サンプル数が少ない場合の 50%フラッシュオーバー電圧の推定

正員 広瀬 英雄 (広島市立大)

Estimation of 50% Flashover Voltage When the Sample Size is Small

Hideo Hirose, Member (Hiroshima City University)

The newly developed flashover voltage test methods are proposed in this paper. These methods estimate the mean value of the distribution efficiently and stably by using breakdown and non-breakdown responses when the flashover voltages follow a normal distribution with known coefficient of variation. Electrical engineers have long been using the up-and-down method developed by Dixon & Mood to assess the flashover voltage distribution when both the mean and the standard deviation are unknown. However, the method is numerically unstable in obtaining the mean value when the sample size is extremely small, e. g. 5 to 10. The proposed methods, “the mean-shooting method” and “the modified up-and-down method”, are extremely effective in a numerical stability sense comparing to the ordinary up-and-down method when the mean is unknown but the coefficient of variation is assumed to be known in advance. As for the estimating error of the mean value of the flashover voltage, the error obtained by the mean-shooting method is seen to be superior to that obtained by the ordinary up-and-down method; for instance, 15 shots in the mean-shooting method is equivalent to 20 shots in the up-and-down method.

キーワード：フラッシュオーバー試験，平均射的法，修正昇降法，感度解析

1. ま え が き

がいしなどの絶縁体の汚損時のフラッシュオーバー電圧の試験には，1 ショットに 1 時間以上かかることがあるというように長時間を要することが知られている。しかし，試験結果の精度を上げるためには（気象条件のような）試験条件のあまり変化しない間に（つまり，その日のうちに）一連の試験を終了させることが望ましい。また，それは試験費用そのものが高価であることからいえる。従来，破壊を伴う電気絶縁体の試験には Dixon らの示した昇降法（up-and-down method）⁽¹⁾ がよく使われている。しかしながら，JEC-212⁽²⁾ によると“昇降法には少なくとも 40 回程度のショット数が望ましい”〔文献（1）には 40-50 回以上が望ましいと述べられている〕ことが記載されており，この条件下で汚損がいしのフラッシュオーバー試験を行えば丸 2 日を要することになり好ましくない。実際に現場では，試験時間の制約から 5 回から 10 回程度の試験結果でも，JEC-212 に記載されている（Dixon らの導いた）近似式を用いて，おおよそのフラッシュオーバー電圧を求めざるを得ない状況にある。しかしながら，広瀬⁽³⁾ も指摘しているように，少数サンプルを用いた場合の近似式の適用には問題があることがわかっている。インパルスフラッシュオーバー電圧を統計的に精度良く求めようとする試みは今までも数多く検

討されているが^{(4)~(6)}，上記のようにきわめて少ないサンプル数での検討例はあまり見当たらない。

一般にインパルスのような課電圧に対するフラッシュオーバー電圧は正規分布に従うことが知られており，また分布の変動係数もある程度わかっている場合が多い⁽⁷⁾⁽⁸⁾。このように変動係数を既知とした場合，フラッシュオーバー電圧の確率分布を求めることは平均のみを推定することに等しくなる。昇降法は，平均と標準偏差をともに求めたいときには有効な試験法であるが，少ない試験回数（例えば 10 回以下）で昇降法試験を行えば推定精度が悪くなるばかりでなく，平均，標準偏差の最ゆう推定値が数値的に得られなくなることがある。そこで，汚損がいしのように試験に長時間を要する場合には別のもっと効率的で確実に推定値が得られる試験法の開発が強く望まれる。変動係数がある程度わかっているならば，後述するように極めて少ないサンプル数でも 50%フラッシュオーバー電圧の推定が数値的に可能である。そこで本論文では，フラッシュオーバー電圧の変動係数がある程度わかっている場合の 50%フラッシュオーバー電圧を効率的に推定する方法について考察する。

破壊，非破壊の二値の反応の結果から正規分布やロジスティック分布などの平均と分散を推定する問題は，感度解析（Sensitivity Analysis）と呼ばれており，Dixon ら⁽¹⁾，Robbins ら⁽⁹⁾，Whetherill⁽¹⁰⁾，Wu⁽¹¹⁾，Neyer⁽¹²⁾ により

様々な最適試験法が開発されている。Young ら⁽¹³⁾は、今までに提案されている方法の中から特に極値を精度良く推定する方法について考察している。しかし、いずれの論文でも平均、分散ともに未知であるという仮定のもとに議論が展開されており、5~10 回程度の少数サンプルの場合、昇降法の場合と同様、推定値が数値的に得られないことが想定される。

少数サンプルの場合の検討については、平均と標準偏差を未知として破壊、非破壊の各パターンにより最尤推定値のテーブルを与えている論文があるが⁽¹⁴⁾、この方法でも昇降幅を一定とする制約は外されていないので、基本的にはゆ度方程式を解く手間を省くためにのみ有効であって、実際に起こると推定される試験結果を用いたときの数値的な不安定性は改善されてはいない。

このように、少数サンプルでしかも分布の変動係数がある程度わかっている場合の最適試験法については、どの分野でもあまり調査されていないようである。そこで本論文では、初めに変動係数を既知と仮定したときに得られる平均の推定誤差の限界値を理論的に求め、次にその限界値に近い値が得られるような新しい試験方法をいくつか提案し、最後にそれらの試験法の妥当性についてモンテカルロシミュレーションにより確認を行う。

2. 少数サンプルにおける問題点

フラッシュオーバー電圧は平均 μ 、標準偏差 σ の正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ に従うと仮定する。そして例えば、昇降法を用いてフラッシュオーバー試験を行った結果、表 1 に示すように 1 日のうちにわずか 6 回のショットしか得られなかったとする。ところが、この結果を用いて μ と σ を(最尤法を用いて)推定しようとしても、数値的に解は得られない。このことは直感的にも、仮に $\mu=1,000$ とすれば σ を小さく設定しさえすれば、どのような値の σ でも表 1 のパターンが得られることから推察される。実際にニュートン法などの数値解法を用いて計算を実行すれば(どのような初期値を使っても)、結果としては発散するばかりである。ただ、仮に Dixon ら⁽¹⁾が与えた簡略式(p. 114, (1)式)を用いて μ と σ の推定値を計算することはできて、 $\hat{\mu}=1,000$ 、 $\hat{\sigma}=22.6$ が得られるが、これらはもちろん意味のない値である⁽³⁾。この例でわかるように、破壊、非破壊の二値のデータを用いて μ と σ が数値的に推定できるにはある条件

が必要である。この条件については文献(15)で一般的に調べられており、次のように示されている。

いま、試験電圧レベルを x 、そのレベルで試験したときフラッシュオーバーした回数を n 、しなかった回数を m とする。このとき、 μ と σ が得られるには、ある i, j, k, l が存在して、 $n_i m_j \neq 0$ ($x_i < x_j$)、 $m_k n_l \neq 0$ ($x_k < x_l$) が必要である⁽¹³⁾⁽¹⁵⁾。特に、昇降法の場合には $n_i m_i \neq 0$ となる電圧レベルの数が 2 以上である必要がある⁽³⁾。

表 1 のパターンでは上の条件が満たされていない。さて、実際に想定される少数サンプルでの昇降法のパターンで、どの程度の割合このように推定値が求められないことがあるのであろうか。表 2 に適当な昇降幅を設定したときのシミュレーション結果⁽³⁾を示す。初期設定値は推定値が出やすくなるように $\mu \pm \sigma/2$ の間から一様に選んでいる。実際の試験では、初期設定値は μ から大幅にずれる恐れがあり、また昇降幅も d に比べて大きくなることも予想されるので、表 2 の結果よりも更に悪くなることが予想される。10 回以下のショットでは μ と σ を同時に推定するのはほとんど絶望的であることがわかる。

しかしながら、いま分布の変動係数 $c = \sigma/\mu$ がある程度わかっていると仮定すると(ここでは仮に 5% と仮定する)、最尤法を用いれば、表 1 のパターンでも μ と σ は計算できて、

$$\hat{\mu}=1,000.6, \hat{\sigma}=50.0 \dots \dots \dots (1)$$

となる。最も知りたい値が平均 μ であるとすれば、変動係数が 2% から 10% の間で変化しても、表 3 に示すとおり μ の推定値にあまり大きな変化はなく、1,000 から 1,012 の間となる。つまり、変動係数にある程度のミスマップがあっても平均は精度良く推定できることがわかる。このように、インパルスなどにみられる変動係数の情報を有効に利用することによって、今まで推定できなかった 50% フラッシュオーバー電圧が数値的に得られることがわかる。第 3 章では、少数サンプルを想定したときの μ の推定誤差

表 2 昇降法で最尤推定値が求められない割合
Table 2. Ratios that the maximum likelihood estimates cannot be obtained in the up-and-down method.

	$N=10$	$N=20$	$N=30$	$N=40$
$d/\sigma=0.5$	303/1,000	32/1,000	6/1,000	2/1,000
$d/\sigma=1.0$	519/1,000	177/1,000	54/1,000	23/1,000
$d/\sigma=1.5$	698/1,000	389/1,000	233/1,000	146/1,000
$d/\sigma=2.0$	853/1,000	635/1,000	484/1,000	345/1,000

d : 昇降幅

表 3 変動係数既知としたときの推定値

Table 3. Estimates when the coefficient of variation is known.

	$c=0.02$	$c=0.04$	$c=0.06$	$c=0.08$	$c=0.10$
$\hat{\mu}$	1,000.0	999.9	1,001.9	1,006.3	1,012.0
$\hat{\sigma}$	20.0	40.0	60.1	80.5	101.2

c : 変動係数

表 1 絶縁破壊試験例(最尤推定値が求められない場合)
Table 1. An example of the breakdown voltage test (a case that the maximum likelihood estimates cannot be obtained).

	1 回目	2 回目	3 回目	4 回目	5 回目	6 回目
電圧 (kV)	850	900	950	1,000	1,050	1,000
	S	S	S	S	F	F

F: 破壊したとき, S: 破壊しなかったとき

の限界値について述べ、第4章で変動係数の情報を利用したときに μ を最適に推定する方法とその妥当性について述べる。

3. 理論的な推定誤差の限界値

まず、最尤法を用いてフラッシュオーバー電圧の平均 μ と標準偏差 σ を同時に推定することを考える。このとき、ゆう度関数を L とすれば、

$$L = \prod_i \binom{n_i + m_i}{n_i} p_i^{n_i} q_i^{m_i} \dots\dots\dots (2)$$

$$p_i = F(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{x_i} \exp\left\{-\frac{(s-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} ds \dots\dots\dots (3)$$

$$q_i = 1 - p_i \dots\dots\dots (4)$$

で与えられ、推定値 $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ はゆう度方程式

$$\partial \log L / \partial \mu = 0, \partial \log L / \partial \sigma = 0 \dots\dots\dots (5)$$

を解いて得られる。このゆう度方程式が解をもつための条件は第2章に述べたとおりである。

観測値を基にした推定値の近似推定誤差は次の情報行列

$$-\left[\begin{array}{cc} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial \mu} \\ \frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu \partial \sigma} & \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \end{array} \right]_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} \dots\dots\dots (6)$$

の逆行列の対角要素の平方根を用いて求められる。ここに、

$$\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2} = \sum_i \left\{ -\left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{q_i^2} \right) \frac{z_i^2}{\sigma^2} + \left(-\frac{n_i}{p_i} + \frac{m_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{\sigma^2} t_i \right\} \dots\dots\dots (7)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial \mu} &= \sum_i \left\{ -\left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{q_i^2} \right) \frac{t_i z_i^2}{\sigma^2} + \left(-\frac{n_i}{p_i} + \frac{m_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{\sigma^2} (t_i^2 - 1) \right\} \\ &\dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} &= \sum_i \left\{ -\left(\frac{n_i}{p_i^2} + \frac{m_i}{q_i^2} \right) \frac{t_i^2 z_i^2}{\sigma^2} + \left(-\frac{n_i}{p_i} + \frac{m_i}{q_i} \right) \frac{z_i}{\sigma^2} (t_i^3 - 2t_i) \right\} \\ &\dots\dots\dots (9) \end{aligned}$$

$$t_i = (x_i - \mu) / \sigma, z_i = (1 / \sqrt{2\pi}) \exp(-t_i^2 / 2) \dots\dots\dots (10)$$

である。

次に、変動係数 $c = \sigma / \mu$ が既知であると仮定できるとき、ゆう度方程式は「ゆう度を $L^*(\mu) = L^*(\mu, \sigma(\mu))$ とすると」,

$$\frac{d \log L^*}{d\mu} = \frac{\partial \log L}{\partial \mu} + c \frac{\partial \log L}{\partial \sigma} = 0 \dots\dots\dots (11)$$

のみであり、方程式の解が得られるにはある i, j が存在して、 $m_i n_j \neq 0, (x_i \leq x_j)$ が必要である。また、 μ の近似推定誤差は、

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{d^2 \log L^*}{d\mu^2} \right)^{-1/2} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} \\ &= \left[-\left(\frac{\partial^2 \log L}{\partial \mu^2} + 2c \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma \partial \mu} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + c^2 \frac{\partial^2 \log L}{\partial \sigma^2} \right) \right]^{-1/2} \Big|_{(\hat{\mu}, \hat{\sigma})} \dots\dots\dots (12) \end{aligned}$$

で与えられる。推定誤差の限界値を求めるために、最も簡

単な $m_i n_j \neq 0$ となる電圧レベルの数が1の場合について次に考察する。

<3・1> 1点サンプリングによる μ の推定値の漸近誤差 $e(\mu)$

いま、サンプリング点を $x = \mu + t\sigma$ の1点とし、その点で試験すればサンプル数 $N \{ N = \sum_i (n_i + m_i) \}$ が大きいとき、 $\hat{\mu}$ の推定誤差は(12)式で評価できる。変動係数 c をパラメータにしたときの t に対する

$$e(\mu) = e_N(\mu) / (\sigma \sqrt{N}) \dots\dots\dots (13)$$

の値を図1に示す(参考のため、図には標準偏差が既知(定数)の場合を並記している)。 $e(\mu)$ は1サンプルデータ当たりの誤差に相当する。また、 $e_N(\mu)$ は

$$e_N(\mu) = \sqrt{-(d^2 \log L^* / d\mu^2)^{-1}} \dots\dots\dots (14)$$

で与えられる漸近誤差である。図によると、 c の値によって $e(\mu)$ が最小になるときの t の値が変化していることがわかる。図2に、 c に対する $e(\mu)$ が最小になるときの t の値、およびそのときの $e(\mu)$ の値を示す。例えば、 $c = 0.05$ のとき、推定誤差が最小になるように試験するにはサンプリング点 x を $\mu + 0.137\sigma = 1.0068\mu$ に設定すればよいことがわかる。従って、試験は平均 μ をわずかに上

図1 1点サンプリングによる漸近推定誤差 $e(\mu)$
Fig. 1. Asymptotic error $e(\mu)$ obtained by 1 point sampling.

図2 $e(\mu)$ が最小になる t の最適値
Fig. 2. Optimum value of t when $e(\mu)$ is minimum.

表 4 N 有限の場合の $e(\mu)$ の最適値
Table 4. Optimum values of $e(\mu)$ when N is finite.

	σ 既知	$c=0.025$	$c=0.05$	$c=0.075$	$c=0.1$
$N=10$	0.430	0.429	0.429	0.428	0.428
$N=15$	0.344	0.344	0.343	0.341	0.340
$N=20$	0.293	0.293	0.292	0.291	0.290
$N=30$	0.235	0.235	0.235	0.234	0.233
$N=40$	0.202	0.202	0.202	0.201	0.200

回わる点で集中的に行うのが望ましい。ただし、市原ら⁽⁷⁾、鈴木ら⁽⁸⁾も示しているように、気中のフラッシュオーバー電圧に見られる変動係数は $c \leq 0.1$ の範囲であることが多く、その範囲で考えた $e(\mu)$ の最小値と μ の点で試験したときの $e(\mu)$ との間にそれほど大きな差異はなく、平均 μ の点で試験を行っても推定精度はほぼ同じになる。つまり、変動係数が $c \leq 0.1$ の範囲であれば、実用的には平均 μ の点の周りで集中的に試験を行ってもかまわない。

〈3・2〉 サンプル数 N が有限の場合の μ の推定値の近似期待誤差 $e_N(\mu)$ サンプル数 N が小さい場合、1 ショット当たりの推定誤差の期待値は図 1 の値よりも悪くなることが想定される。推定値の近似期待誤差 $e_N(\mu)$ は次のように計算する。

1 点 $x = \mu + t\sigma$ で試験するものとする。 $N = n_{(j)} + m_{(j)}$ が一定値のときの $n_{(j)}$ と $m_{(j)}$ との組合せにより、平均 $\hat{\mu}_{(j)}$ を $\hat{\mu}_{(j)} = x / \{1 + cF^{-1}(\hat{p}_{(j)})\}$, $\hat{p}_{(j)} = n_{(j)} / N$ (15) により推定する。点 x での μ の推定値 $\hat{\mu}(x)$ の平均二乗誤差 (MSE) は、 x で 2 項確率を $B(N, n_{(j)}, F(t))$ とするとき、

$$\text{MSE}(\hat{\mu}(x)) = \sum_{j=1}^{N-1} B(N, j, F(t)) (\hat{\mu}_{(j)} - \mu)^2 \quad \text{..... (16)}$$

により求められる。期待誤差 $e_N(\mu)$ は $\text{MSE}(\hat{\mu}(x))$ の平方根で与えられる。ただし、ここでは $n_{(j)}m_{(j)} = 0$ となる場合には計算できないのでそれは除外している。 N が小さく、 x が μ から離れるときには $n_{(j)}m_{(j)} = 0$ となる場合の確率は無視できなくなるので注意を要する。このように計算した $e_N(\mu)$ の最適値を表 4 に示す。例えば、 $c=0.05$, $N=20$ のとき、 $e_N(\mu)$ の最適値は $e_{20}(\mu)=0.292$ と計算される。これらの値が実際の試験で求められる推定誤差の限界値となる。

4. 新しい試験法とモンテカルロシミュレーション

〈4・1〉 新しい試験法 第 3 章の結果をふまえてここでは以下に示す三つの新しい試験法を提案し、それぞれの試験での平均の推定精度について検討する。それらの三つの方法のシミュレーションでは、平均の推定精度の比較を行うため、初期設定電圧から最初にフラッシュオーバーする電圧に到達するまでの過程はすべて同じとした。それは、初期上昇幅 α を 0.4σ から 3.2σ までの間であらかじめ決めておき、フラッシュオーバーする電圧まではその幅を 1 ステップ上がるごとに $\beta(=1.0, 1.5, 2.0)$ 倍とする方法である。 $\beta > 1$ とすることによって早く平均に到達する。また、実

際のフラッシュオーバー試験に則するように、初期試験電圧は平均 μ よりもかなり低い値(ほとんどフラッシュオーバーしない電圧)に設定する。ここでは、 $\mu - 6\sigma$ から $\mu - 4\sigma$ までの間で一様を選んだ。シミュレーションは、 $\sigma=1$, $\mu=\sigma/c$ の下(例えば変動係数が 5% のときは $\mu=20$)で行った。

(1) 方法 A 最初にフラッシュオーバーした電圧 x_i の次の電圧 x_{i+1} はそのときの電圧昇降幅 d_i を $\gamma(=0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0)$ 倍して下げる。以下、 x_{i+1} は x_i でフラッシュオーバーしたら下げ、フラッシュオーバーしなかったら上げる。

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i + \gamma d_i & (x_i \text{ でフラッシュオーバーせず}) \\ x_{i+1} &= x_i - \gamma d_i & (x_i \text{ でフラッシュオーバー}) \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (17)}$$

最後のステップ x_N でフラッシュオーバーした場合、フラッシュオーバーしなかった最新の電圧 x_{non-BD} と x_N との平均を、フラッシュオーバーしなかった場合、フラッシュオーバーした最新の電圧 x_{BD} と x_N との平均を μ の推定値とする。従って、推定の過程では全く繰り返しの計算を必要としない。変動係数の情報も必要としていない。

この方法は、Robbins ら⁽⁹⁾ の方法

$$\left. \begin{aligned} x_{i+1} &= x_i - k(y_i - p)/i \\ [y_i &= 1 \text{ (} x_i \text{ でフラッシュオーバー),} \\ y_i &= 0 \text{ (} x_i \text{ で非フラッシュオーバー)],} \\ p &= 0.5, \mu \text{ の推定値は } x_N \text{ とする} \end{aligned} \right\} \quad \text{..... (18)}$$

の一つの変形になっている。 $N=10$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=0.5$ のときのシミュレーションの一例を下に示す。

i	n_i	m_i	x_i	$\hat{\mu}$
1	0	1	15.489	
2	0	1	17.489	
3	1	0	21.489	
4	1	0	19.489	
5	0	1	18.489	
6	0	1	18.989	
7	0	1	19.239	
8	0	1	19.364	
9	0	1	19.427	
10	1	0	19.458	19.442

(2) 方法 B 電圧の昇降は方法 A と同じとする。 μ の推定には最尤推定値を用いる。一連の試験が終了した段階でゆう度方程式を 1 度だけ解く必要がある。特に $\beta=1$, $\gamma=1$ の場合は Dixon ら⁽¹⁾ の示した昇降法に相当する。そこで、この方法 B をここでは修正昇降法(modified up-and-down method)と呼ぶ。この方法は、文献(16)に見られる方法と基本的には同じであるが、文献(16)では μ と σ ともに未知としてゆう度方程式を解いているのに対して、ここでは変動係数を既知としてゆう度方程式を解いているところが異なっている。

$c=0.05$, $N=10$, $\alpha=1$, $\beta=2$, $\gamma=0.5$ のときのシミュレーションの一例を下に示す。

i	n_i	m_i	x_i	$\hat{\mu}$
1	0	1	15.489	
2	0	1	17.489	
3	1	0	21.489	
4	1	0	19.489	
5	0	1	18.489	
6	0	1	18.989	
7	0	1	19.239	
8	0	1	19.364	
9	0	1	19.427	
10	0	1	19.458	19.795

(3) 方法C 最初にフラッシュオーバーした電圧 x_i の次の電圧 x_{i+1} は, $x_1, x_2, \dots, x_i$ を用いて μ を最適に推定する点の最優秀推定値により決定する。従って, 最初にフラッシュオーバーしたステップから毎回ゆ度方程式を解く必要がある。

この方法は Wu の方法⁽¹¹⁾

$$x_{i+1} = \hat{F}_i^{-1}(p),$$

$$(\hat{F}_i(x) = F(x | \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i), p=0.5, \hat{\mu}_i, \hat{\sigma}_i \text{ は } x_1, x_2, \dots, x_i \text{ から推定})$$

.....(19)

の一つの変形である。 μ の最適推定点は μ の近辺なので, ここではこの方法を平均射的法(mean-shooting method)

図3 方法Aによる平均 μ の RMSE
Fig. 3. RMSE of mean μ by the method A.

と呼ぶことにする。

方法Cでは、変動係数 c の値によって μ の最適推定点が異なっているの、ここでは、

- (i) μ の最適推定点を c の値に無関係に μ に設定する方法(方法C0)
- (ii) $c=0.05$ のときの最適設定値 $x=1.0068\bar{\mu}$ に設定する方法(方法C1)
- (iii) $c=0.1$ のときの最適設定値 $x=1.0270\bar{\mu}$ に設定する方法(方法C2)

の三つの場合を考慮した。 $c=0.05$, $N=10$, $\alpha=1$, $\beta=2$ のときの方法C1の場合のシミュレーションの一例を次に示す。

i	n_i	m_i	x_i	$\bar{\mu}$
1	0	1	15.489	
2	0	1	17.489	
3	1	0	21.489	19.442
4	1	0	19.575	18.493
5	0	1	18.619	19.134
6	0	1	19.265	19.605
7	0	1	19.739	19.985
8	0	1	20.122	20.310
9	1	0	20.449	20.089
10	1	0	20.226	19.909

図4 方法Bによる平均 μ の RMSE
Fig. 4. RMSE of mean μ by the method B.

〈4・2〉 モンテカルロシミュレーション サンプル数 N は 10, 15, 20 の 3 ケース。各ケースに対しての試行回数は 10,000 回。誤差の評価は、平均二乗誤差の平方根 (RMSE) で与える。

図 3 に方法 A のシミュレーション結果を示す。この方法では RMSE の α, β への依存度は少ないが、 γ への依存度は高く、 γ が 0.7 から 0.8 の間で最適な結果が得られている。このとき、RMSE の最小値は $N=10$ で 0.56, $N=15$ で 0.43, $N=20$ で 0.37 である。

図 4 に方法 B のシミュレーション結果を示す。この方法でも、方法 A と同様 α, β への依存度は少ない。しかし、 γ への依存度は少しはあるものの方法 A に比べそれほど大きくはない。RMSE は γ が 0.6 から 0.8 の間のときに最小になり、その最小値は $N=10$ で 0.52, $N=15$ で 0.39, $N=20$ で 0.32 である。

図 5 に方法 C0 のシミュレーション結果を示す。

図 5 方法 C0 による平均 μ の RMSE
Fig. 5. RMSE of mean μ by the method C0.

RMSE の最小値は $N=10$ で 0.49, $N=15$ で 0.37, $N=20$ で 0.31 である。この方法では RMSE は α が 1 以上であれば α, β にほとんど依存せずほぼ一定値をとる。他の二つの方法 (C1, C2) による結果もほとんど方法 C0 の結果と変わらなかったなのでここでは省略している。

方法 B, C については特に $N=20$ 位の大きさのサンプルになると〈3・2〉節で求めた近似期待誤差にかなり近くなっており、これらはほぼ最適な試験設計であると考えられる。

5. 考 察

〈5・1〉 昇降法との推定精度の比較 方法 B の中で $\beta = \gamma = 1$ のときは昇降法に相当するので、昇降法の結果を上の方の方法で得られた結果と比較することができる。Dixon ら⁽⁴⁾ が与えた簡略式 (p. 114, (1) 式) を用いて平均 μ の最尤推定値を計算し、その RMSE を求めた結果が図 6 である。RMSE の最小値は $N=10$ で 0.58, $N=15$ で 0.44, $N=20$ で 0.37 となっている。昇降法の結果は、方法 B, C のいずれの最適値にも劣る結果となっており、方法 A とはほぼ同等である。方法 A が変動係数の情報を用いていないことを考慮すると、方法 A が昇降法と同等の推定精度を示すのは自然に思われる。

方法 C のように最適と考えられる方法を用いたシミュレーション結果と比較すると、推定精度は昇降法に比較していくぶん改善されていることがわかる。しかし、その程度は劇的なものではない。例えば、20 回の昇降法試験は方法 C のほぼ 15 回に相当する試験と等価である。

〈5・2〉 数値的安定性 推定精度の改善の程度は少ないものの、変動係数が既知であることを用いた本論文で提案する方法の大きな利点は、極めて少ない試験回数でも推定値が数値的に安定に求められるということを初めに述べた。シミュレーションによりこのことを再確認すると、例えば、昇降法に相当する $\alpha = \beta = \gamma = 1$ の場合、平均が未知

図 6 昇降法による平均 μ の RMSE
Fig. 6. RMSE of mean μ by the up-and-down method.

(a) c を固定したときの α 依存度 (b) α を固定したときの c 依存度図7 変動係数のミスマッチによる平均 μ の RMSE の影響

Fig. 7. Variation of RMSE of mean μ under the misspecification of the coefficient of variation.

で変動係数が既知($c=0.05$)のときの平均射的法(方法C0)では、推定値が求められなかったのは、10,000回のシミュレーション中、 $N=10$ のときわずか8回、 $N=15$ のとき3回、 $N=20$ のとき3回であった。この結果は、表2を参考にすると、方法C0が極めて安定に推定値を求めることのできる試験方法であることを示している。

〈5・3〉 変動係数のミスマッチによる影響 第2章の1例で、 μ の推定値は変動係数の変化によりあまり影響を受けていないことを述べた。ここでは、変動係数が真値とずれていた場合に μ の推定値がどの程度影響を受けているかをモンテカルロシミュレーションによって調査した。

図7(a)は真の変動係数 c が0.05であるにもかかわらず、 $c=0.03$ 、および $c=0.1$ と誤った値を想定して、方法C0のシミュレーションを行った結果を、特に $N=10$ 、 $\beta=2$ の場合について示したものである。 $c=0.05$ のときのRMSEのおおよその最適値は約0.51であるのに対して、変動係数を0.03から0.1までの間で大幅に見積もり誤った場合の条件下でもRMSEは約0.55であり、それほど大きな影響を受けていない。この傾向は他の条件下でも同様であった。

図7(b)は c を固定したときのRMSEの α 依存度を示しているが、この図を更にわかりやすくするために、(b)

図で、 α を固定したときのRMSEの c 依存度を示した。図からわかるように $c=0.05$ (変動係数を真値と見積もったとき)付近で、当然想定されるようにRMSEは極小値を示している。また、変動係数を高く見積もり誤ったほうが、低く見積もり誤ったときよりもRMSEは小さくなる傾向がわかる。

例えば、実際の試験を想定して、 $\mu=1,000$ kV、 $\sigma=50$ kV($c=0.05$)のときの具体例を考えてみる。方法C0のシミュレーションによれば、 $N=10$ 、 $\alpha=1.0$ 、 $\beta=2.0$ 、初期試験電圧を700 kVから800 kVの間としたときで、 $c=0.05$ と見積もったときのRMSEは0.531であるから、 μ は90%の確率でほぼ956 kVから1,044 kVの間で推定できる。一方、 $c=0.10$ と見積り誤った場合でも、同様の区間はほぼ954 kVから1,046 kVであり、ほとんど変化はないと思ってよい。

これらのことから変動係数のミスマッチによる影響は少ないことがわかり、従って、ある程度の変動係数を想定して方法Bなり方法C0を用いれば、安定的に精度の良い平均 μ の最ゆう推定値が得られることがわかる。

6. ま と め

1ショットに長時間を要するフラッシュオーバー電圧を推定する試験には昇降法が従来から使われていたが、もしフラッシュオーバー電圧の分布(正規分布)の変動係数があらかじめある程度わかっている場合、最初にフラッシュオーバーを起こした段階からその都度平均の最ゆう推定値を求め、その点で試験を行うことを続ける平均射的法か、昇降法の幅を各ステップごとに0.6から0.8倍の間で縮小して、最後のステップで平均の最ゆう推定値を求める修正昇降法を用いることで、極めて少ないサンプル数でも、昇降法に比較して効率的に平均を推定することができる。これらの方法は理論的に得られる近似期待誤差にかなり近いのではほぼ最適な試験設計であるといえる。最初に見積もった変動係数がある程度真値と異なっても平均の推定誤差はそれほど影響を受けないので、提案する方法は、意味のある平均の推定値を数値的に確実に得られるという点で有用である。

本研究は、著者が(株)高岳製作所に在籍中に行ったものである。

(平成6年11月24日受付、同7年1月23日再受付)

文 献

- (1) W. J. Dixon & A. M. Mood: "A Method for Obtaining and Analyzing Sensitivity Data", *J. Amer. Statistical Association*, 43, 109-126 (1948)
- (2) 「電気学会電気規格調査会標準規格、インパルス電圧電流試験一般」, JEC-212, p. 58 (昭57)
- (3) 広瀬: 「昇降法使用時の注意点について」, 昭58電気学会東京支大, No. 63 (昭58)
- (4) G. W. Brown: "Testing for the Cumulative Flashover Distribution", *IEEE Trans. Power Apparatus Syst.*, PAS-89, 1186 (1970)
- (5) N. Hylten-Cavallius & F. A. Chagas: "Possible Precision of Statistical Insulation Test Methods", *ibid*, PAS-102, 2372 (1983)

- (6) 広瀬:「昇降法と補間法を組み合わせたインパルスフラッシュオーバー電圧の推定」, 電学論 A, **105**, 581 (昭 60)
- (7) 市原・森:「開閉サージのフラッシュオーバー確率について」, 電学誌, **88**, 720 (昭 43)
- (8) 鈴木・大内・岸嶋・安生:「多連ギャップによる開閉サージフラッシュオーバー確率の検討」, 同上, **89**, 1142 (昭 44)
- (9) H. Robbins & S. Monro: "A Stochastic Approximation Method", *Annal. Mathematical Statistics*, **22**, 400 (1951)
- (10) G. B. Whetherill: "Sequential Estimation of Quantile Response Curves", *J. Royal Statistical Society, Ser-B*, **25**, 1 (1963)
- (11) C. F. J. Wu: "Efficient Sequential Designs With Binary Data", *J. Amer. Statistical Association*, **80**, 974 (1985)
- (12) B. T. Neyer: "A D -Optimality-Based Sensitivity Test", *Technometrics*, **36**, 61 (1994)
- (13) L. J. Young & R. G. Eastering: "Estimation of Extreme Quantiles Based on Sensitivity Tests: A Comparative Study", *ibid.*, **36**, 48 (1994)
- (14) W. J. Dixon: "The Up-and-Down Method for Small Samples", *J. Amer. Statistical Association*, **60**, 967 (1965)
- (15) M. J. Silvapulle: "On the Existing of Maximum Likelihood Estimation for the Binomial Response Model", *J. Royal Statistical Society, Ser-B*, **43**, 310 (1981)

- (16) 須崎・内藤:「最尤法を用いたフラッシュオーバー電圧の検討」, 平 5 電気学会全大, No. 1289

広瀬 英雄 (正員) 1951 年 12 月 2 日生。都城高専電気工

学科, 九州大学理学部数学科卒業後, 1977 年 4 月 (株)高岳製作所入社。コンピュータシステム開発に携わった後, 電界, 耐震, 流体などの場の計算, 電力系統の過渡現象などの数値計算, 絶縁物の信頼性解析などの業務に従事。1986 年同社数理情報研究室長, 1988 年副技師長。1989 年 9 月~1990 年 9 月アメリカ・スタンフォード大学統計学科に客員研究員として滞在。1995 年 4 月より広島市立大学情報科学部情報数理学科教授。工学博士。1987 年電気学会論文賞受賞。情報処理学会, 日本統計学会, 日本数学会, 応用統計学会, 応用数理学会, IEEE, ASA, IMS, AAAS 会員。