ヘリシティー注入配位型低アスペクト比トカマクの 平衡解析

学生員 小野 亮 (東京大)
正員 桂井 誠 (東京大)

Analytical Expression of Equilibrium Configuration of Low Aspect Ratio Tokamaks with Helicity Injection

Ryo Ono, Student Member, Makoto Katsurai, Member (University of Tokyo)

Plasma current drive is one of critical problems to be solved in the development of fusion reactors under steady operation of low aspect ratio tokamak. DC helicity injection that has been used for the current drive of spheromak plasmas has also been successfully applied to low A tokamak plasmas. In this paper, the analytical expression of the equilibrium configuration has been derived for low A tokamak plasmas with a rectangular cross section. Two types of electrode configurations for the helicity injection, one the coaxial type, and the other the polar type, are considered. The condition of q profiles that provide the reversal magnetic shear are studied.

キーワード: 低アスペクト比トカマク、ヘリシティー注入、同軸電極配位モデル、内側電極配位モデル、安全係数

1. はじめに

最近、磁気核融合プラズマ閉じ込め研究において、アスペクト比 ($A \equiv \text{大半径}/\text{小半径}$) の低いトカマク方式が着目されている^(1,2)。通常のアスペクト比3程度のトカマクにおいては、中央部に設置した変流器コイルによってプラズマ電流の駆動を行っている。しかし、アスペクト比が1.5程度以下の低アスペクト比トカマクにおいては、中心対称軸に沿っての外部スペースは狭く、トロイダル磁界発生用導体の周囲には大容量の変流器を設置する余裕がない。よってプラズマ電流の長時間駆動には変流器に代わる別の方法が検討されねばならない。その一つとして提案されているものがヘリシティー注入法である。

これはもともと、中心対称軸周辺に如何なる構造物も設置せず、従って中央部に変流器設置がない、スフェロマック配位を対象にしていた⁽³⁾。具体的に最初に実証されたのは図1(a)に示す同軸型プラズマ銃スフェロマック配位である。ここでは、内外電極を通してプラズマ内にポロイダル電流の直流電流 I_e を注入する。この注入電流は自分が作るトロイダル磁界の力でプラズマ内に侵入しようとするが、そこでMHD的磁気緩和現象を引き起こし、ポロイダル磁界成分の発生、すなわちトロイダル成分を有するプラズマ電流駆動が行われる。

ここで重要な役割を果たす磁気緩和による配位調整機能は、そもそも1970年代に逆磁場ピンチ(RFP)の形成に関

連してJ.B.Taylorによって提唱されたもので⁽⁴⁾、さらにその元を辿ると天体プラズマにおけるWoltjer⁽⁵⁾の無力磁場配位理論に行き着く。この理論では、初期に力学的平衡から外れた状態にいる磁化プラズマは、磁気ヘリシティーを一定に保って磁気エネルギー最小となる配位へと自動的に変化することを述べており、その最終状態は、固有値が空間によらない一定値を有する無力配位(force free)となることが示されている。今日核融合プラズマ研究分野においてこの状態はTaylor状態とも呼ばれている。この理論はその後、外部電流が出入りしているような場合に拡張され、内部において電流の抵抗減衰があるような場合においても、電流注入によってそれが保持されることが指摘されるにいたった。この場合、抵抗によるヘリシティー損失を外部電流によって補うことになり、この方法によるプラズマ電流の駆動をヘリシティー注入法と呼ぶ。

上記同軸プラズマ銃方式では、電極を通しての電流注入でこのヘリシティーが注入されることになる。この方式と異なる配位として図1(b)に示すフラックスコアー・スフェロマック⁽⁶⁾(バンピーZピンチ⁽⁷⁾)がある。ここにおいては、プラズマ容器と中心対称軸が貫通する両極部に電極を設置してその間に外部電流を注入する。この配位の生成は、すでに実験的に確認されている⁽⁸⁾。

さて、同じ原理が低アスペクト比トカマクの電流駆動に適用出来ることが最近明らかにされている。具体的な構造としては上述の図1に対応して図2のようなものが可能であ

図1 ヘリシティー注入型スフェロマック。(a) 同軸電極配位、(b) 両端電極配位。

Fig.1. Helicity injection spheromak. (a) Coaxial electrode type, and (b) polar electrode type.

図2 ヘリシティー注入型(低アスペクト比)トカマク。(a) 同軸電極配位、(b) 両端電極配位。

Fig.2. Helicity Injection (low aspect ratio) tokamak. (a) Coaxial electrode type, and (b) polar electrode type.

る。図1との違いはプラズマ容器がトーラス形状となって中心対称軸に沿ってトロイダル磁界発生用導体が設置されており、トロイダル磁界発生電流 I_z が流れるようになっている点である。最初にワシントン大学の HIT 装置 (HIT: Helicity Injection Tokamak) によって、図2(a)の構造のもとで実験的研究が行われ、配位生成・維持についての原理検証が行われている⁽⁹⁾。このようにヘリシティー注入は電流駆動に有用である他に、安全係数 q の分布の制御が可能となって、エネルギー閉じ込め特性への好影響という期待もあり、次世代のメガアンペア装置への適用が検討されている。

本論文においては以上のような背景のもとで、図2をモデル化した図3の諸構造を対象にして、今後の理論的検討の出発点となる平衡配位の解析解を求める。解の求めやすさの点から、いずれにおいても矩形断面を仮定して、電極は図2とは異なって側面に配置されているものとした。図3(b-2)のモデルは解析法が(b-1)と同じであるため、今回は計算を省略する。以下では、2章においては同軸電極配位タイプ(HITタイプ)の平衡解を、3章においては内側電極配位タイプ(フラックスコアー・スフェロマック配位タイプ)の平衡解を示す。4章においては解析をもとにフラックスプロットと安全係数 q の分布を示し、特にトカマクにおいて最近注目されている、径方向に対して q 分布が負の勾配を持つ領域⁽¹⁰⁾を探求する。5章においては結言を述べる。

2. 同軸電極配位の平衡解析

(2.1) 同軸電極配位モデル 基本式は無力磁界配位に対するグラッド・シャフラノフ方程式である⁽¹¹⁾。軸対称トーラスにおいて、磁気面 Φ とトロイダル磁界 B_φ の間に

$$B_\varphi = \frac{\kappa \Phi(r, z)}{r} \quad (\kappa > 0: \text{const}) \quad (1)$$

の関係を仮定すると、無力磁界配位 ($\nabla \times \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B}$; κ は空間によらない固有値) が導ける。このとき、グラッド・シャフラノフ方程式は次式ようになる。

$$r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} + \kappa^2 \Phi = 0 \quad (2)$$

これを、境界条件として境界上の Φ を与えて解くことになる。座標系としては (r, z) の円柱座標を考え z 軸を中心対称軸とし、プラズマは長さ L 、内半径 b 、外半径 R の矩形断面を有するものとする。ここで z 軸に沿って外部トロイダル磁界発生のための電流 I_z を流し、それにより(2)式で計算される内電極 $r=b$ 上での Φ を Φ_0 とする。

図4のように内外電極 E_1, E_2 とし、その z 方向の幅を L_e とする。この同軸ガンによるヘリシティー注入を模擬したモデルを考え、平衡解を(2)式を解くことにより導きだす。

図4のモデルに関して(2)式を変数分離し一般解を求めると、次式のような関数形が求まる。

$$\Phi(r, z) = r \{ a_J J_1(\nu r) + a_N N_1(\nu r) \} \sin \mu z + b_0 \sin \kappa z + b_1 \cos \kappa z \quad (3)$$

ここで、 a_J, a_N, μ, b_0, b_1 は定数であり、 J_1, N_1 はそれぞれ1次の第1種ベッセル関数、ノイマン(第2種ベッセル)関

図3 (a) 同軸電極配位 (HIT タイプ)、(b-1) 内側電極配位 (内周形)、(b-2) 外側電極配位 (外周形)。

Fig.3. (a) Coaxial electrode type, (b-1) polar electrode type (inner circuit type), and (b-2) polar electrode type (outer circuit type).

数を表し、 ν は次のような値である。

$$\begin{cases} (\kappa \geq \mu \text{ のとき}) & \nu = \sqrt{\kappa^2 - \mu^2} \\ (\kappa < \mu \text{ のとき}) & \nu = \sqrt{\mu^2 - \kappa^2} \end{cases} \quad (4)$$

また $\kappa < \mu$ において、 J_1, N_1 はそれぞれ変形ベッセル関数 I_1, K_1 に置き換える。

図4の長さ L_e の両電極 (太線部分) を通して外部電流 I_e を流し込む。この I_e により $z=0, b \leq r \leq R$ の底面での Φ は Φ_1 となるものとし、電極に沿っての Φ の変化は図4のように正弦波で与えられるものとする。すなわち、この Φ_0 から Φ_1 の変化は通常直線で近似するが、ここでは滑らかに Φ_0, Φ_1 とつながるよう正弦波変化を仮定した。これは、この解をもとに将来数値計算等を進めるとき、 Φ の微分に際して不連続点が現れないように考慮したためである。以上の考察をもとにすると、境界条件は

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_0 & (z = L) \text{ or } (r = b, R \text{ and } L_e < z < L) \\ \Phi = \Phi_1 & (z = 0) \end{cases} \quad (5)$$

と与えられ、電極部分は図4のように正弦波で近似する。したがって、 $r = b, R$ の境界上の Φ を $\Phi_W(z)$ とすると、(5)式を考慮すれば $\Phi_W(z)$ は次式のように求められる。

$$\Phi_W(z) = \begin{cases} \frac{\Phi_e}{2} \cos k_e z + \frac{\Phi_0 + \Phi_1}{2} & (0 \leq z \leq L_e) \\ \Phi_0 & (L_e < z \leq L) \end{cases} \quad (6)$$

ただし $\Phi_e = \Phi_1 - \Phi_0, \quad k_e = \pi/L_e$

$z = 0, L$ の境界に注目すると、 Φ は r によらず一定値をとるので(3)式の右辺第1項は消える。したがって

$$\begin{cases} \sin \mu L = 0 & \rightarrow \mu = \mu_i \equiv \frac{\pi}{L} i \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \\ \Phi(r, 0) = \Phi_1 & \rightarrow b_1 = \Phi_1 \\ \Phi(r, L) = \Phi_0 & \rightarrow b_0 = \frac{\Phi_0 - \Phi_1 \cos \kappa L}{\sin \kappa L} \end{cases}$$

これより、 μ は不連続値 μ_i をとることがわかり、(3)式の右辺は各 μ_i の代数和となる。すなわち

$$\Phi(r, z) = \sum_i r F_i(r) \sin \mu_i z + b_0 \sin \kappa z + \Phi_1 \cos \kappa z \quad (7)$$

$$\text{ただし } F_i(r) = \{a_{Ji} J_1(\nu_i r) + a_{Ni} N_1(\nu_i r)\} \quad (8)$$

ここで、 $\kappa = \mu_i$ とすると b_0 が発散するので、 $\kappa \neq \mu_i$ とする。

(2.2) a_{Ji}, a_{Ni} の計算 $r = R$ のとき $\Phi(R, z) = \Phi_W(z)$ なので、次式が成立する。

図4 同軸電極配位モデルと $r = b, R$ での境界条件。

Fig.4. HIT model and boundary condition at $r = b, R$.

$$\Phi_W(z) = \sum_i R F_i(R) \sin \mu_i z + b_0 \sin \kappa z + \Phi_1 \cos \kappa z \quad (9)$$

(9)式の両辺に $\sin \mu_j z$ をかけて $z: 0 \rightarrow L$ で積分すると、(6)式を用いて左辺、右辺ともに計算でき、次式を得る。

$$\begin{aligned} & -\frac{\Phi_1 + \Phi_0}{2\mu_j} (\cos \mu_j L_e - 1) - \frac{\Phi_0}{\mu_j} (\cos \mu_j L - \cos \mu_j L_e) + C_2 \\ & = \frac{RL}{2} F_j(R) + \frac{\mu_j}{\kappa^2 - \mu_j^2} \Phi_a \end{aligned} \quad (10)$$

ただし

$$C_2 = \frac{\Phi_e}{2} \int_0^{L_e} \frac{1}{2} \{ \sin(k_e + \mu_j)z - \sin(k_e - \mu_j)z \} dz \quad (11)$$

$$\Phi_a = (-1)^j \Phi_0 - \Phi_1 \quad (12)$$

C_2 は k_e と μ_j についての関係の場合分けをして計算する。

(a) $k_e \neq \mu_j$ のとき

$$C_2 = -\frac{\Phi_e \mu_j}{2(k_e^2 - \mu_j^2)}(\cos \mu_j L_e + 1) \quad (13)$$

(b) $k_e = \mu_j$ のとき

$$C_2 = -\frac{\Phi_e}{8\mu_j}(\cos 2\mu_j L_e - 1) = 0 \quad (14)$$

(10)(13)(14) 式より、

$$A_0 = \begin{cases} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \mu_j^2} \Phi_a + \frac{k_e^2}{k_e^2 - \mu_j^2} \frac{1 + \cos \mu_j L_e}{2} \Phi_e & (k_e \neq \mu_j) \\ \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \mu_j^2} \Phi_a & (k_e = \mu_j) \end{cases}$$

とおくと、次式が成立する。

$$F_j(R) = -\frac{2A_0}{RL\mu_j} \quad (15)$$

同様に $r = b$ の境界条件を積分すると、次式が成立する。

$$F_j(b) = -\frac{1}{\beta} \frac{2A_0}{RL\mu_j} \left(\beta = \frac{b}{R} \right) \quad (16)$$

(15)(16) 式より $j \rightarrow i$ と置き換えれば、 a_{Ji} 、 a_{Ni} は

$$\begin{cases} a_{Ji} = \frac{2A_0}{\beta RL\Omega_i} \{N_1(\nu_i R) - \beta N_1(\nu_i b)\} \\ a_{Ni} = \frac{-2A_0}{\beta RL\Omega_i} \{J_1(\nu_i R) - \beta J_1(\nu_i b)\} \end{cases}$$

と求められる。ただし

$$\Omega_i = J_1(\nu_i R)N_1(\nu_i b) - J_1(\nu_i b)N_1(\nu_i R) \quad (17)$$

これらの a_{Ji} 、 a_{Ni} のもとで、 Φ は次のように計算される。

$$\Phi(r, z) = \sum_i r F_i(r) \sin \mu_i z + \Phi_1 \cos \kappa z + (\Phi_0 - \Phi_1 \cos \kappa L) \frac{\sin \kappa z}{\sin \kappa L} \quad (18)$$

これは求める解である。

(2.3) 規格化 以上求めた解析解中の変数に対して

$$\rho = r/R, \quad \zeta = z/L, \quad \beta = b/R, \quad \alpha = L/R \quad (19)$$

の規格化を行い、さらに以下のような変換を行い、規格化で定義する。

$$\begin{aligned} \mu'_i &= \mu_i L, \quad \nu'_i = \nu_i R, \quad \kappa' = \kappa L, \quad k'_e = k_e L \\ \varepsilon_e &= L_e/L, \quad \varphi = \Phi/\Phi_1, \quad h_0 = \Phi_0/\Phi_1 \end{aligned} \quad (20)$$

ここで、 μ'_i 、 ν'_i は次のとおりである。

$$\begin{cases} \mu'_i = \pi i & (i = 1, 2, 3, \dots) \\ \nu'_i = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\kappa'^2 - \mu_i'^2} & (\kappa' > \mu'_i) \\ \nu'_i = \frac{1}{\alpha} \sqrt{\mu_i'^2 - \kappa'^2} & (\mu'_i > \kappa') \end{cases} \quad (21)$$

f_i 、 g_i 、 Ω_i を

$$\begin{aligned} f_i &= J_1(\nu'_i) - \beta J_1(\nu'_i \beta), \quad g_i = N_1(\nu'_i) - \beta N_1(\nu'_i \beta) \\ \Omega_i &= J_1(\nu'_i)N_1(\beta \nu'_i) - J_1(\beta \nu'_i)N_1(\nu'_i) \end{aligned} \quad (22)$$

とおいて、さらに

$$\begin{aligned} A_i &= A_0/\Phi_1 \\ &= \begin{cases} \frac{\kappa'^2}{\kappa'^2 - \mu_i'^2} \{(-1)^i h_0 - 1\} \\ + \frac{k_e'^2}{k_e'^2 - \mu_i'^2} \frac{1 + \cos \mu'_i \varepsilon_e}{2} (1 - h_0) & (k'_e \neq \mu'_i) \\ \frac{\kappa'^2}{\kappa'^2 - \mu_i'^2} \{(-1)^i h_0 - 1\} & (k'_e = \mu'_i) \end{cases} \end{aligned}$$

とすると、 a_{Ji} 、 a_{Ni} は

$$a_{Ji} = \frac{2A_i \Phi_1}{\beta R \mu'_i \Omega_i} g_i, \quad a_{Ni} = \frac{-2A_i \Phi_1}{\beta R \mu'_i \Omega_i} f_i$$

となり、最終的に φ は次のように計算できる。

$$\varphi = \sum_i \frac{2A_i}{\beta \mu'_i \Omega_i} \rho \{g_i J_1(\nu'_i \rho) - f_i N_1(\nu'_i \rho)\} \sin \mu'_i \zeta + \cos \kappa' \zeta + (h_0 - \cos \kappa') \frac{\sin \kappa' \zeta}{\sin \kappa'} \quad (23)$$

3. 内側電極配位の平衡解析

(3.1) 内側電極配位モデル 次に、先の解析とは異なる電極配位を有する図5のような内側電極配位のトーラスを模擬したモデルを考え、このモデルの平衡解を再び(2)式を解くことにより導きだす。

先と同様に(2)式を図5のモデルに関して一般解を求めると、次式のようになる。

$$\Phi(r, z) = r \{a_J J_1(\nu r) + a_N N_1(\nu r)\} \cos \mu z + b_0 \cos \kappa z \quad (24)$$

ここで、 a_J 、 a_N 、 μ 、 b_0 は定数であり、 ν は(4)式と同様の値である。またベッセル関数 J_1 、 N_1 、 I_1 、 K_1 に関する扱いは、2章と同様である。

図5の長さ L_e の電極 (太線部分 E_+ 、 E_-) から外部電流 I_e を流し込むとする。この場合の Φ に関する境界条件は電極 E_+ 、 E_- の電源接続を図のように内側を通した場合、 I_z による磁界は内側のみに作用し、そこで $\Phi = \Phi_0$ となる。このとき境界条件は

$$\begin{cases} \Phi = \Phi_0 & (r = R \text{ and } -k < z < k) \\ \Phi = \Phi_1 & (z = \pm L/2 \text{ or } r = b) \end{cases} \quad (25)$$

図5 内側電極配位モデルと $r = R$ での境界条件。

Fig.5. Flux-core spheromak model and boundary condition at $r = R$.

となり、電極部分は図5のように正弦波で近似する。したがって、 $r = R$ の境界上の Φ を $\Phi_W(z)$ とすると、(25)式を考慮すれば $\Phi_W(z)$ は次式のように求められる。

$$\Phi_W(z) = \begin{cases} \frac{\Phi_e}{2} \left[\cos \left\{ \frac{\pi}{L_e} (z - k) \right\} + 1 \right] + \Phi_1 & (k < z \leq L/2) \\ \Phi_0 & (0 \leq z \leq k) \end{cases} \quad (26)$$

ただし、 $\Phi_W(z)$ は r 軸に対して対称なので、 $z \geq 0$ の範囲で考えることとする。 $z = L/2$ の境界に注目すると、 Φ は r によらず一定なので(24)式の右辺第1項は消えて、

$$\begin{cases} \cos \mu \frac{L}{2} = 0 & \rightarrow \mu = \mu_i \equiv \pi \frac{1+2i}{L} \quad (i = 0, 1, 2, \dots) \\ b_0 \cos \kappa \frac{L}{2} = \Phi_1 & \rightarrow b_0 = \frac{\Phi_1}{\cos(\kappa L/2)} \end{cases}$$

これより、 μ は不連続値 μ_i をとることがわかり、(24)式の右辺は各 μ_i の代数和となる。

$$\rightarrow \Phi(r, z) = \sum_i r F_i(r) \cos \mu_i z + b_0 \cos \kappa z \quad (27)$$

ここで、 $\kappa = \mu_i$ とすると b_0 が発散するので、 $\kappa \neq \mu_i$ とする。

(3.2) a_{Ji}, a_{Ni} の計算 $r = b, R$ における境界条件

$$\Phi(b, z) = \Phi_1, \quad \Phi(R, z) = \Phi_W(z) \quad (28)$$

に(27)式を代入し、それぞれの式の両辺に $\cos \mu_j z$ をかけて $z: 0 \rightarrow L/2$ で積分して、2章と同様の手法で a_{Ji}, a_{Ni} を計算すると、

$$\begin{cases} a_{Ji} = \frac{1}{\Omega_i} \left[-\frac{A_0 \Phi_0}{\beta} \{N_1(\nu_i R) - \beta N_1(\nu_i b)\} \right. \\ \quad \left. + B_0 \Phi_e N_1(\nu_i b) \right] \\ a_{Ni} = \frac{1}{\Omega_i} \left[\frac{A_0 \Phi_0}{\beta} \{J_1(\nu_i R) - \beta J_1(\nu_i b)\} \right. \\ \quad \left. - B_0 \Phi_e J_1(\nu_i b) \right] \end{cases}$$

と求められる。ただし Ω_i は(17)式で与えられ、 A_0, B_0 は次式で与えられる。

$$A_0 = \frac{4}{RL\mu_i} \frac{\kappa^2}{\kappa^2 - \mu_i^2} (-1)^i$$

$$B_0 = \begin{cases} \frac{2}{RL\mu_i} \frac{k_e^2 \{(-1)^i + \sin \mu_i k\}}{(k_e^2 - \mu_i^2)} & (k_e \neq \mu_i) \\ \frac{1}{RL\mu_i} \{2(-1)^i + 2 \sin \mu_i k + \mu_i L_e \cos \mu_i k\} & (k_e = \mu_i) \end{cases}$$

これらの a_{Ji}, a_{Ni} のもとで、 Φ は次のように計算される。

$$\Phi(r, z) = \sum_i r F_i(r) \cos \mu_i z + \Phi_1 \frac{\cos \kappa z}{\cos(\kappa L/2)}$$

(3.3) 規格化 同軸電極配位モデルと同様に、このモデルも規格化された量で表す。(19)(20)式と同様に各定数を定義し、 ε_e のみ $\varepsilon_e = 2L_e/L$ と置き換える。ここで、 μ'_i は

$$\mu'_i = \pi(1+2i) \quad (i = 0, 1, 2, \dots)$$

と書け、 ν'_i は(21)式と同様に書ける。(22)式のように f_i, g_i, Ω_i において、さらに

$$A_i = RA_0 = \frac{4}{\beta \mu'_i \kappa'^2 - \mu_i'^2} (-1)^i$$

$$B_i = RB_0 =$$

$$\begin{cases} \frac{1}{\mu'_i} \left\{ 2(-1)^i + 2 \sin \frac{\mu'_i(1-\varepsilon_e)}{2} \right. \\ \quad \left. + \frac{\mu'_i \varepsilon_e}{2} \cos \frac{\mu'_i(1-\varepsilon_e)}{2} \right\} & (k'_e = \mu'_i) \\ \frac{2}{\mu'_i k'_e} \frac{k_e'^2}{k_e'^2 - \mu_i'^2} \left\{ (-1)^i + \sin \frac{\mu'_i(1-\varepsilon_e)}{2} \right\} & (k'_e \neq \mu'_i) \end{cases}$$

とし、 x_i, y_i を

$$\begin{cases} x_i = \frac{Ra_{Ji}}{\Phi_0} = \frac{-1}{\Omega_i} \{A_i g_i - B_i N_1(\nu'_i \beta)(h_1 - 1)\} \\ y_i = \frac{Ra_{Ni}}{\Phi_0} = \frac{1}{\Omega_i} \{A_i f_i - B_i J_1(\nu'_i \beta)(h_1 - 1)\} \end{cases}$$

と定義すると、 φ は次のように計算できる。

$$\varphi = \sum_i \rho \{x_i J_1(\nu'_i \rho) + y_i N_1(\nu'_i \rho)\} \cos \mu'_i \zeta + \frac{\cos \kappa' \zeta}{\cos(\kappa'/2)} \quad (29)$$

4. 計算結果および考察

(4.1) 磁気面と安全係数の計算法 以上2章と3章で述べた2つの電極配位に関して、磁気面と安全係数 q の分布の計算を行った。計算に際しては両モデルとも規格化した後の式を用い、トーラス断面(矩形)内での規格化磁気面(φ =一定の面)を計算した。 φ の計算式に現れる展開の次数 i については、 $i = n$ までの和をとった φ を φ_n としたときに

$$\varphi_n - \varphi_{n-1} < 0.01$$

となる範囲まで計算した。アスペクト比

$$A = \frac{(R-b)/2 + 2}{(R-b)/2} = \frac{1+\beta}{1-\beta}$$

は低アスペクト比領域($A = 1.1$)とし、楕円度($el = L/(R-b) = \alpha/(1-\beta)$)は2.0、 $\varepsilon_e = 0.2$ と設定した。また q 値は磁気面 Φ を用いて

$$q = \frac{1}{2\pi} \frac{d\Phi_\varphi}{d\Phi} \quad (\Phi_\varphi: \text{トロイダル磁束}) \quad (30)$$

と定義し、これを規格化条件にあてはめて計算した。

(4.2) 計算結果 磁気面と q 分布に対する h_0 と κ' の影響を大まかにつかむため、それぞれの電極配位に対して、

$$h_0 = 0.0, 0.5, 1.0, 2.0, \quad \kappa' = 3.5, 4.5, 5.5, 6.5$$

としたときの計算を行った。

同軸電極配位モデルの φ と q の計算結果を図6、内側電極配位モデルの計算結果を図7に示す。ただし φ は等高線で表示し、図の太線はプラズマの境界(セパトロックス)、実線はプラズマの内部、破線は真空領域を表している。また後の考察のため、それぞれのモデルに関して κ' を4.5に固定して、 h_0 を0.5, 0.6, 0.7, 0.8としたときの q 分布の計算結果を図8に示す。 q 値はプラズマ内部(図の太線内部)のみにおいて(30)式を用いて計算した。グラフの横軸 φ_c はプラズマ内部の φ を規格化した値を表し、 $\varphi_c = 0$ は磁気軸、 $\varphi_c = 1$ はセパトロックスをそれぞれ表す。ここで図6(a)に関しては、 κ' が3.5~6.5の範囲ではプラズマ領域が生成されないため、 κ' の範囲を7.0~7.6とした。また q 値については、通常磁気軸が1つの場合について議論されているので、図7(a)の $\kappa' = 4.5$ のように磁気軸が2つあるものや、プラズマ領域が存在しないものについては考慮しない。

κ' の値をこれらの計算よりもさらに大きくしていくと、ある値 κ'_0 で φ の値が無限大に発散する特異点が存在する。例

図 6 同軸電極配位モデルの φ の平衡解と q 分布。

Fig.6. Contours of φ and safety factor q profile of HIT model with different h_0 and κ' .

例えば $h_0 = 0.0$ では $\kappa'_0 \sim 8.0$ である。さらに $\kappa' > \kappa'_0$ では磁気軸が2つできる2分化された配位が現れるが、今回の計算では実験上興味の対象となる $\kappa' < \kappa'_0$ の範囲に限定した。

(4.3) h_0 および κ' の物理的意味 ここでは h_0 および κ' の物理的意味を説明して、これらの定数が磁気面配位と q 分布に与える影響を考察する。図4の同軸電極配位モデルを例にとると、 $\Phi \propto B_\varphi / r$ であることを考慮に入れば境界条件 Φ_0 と Φ_1 の関係は次のように考えられる。まず中心電流 I_z によりトロイダル磁界 B_φ が発生し、境界上の磁気面が $\Phi = \Phi_0$ となる。さらに図4の例のような向きに外部電流 I_e を流すと、この電流がつくるループにより、 I_z による B_φ と同じ向きに B_φ が生じる。したがって $z = 0$ 上の B_φ はさらに強くなり、境界条件は $\Phi_1 > \Phi_0$ となる。これはす

なわち $0.0 < h_0 < 1.0$ の場合に相当する。同様の考察により、 $h_0 > 1.0$ のときは I_e の向きが図4の向きと逆の場合であることがわかる。また $I_z = 0$ のときには $\Phi_0 = 0$ より $h_0 = 0.0$ 、 $I_e = 0$ のときには $\Phi_1 = \Phi_0$ となり $h_0 = 1.0$ であることがわかる。図5の内側電極配位モデルについても同様の考察ができ、以上まとめると次のような結論が得られる。 $h_0 = 0.0$ は外部トロイダル磁界が存在しないスフェロマック形、 $h_0 = 0.5$ は図4、図5の電流の向きに電流が流れる配位(外部トロイダル磁界と流入電流によるトロイダル磁界が互いに和し合う方向)、 $h_0 = 1.0$ はヘリシティー注入のないトカマク配位、 $h_0 = 2.0$ は図4、図5と、電極電流の向きが逆となっている配位である。

一方 κ' は(1)(20)式で定義されているように、 φ から B_φ

 図 7 内側電極配位モデルの ϕ の平衡解と q 分布。

 Fig.7. Contours of ϕ and safety factor q profile of flux-core spheromak model with different h_0 and κ' .

 図 8 負の傾きをもつ q 分布 ($\kappa' = 4.5$, $0.5 \leq h_0 \leq 0.8$)。

 Fig.8. Safety factor q profiles with negative shear ($\kappa' = 4.5$, $0.5 \leq h_0 \leq 0.8$).

を計算する際の比例定数である。したがって同じ境界条件の場合、 κ' が大きくなるとそれに比例して境界上での B_ϕ が大きくなる。すなわち I_z および I_e が大きくなることを意味する。また κ は $\text{rot } \mathbf{B} = \kappa \mathbf{B} \propto j$ と定義され、プラズマ電流密度は $j_\phi \propto B_{\text{pol}}$ と B_{pol} に比例するので、 B_ϕ とポロイダル磁界 B_{pol} の比例定数でもある。 κ' が大きいと B_{pol} の割合が、 κ' が小さいと B_ϕ の割合が大きくなり、前者の場合、これはプラズマ電流が大きいのことを意味する。この傾向は、図 6, 7 の磁気面の計算結果によく現れている。また後者の場合、これは q 値が大きくなることを意味し、同じく図 6, 7 の q 分布の計算結果に傾向が現れている。以上より、 κ' を大きくするとプラズマ電流を大きくできるが、プラズマ電流維持のための I_z , I_e も大きくなり、 q 値が小さくなり不安定になる、と結論づけられる。

(4.4) 安全係数 q に関する考察 安全係数 q 値は、スフェロマックでは磁気軸からセバトリックスにむけて減少していき、ヘリシティー注入のない通常トカマクでは逆に増加していく傾向があるが、図 6, 7 の $h_0 = 0.0$ の q 分布を見ると、必ずしもスフェロマックの傾向は現れていない。同軸電極型ではプラズマ領域が生成された時点ですでに κ' の値が大きく、 q の値が小さすぎることで、内側電極型では κ' が小さい値ではプラズマ領域に磁気軸が 2 つ現れており、 q 分布が極大値をもつような特異な配位になっていることがその理由であると考えられる。一方 $h_0 = 1.0$ の q 分布には、通常トカマクの特徴が現れている。また、 $h_0 = 2.0$ としたときの q 分布は $h_0 = 1.0$ の場合と大きな違いはなく、ヘリシティー注入による閉じ込め特性の大きな改善は見られない。

q 分布に関して注目すべき結果が得られているのは、 h_0 が 0~1 の間、例えば $h_0 = 0.5$ のときである。この q 分布にはスフェロマックとトカマクの両者の特徴が現れており、中には q 分布が極小値をもち、中心付近で磁気シア ($s = dq/dr$) が負になり、周辺で $s > 0$ となるようなものも存在している。このような凹状の q 分布は負磁気シア配位と呼ばれ、トカマクで閉じ込め特性が改善されるものとして近年注目されている⁽¹⁰⁾。そこで、この負磁気シア配位について検討してみる。 κ' を 4.5 に固定し、 $h_0 = 0.5 \sim 0.8$ としたときの両モデルの q 分布を図 8 に示す。ここで κ' は、磁気軸での q 値 q_0 と周辺部での q 値 q_a が、ともに 3 を越える程度の値として 4.5 とした。まず図 8(b) から見てみると、 h_0 が増加するにつれて q 分布がスフェロマック型からトカマク型に移行し、その過程で負磁気シア配位が達成されていることがわかる。図 8(a) では $h_0 = 0.5, 0.6$ ではスフェロマック型から大きく外れているが、これは図 6(b) からわかるようにプラズマ領域が極端に小さく、典型的な閉じ込め配位が形成されていないためであると考えられる。しかし一方、 $h_0 = 0.7, 0.8$ では負磁気シア配位が形成されている。

以上の議論より、 $0.0 < h_0 < 1.0$ では h_0 が増加すると q 分布がスフェロマック型からトカマク型へ移行し、この間で適切な h_0 , κ' をとれば、負磁気シア配位が生成できることがわかった。

5. 結言

本論文において、電極を通して外部電流を注入するヘリシティー注入型の低アスペクト比トカマクの解析解を求めた。特に負のシアをもつ逆転 q 分布が条件によって達成され、その場合閉じ込め改善の期待が持てる。また、これら解析解は今後、同配位の動作を数値シミュレーションする場合の初期条件として有用であろう。また、最近同軸電極配位に加えて内側電極配位の実験が日米でそれぞれ開始されたため⁽¹²⁾、実験との対比に興味を持たれる。

最後に、本研究を遂行するにあたり、森田歩氏(現日立製作所)の協力に感謝する。

(平成 8 年 7 月 17 日受付、平成 8 年 12 月 16 日再受付)

文 献

- (1) 小野 亮・森田 靖・桂井 誠: 電気学会論文誌 A, **116**, 128 (1996)
- (2) 山田: プラズマ・核融合学会誌, **72**, 205 (1996)
- (3) 例えば J. B. Taylor: *Review of Modern Phys.*, **58**, 741(3) (1986), および T. Jaboe: *Plasma Phys. Control Fusion*, **36**, §6.1 (1994)
- (4) J. B. Taylor: プラズマ物理・核融合第 5 回 IAEA 会議録 IAEA-CN-33/PD-1, 161 (1975), および B. B. カドムツェフ(難波、水野訳): 「プラズマ中の集団現象」, 岩波書店, §3.5, §5.6 (1978)
- (5) L. Woltjer: *Proc. National Academy of Science*, **44**, 489 (1958)
- (6) J. B. Taylor and M. F. Turner: *Nucl. Fusion*, **29**, 219 (1989)
- (7) T. H. Jensen and M. S. Chu: *J. Plasma Phys.*, **25**, 219 (1981)
- (8) N. Amemiya, A. Hayakawa and M. Katsurai: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **60**, 2632, (1991), および N. Amemiya, et al.: *J. Phys. Soc. Jpn.*, **62**, 1552 (1993)
- (9) T. Jarboe et al.: プラズマ物理・核融合第 15 回 IAEA 会議録 IAEA-CN-60/II-6-1 (1994)
- (10) E. J. Strait, et al.: *Phys. Rev. Lett.*, **75**, 4421 (1995), および C. Kessel, et al.: *ibid.*, **72**, 1212 (1994)
- (11) 桂井他: プラズマ・核融合学会誌, **64**, 362 (1990)
- (12) 遠山、および英国カラム研究所 START グループ: 1996 年国際コンパクトトカマクおよび日米低アスペクト比トカマクワークショップ, カラム研究所(英国), 12 月, 1996

小 野 亮 (学生員) 1973 年 3 月 26 日生。1995 年 3 月東京大学工学部電気工学科卒業。同年 4 月同大学大学院工学系研究科電気工学専攻修士課程進学。計算機シミュレーションによる、トカマクの平衡解析の研究に従事。

桂 井 誠 (正員) 1941 年 11 月 13 日生。1965 年東京大学工学部電子科卒業。1970 年同大学大学院博士課程修了。同年同大学講師、1971 年同助教、1987 年教授、現在に至る。工学博士。この間 1978 年 10 月~80 年 1 月アメリカ・プリンストン大学プラズマ物理研究所に滞在。主として、プラズマ工学、核融合工学の研究に従事。プラズマ・核融合学会、IEEE 会員。