ボルツマン方程式解析における 電離係数の収束過程の最適化

正 員 三 浦 武 (秋田大)
正 員 谷 口 敏 幸 (秋田大)

Optimization of Convergence of Ionization Coefficient in a Boltzmann Equation Analysis

Takeshi Miura, Member, Toshiyuki Taniguchi, Member (Akita University)

キーワード：ボルツマン方程式，電離係数

1. はじめに

弱電離気体中の電子群の輸送現象に関して，ボルツマン方程式を用いて定常タウンゼンド実験に対応した数値解析を行う場合，方程式は係数中に電離係数 α を含む形となる⁽¹⁾。 α はボルツマン方程式の解である電子エネルギー分布 $F(\epsilon)$ より決定される未知の値である。このため，実際の計算では，何らかの方法で α の値を仮定して $F(\epsilon)$ を求め，結果として得られる α が仮定した α と一致しない場合には，その値を修正して再び $F(\epsilon)$ を求めるというステップを反復して α の値を収束させる緩和計算過程が用いられる。

上記の計算における α の仮定法に関して，従来は個々の解析者が経験に頼ったまちまちな方法を用いてきた。しかし，計算回数が最小になる最適な方法を用いることができれば，少ない計算量で経験の有無に関係なく信頼性の高い解を得られるようになると考えられる。

本研究では，ボルツマン方程式を一つのシステムとして取り扱い，システム工学の手法を利用して α を最適な値に設定する方法を考案している。その結果， α の収束過程における反復計算の回数が減少し，少ない計算量でボルツマン方程式を解くことが可能になったので以下に報告する。

2. 電離係数 α の設定法

ボルツマン方程式解析における α の緩和過程は，前節で述べたように， α に何らかの値を仮定して方程式を解き $F(\epsilon)$ を求め，新たな α を得るというステップの繰返しとなる。ここで，前者を α_{in} ，後者を α_{out} と定義すると， α_{out} は α_{in} の値によって一意に定まる。よって，ボルツマン方程式は α_{in} を入力， α_{out} を出力とする静的システムとみなされ，システムを線形と近似すると定数 a を用いて，
$$\alpha_{out} = a \cdot \alpha_{in} \quad \dots\dots\dots (1)$$
と表される。

α の収束過程において， i 回目のステップにおける α_{in} および α_{out} をそれぞれ $\alpha_{in}(i)$ ， $\alpha_{out}(i)$ とする。 $(i+1)$ 回目

のステップで用いられる入力値 $\alpha_{in}(i+1)$ は， $\alpha_{in}(i)$ を修正したものを用いることになる。この場合， α_{in} と α_{out} との差は， α_{in} が真値から離れ，必要な修正量が大きくなるほど大きな値となる。よって，一般には修正量を α_{in} と α_{out} との差に比例したものとし，定数 b を用いて $\alpha_{in}(i+1) = \alpha_{in}(i) + b\{\alpha_{out}(i) - \alpha_{in}(i)\}$ とする。この式を変形すると，

$$\alpha_{in}(i+1) = b_0 \alpha_{in}(i) + b_1 \alpha_{out}(i) \quad \dots\dots\dots (2)$$

となる。ここで， $b_0 = 1 - b$ ， $b_1 = b$ であり， α が収束した後は $\alpha_{in} = \alpha_{out}$ となるので，

$$b_0 + b_1 = 1 \quad \dots\dots\dots (3)$$

という条件を満たさなければならない。 b_0 および b_1 に関しては，従来は試行錯誤によって決定された解析者ごとに異なる定数が使用されており，必ずしも最適な値が使用されているわけではなかった。そこで，本研究では以下に示すように，システム工学の手法を用いて b_0 および b_1 の最適値を決定する。

(1)式および(2)式より，次のような方程式を構成する。

$$\begin{bmatrix} \alpha_{in}(i+1) \\ \alpha_{out}(i+1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ ab_0 & ab_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_{in}(i) \\ \alpha_{out}(i) \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (4)$$

上式は， $[\alpha_{in} \ \alpha_{out}]^T$ を状態ベクトルとしてもつシステムの状態方程式であり，その特性方程式の根の値よりシステムの応答特性を知ることができる。

(4)式に対する特性方程式の根 z は，式中の行列

$$\begin{bmatrix} b_0 & b_1 \\ ab_0 & ab_1 \end{bmatrix} \equiv A \quad \dots\dots\dots (5)$$

の固有値として与えられるので， $z=0$ および $z=ab_1+b_0$ となる。 A のすべての固有値が z 平面上の原点を中心とした単位円の内側に存在する場合にはシステムは漸近安定となり，特に原点に存在する場合に最も早く収束するので， $ab_1+b_0=0$ となればよい。 a が既知であれば，この式と(3)式より，

図 1 モデルガスの衝突断面積
Fig. 1. Cross sections of model gas.

図 2 α の収束までの計算回数の E/N 値による変化

Fig. 2. Iteration numbers for convergence of α with various values of E/N .

$$b_0 = \frac{a}{a-1} \quad \text{..... (6)}$$

$$b_1 = -\frac{1}{a-1} \quad \text{..... (7)}$$

が b_0 および b_1 の最適値となる。実際の計算では、

$$a = \frac{\alpha_{\text{out}}(i) - \alpha_{\text{out}}(i-1)}{\alpha_{\text{in}}(i) - \alpha_{\text{in}}(i-1)} \quad \text{..... (8)}$$

として各ステップごとに a の値を決定し、(2)式の $\alpha_{\text{in}}(i+1)$ の計算に用いる b_0 および b_1 の値を得ている。(8)式の分母は $\alpha_{\text{in}}(i) = \alpha_{\text{in}}(i-1)$ の場合には 0 になってしまうが、 α が収束するまでは α_{in} が常に修正されているため $\alpha_{\text{in}}(i) \neq \alpha_{\text{in}}(i-1)$ となり、 α が収束した時点では計算そのものが終了するので、実際に(8)式の分母が 0 になることはない。

3. 計算結果

2 項近似のボルツマン方程式を用い⁽¹⁾、図 1 のような衝

突断面積をもつモデルガスに関して解析を行った。 α_{in} の初期値は、求めた $F(\epsilon)$ に負になる部分が生じる場合には負にならない範囲での最小値とし、それ以外の場合には 0 とした。また、反復計算中に $|\alpha_{\text{out}} - \alpha_{\text{in}}|$ が α_{in} の 1% 以内になった場合に α が収束したと判定している。

図 2 に、 α の収束までの計算回数の印加電界 E/N の値による変化を示す。前節の手法を用いず、従来行われてきたように b_0 および b_1 を任意の定数とした場合には、 E/N の特定の範囲でしか計算回数を減少させることができないが、(6)、(7)式による最適値を用いた場合には、 E/N の広い範囲にわたって減少させることができる。

4. おわりに

α の収束過程において、ボルツマン方程式を一つの線形な静的システムとして取り扱い、その応答が最も速くなるような α の値を用いて $F(\epsilon)$ を得るという方法を考案した。前節の計算より、実際の解析において良好な結果が得られたことから、この方法は α の設定法の最適解に極めて近いものであると考えられる。

(平成 6 年 12 月 26 日受付)

文 献

- (1) 例えば、「気体放電シミュレーション技法」、電気学会技報(II 部), No. 140 (昭 57)

三 浦 武 (正員) 1991 年 3 月岩手大学大学院工学研究科修士課程修了。1993 年 3 月北海道大学大学院工学研究科博士後期課程中退。同年 4 月秋田大学鉱山学部電気電子工学科助手。

谷 口 敏 幸 (正員) 1979 年 3 月北海道大学大学院工学研究科博士課程修了。1981 年 2 月秋田大学鉱山学部電気工学科助手、現在、同電気電子工学科教授。工学博士。