径方向に無限遠で r 方向平等静磁場 $B_{r\infty}$ を加えた場合を考える。また、その形状から超電導球殻の中心を原点とする球座標を用いる。この時磁場は ϕ 方向成分を持たず、その大きさは r, θ のみの関数である。

超電導体内部の磁場を与える方程式(2)は

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 B_r}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_r}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} \\ & - \frac{2}{r^2} B_r - \frac{2\cos\theta}{r^2 \sin\theta} B_\theta - \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} = \frac{B_r}{\lambda^2} \\ & \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial B_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 B_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2 \sin\theta} \frac{\partial B_\theta}{\partial \theta} \\ & - \frac{B_\theta}{r^2 \sin^2\theta} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial B_r}{\partial \theta} = \frac{B_\theta}{\lambda^2} \quad \text{----- (A-30)} \end{aligned}$$

また、この場合超電導体を流れる電流は ϕ 方向となる。
(A-30)の解として $B_r=f(r)\cos\theta$, $B_\theta=g(r)\sin\theta$ を考えると

$b_1(r)=f(r)-2g(r)$, $b_2(r)=f(r)+g(r)$ に対して

$$\begin{aligned} \frac{d^2 b_1(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{db_1(r)}{dr} - \left(\frac{6}{r^2} + \frac{1}{\lambda^2} \right) b_1(r) &= 0 \\ \frac{d^2 b_2(r)}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{db_2(r)}{dr} - \frac{1}{\lambda^2} b_2(r) &= 0 \end{aligned} \quad \text{------(A-31)}$$

が得られるから、これらの解は $z=\frac{r}{\lambda}$ として

$$\begin{aligned} b_1(r) &= B_{11}b_{11}(z) + B_{12}b_{12}(z), \\ b_2(r) &= B_{21}b_{21}(z) + B_{22}b_{22}(z) \end{aligned} \quad \text{------(A-32)}$$

ここで

$$\begin{aligned} b_{11}(z) &= \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^3} \right) \sinh(z) - \frac{3}{z^2} \cosh(z), \\ b_{12}(z) &= \left(\frac{1}{z} + \frac{3}{z^3} \right) \cosh(z) - \frac{3}{z^2} \sinh(z), \quad b_{21}(z) = \frac{1}{z} \sinh(z), \\ b_{22}(z) &= \frac{1}{z} \cosh(z) \end{aligned}$$

で与えられる。

球殻の外部の磁場は、無限遠で r 方向平等静磁場 $B_{r\infty}$ を与える解

$$B_{e_r}(r) = B_{r\infty} \left(1 - \frac{2c^3}{r^3} \right) \cos\theta$$

$$B_{e_\theta}(r) = -B_{r\infty} \left(1 + \frac{c^3}{r^3} \right) \sin\theta \quad \text{------(A-33)}$$

である。

球殻の内部の磁場は中心で有限の値を有する解

$$B_{i_r}(r) = B_1 \cos\theta, \quad B_{i_\theta}(r) = -B_1 \sin\theta \quad \text{------(A-34)}$$

で与えられる。

球殻の内部と超電導球殻内部表面での境界条件は $r=Rb=b\lambda$ で球殻の内部の磁場と超電導内部の磁場が等しいと置くと

$$b_1(B) = B_{11}b_{11}(b) + B_{12}b_{12}(b) = 3B_1 \quad \text{------(A-35)}$$

$$b_2(B) = B_{21}b_{21}(b) + B_{22}b_{22}(b) = 0 \quad \text{------(A-36)}$$

電界に関する境界条件は球殻の内部の電界が(A-33)から ϕ 成分のみが存在しその大きさは

$$E_\phi(b) = -\frac{b\lambda \sin\theta}{2} \frac{\partial B_1}{\partial t} \quad \text{------(A-37)}$$

であり、また、超電導内部の電界は(1), (A-30)より

$$E_\phi(b) = -\frac{\lambda \sin\theta}{3} \left[-\frac{\partial B_{11}}{\partial t} d_{11}(b) - \frac{\partial B_{12}}{\partial t} d_{12}(b) \right]$$

$$+ \frac{\partial B_{21}}{\partial t} d_{21}(b) + \frac{\partial B_{22}}{\partial t} d_{22}(b) \quad \text{----(A-38)}$$

ここで

$$d_{11}(z) = \left(\frac{9}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \cosh(z) - \left(\frac{9}{z^4} + \frac{4}{z^2} \right) \sinh(z),$$

$$d_{12}(z) = \left(\frac{9}{z^3} + \frac{1}{z} \right) \sinh(z) - \left(\frac{9}{z^4} + \frac{4}{z^2} \right) \cosh(z)$$

$$d_{21}(z) = -\frac{\sinh(z)}{z^2} + \frac{\cosh(z)}{z}, \quad d_{22}(z) = -\frac{\cosh(z)}{z^2} + \frac{\sinh(z)}{z} \quad \text{----(A-39)}$$

である。

であるから、これらが等しいという条件から

$$B_{11}d_{11}(b) + B_{12}d_{12}(b) - B_{21}d_{21}(b) - B_{22}d_{22}(b) = \frac{3b}{2} B_1 \quad \text{----(A-40)}$$

が得られる。

球殻外部と超電導球殻外部表面での境界条件は $r=Ra=a\lambda$ で磁場が等しいことから

$$b_1(A) = B_{11}b_{11}(a) + B_{12}b_{12}(a) = 3B_{r\infty}$$

$$b_2(A) = B_{21}b_{21}(a) + B_{22}b_{22}(a) = -3B_{r\infty} \frac{c^3}{a^3} \quad \text{------(A-41)}$$

となる。

電界に関する境界条件は球殻の外部の電界が

4図 超電導体球殻の外部に無限遠で r 方向平等静磁場 $B_{r\infty}$ を加えた場合の磁場

Fig.4 Magnetic fields of a superconducting spherical shell for an homogeneous field

$$E_{\phi}(a) = -\frac{a\lambda}{2} \left(1 - \frac{c^3}{a^3}\right) \sin\theta \frac{\partial B_{r\infty}}{\partial t} \quad \text{----- (A-42)}$$

でありまた、超電導内部の電場は(1), (A-41)より

$$E_{\phi}(a) = \frac{\lambda \sin\theta}{3} \left[-\frac{\partial B_{11}}{\partial t} d_{11}(a) - \frac{\partial B_{12}}{\partial t} d_{12}(a) + \frac{\partial B_{21}}{\partial t} d_{21}(a) + \frac{\partial B_{22}}{\partial t} d_{22}(a) - \frac{9}{a} B_{r\infty} \frac{c^3}{a^3} \right] \quad \text{--- (A-43)}$$

であるからこれらが等しいとして

$$B_{11}d_{11}(a) + B_{12}d_{12}(a) - B_{21}d_{21}(a) - B_{22}d_{22}(a) b_7(a) = \frac{3a}{2} \left[\frac{6}{a^2} \frac{c^3}{a^3} + \left(1 - \frac{c^3}{a^3}\right) \right] B_{r\infty} \quad \text{----- (A-44)}$$

となる。

解は境界条件を与える式を解くことにより得られ

$$\frac{B_I}{B_{r\infty}} = \frac{4a \left[3(a-b) \left(a^3 b + 6ab - 5a^2 - 18 \right) \cosh(a-b) + Q(a,b) \sinh(a-b) \right]}{12a(a-b)(ab^3 + 6ab - 5a^2 - 18) + \{P(a,b) + P(-a,-b)\} \sinh(a-b)} \quad \text{----- (A-45)}$$

となる。

ここで

$$P(\alpha, \beta) =$$

$$(\alpha-2)(\alpha+4)(\alpha^2-3\alpha+3)(\beta^4+5\beta^3+11\beta^2+18\beta+18) e^{\alpha-\beta}$$

$$Q(a,b) = 2a^4 b^2 + 3a^4 - 15a^3 b + 3a^2 b^2 + 33a^2 - 54ab + 18b^2 + 54$$

である。

BI/B_{∞}

5 図 超電導体球殻の遮蔽係数($a=100$)

Fig.5 Shielding Factor of a Superconducting Spherical Shell

さて $a, b \gg 1$ の場合

$$\frac{B_I}{B_{r\infty}} = \frac{4a^2}{b \{ 5a \cosh(a-b) - b \cosh(a-b) + ab \sinh(a-b) \}} \quad \text{----- (A-46)}$$

で表される。さらに $a, b \gg d=a-b \gg 1$ の場合には

$$\frac{B_I}{B_{r\infty}} = \frac{a}{b} \frac{8}{b} e^{-d} \quad \text{----- (A-47)}$$

と簡単な式になる。

5図に(A-45)より得られる超電導体球殻の遮蔽係数を示す。 $d>1$ 程度から近似式(A-46)が使えることが分かる。なお超電導円筒の遮蔽係数と比較すると2倍の磁場侵入があることが分かる。

(平成7年1月27日受付、同7年4月12日再受付)

文献

- (1) de Genes: "Superconductivity of Metals and Alloys" Addison-Wesley Publishing Company 194-195, 1989
- (2) A.T. Fiory and A.F. Hebard: "Penetration depths of high Tc films measured by two-coil mutual inductances" Applied Physics Letters 52(25), 20, 2165-2167, June 1988
- (3) J.H. Claassen, J.E. Evetts, R.E. Somekh and Z.H. Barber: "Observation of the superconducting proximity effect from kinetic-inductance measurements" Physical Review B vol.44 No. 17, 9605-9608, 1991
- (4) A B Pippard: "Magnetic field penetration through a superconducting film" Supercond. Sci. Tech. 7696-699, 1994
- (5) Alan M Portis: "Electrodynamics of High Temperature Superconductors", World Scientific, Singapore 159-174, 1992
- (6) H. Matsuba, A. Yahara and D. Irisawa: "Magnetic Shielding Properties of HTc Superconductor" The 6th International Workshop on Critical Currents, Cambridge, UK, 1991

松葉博則

(正員) 1941年生、1964年東京大学工学部電子工学科卒業、1966年同大学院電気工学科修士課程修了、同年、古河電気工業株式会社に入社、現在古河電工横浜研究所応用物理研究部長。主とした専門分野は電力ケーブル絶縁、電子回路設計、超電導応用等である。電気学会、日本生体磁気学会、応用物理学会、IEEE会員、工博。