集中定数はしご形回路における 波動伝播と波の反射

正員 野田俊一 (弓削商船高専)

Wave Propagation and Reflection on the Ladder Type Circuit

Shunichi Noda, Member (Yuge National College of Maritime Technology)

In this paper, we studied the wave propagation and reflection on the linear ladder type circuit. Several examples of the exact linear response of this circuit were found. And the band pass ladder type circuit has a peculiar property with respect to the wave propagation. It is possible that the phase and group velocities of the wave on this circuit have opposite direction each other. Moreover, the wave reflection on the ladder type circuit was considered. Reflection and transmission coefficient of the wave were calculated, and non-reflection condition was found. From this condition, the non-reflection terminal circuit was constructed.

キーワード： 集中定数はしご形回路、位相速度、群速度、波の反射、無反射条件、無反射終端回路

1. はじめに

抵抗、コイル、コンデンサからなるはしご形の線形回路における波動現象を考察した。はしご形回路は一次元的^{1,2)}な回路であるが、素子の接続で様々な特性が得られる。コイルとコンデンサからなるはしご形回路の入力端に一定の電気振動を加えれば、電氣的な波が回路を伝わる。バネでつながれたおもりの一次元系と低域通過の LC はしご形回路の対応はよく知られており、連続体近似で共に波動方程式を与える。しかしながら力学系との対応のつかないにも関わらず、波を伝える特性を持つ回路例も多くある。

波動現象は波の周波数と波数の関係が重要で、これを分散関係という。電気回路では、回路の線形応答からこの分散関係を導ける。さらに媒質の変化に伴う反射も重要な波動現象の一つである。連続媒質での波の反射では、波を入射波と反射波そして透過波に分け、これらの波の境界条件から振幅位相が得られる。もちろんはしご形回路のような不連続媒質でも、長波長のもとでの連続体近似から反射係数の評価もでき、非線形性を含む場合についての結果も示されているが³⁻⁹⁾、線形な場合は近似を使わずに考察を行える。

ここでは、すでに示したはしご形回路の応答から²⁾、厳密解の得られる回路例を与え、この際一般的な変換式を組み合わせることで、厳密解の得られる例が多くあることを示す。次に帯域通過のはしご形回路⁸⁾における波動伝播を考察する。この回路を伝わる波の位相速度と

群速度は逆方向の場合も有り得ることを示し、具体的な数値例でこのことを確認する。さらに二種のはしご形回路をつないだ場合の反射を扱う。回路を伝わる波を入射波、反射波、透過波で表し、回路の条件からそれらの振幅位相が得られことを示す。この結果から無反射の条件を導き、これを群速度とエネルギー保存から説明する。そして最後に応用上重要と思われる無反射の終端回路としての RLC 回路の特性を示す。

2. 厳密解の得られるいくつかの例

はしご形回路は一次元の回路であり、節点電位は二階差分方程式を満たす。従ってこの式の基本解は二つあり、これらの重ね合わせで一般解は表せる。この二つの基本解はそれぞれ左右二つの伝播方向に対応していることが波の反射において分かる。ここでは一様なはしご形回路に電圧を加えたときの回路の応答を求める。図 1 にはしご形回路を示した。回路は二つのインピーダンス Z_1 と Z_0 で構成されている。左端は入力側で、右端は無限に続く。入力端に V_0 を加えたとき、節点電位 V_n は次式を満たす。

$$V_{n+1} - \left(\frac{Z_1}{Z_0} + 2\right)V_n + V_{n-1} = 0 \quad (1)$$

ここで、次式を仮定すれば、

$$V_n = V_0 r^n \quad (2)$$

r として次の結果を得る。

$$r = \frac{1}{2} \left[\left(\frac{Z_1}{Z_0} + 2 \right) - \sqrt{\left(\frac{Z_1}{Z_0} + 2 \right)^2 - 4} \right] \quad (3)$$

式(1)の基本解は r^n と $\frac{1}{r^n}$ である。式(2)、(3)から厳密解、波動伝播における分散関係などが導ける。以下に示す厳密解はデルタ関数電圧に対する応答である。

図1 はしご形回路

Fig.1 The ladder type circuit.

(a)

(b)

(c)

図2 厳密解の得られる例

(a) RLC 回路, (b) LC 回路, (c) 帯域通過の LC 回路

Fig.2 Exact solvable examples.

(a) RLC circuit, (b) LC circuit, (c) band pass LC circuit.

図 2(a) に RLC 回路を示す。LC 回路は波動方程式の性質をもつので、RLC 回路は損失を伴った波動方程式の一種である。これから

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_0} &= \frac{s^2 L_1 R_1 C_0}{s L_1 + R_1} \\ &= (R_1 C_0 s + \frac{R_1^2 C_0}{L_1}) + \frac{\frac{R_1^4 C_0^2}{L_1^2}}{R_1 C_0 s + \frac{R_1^2 C_0}{L_1}} - 2 \frac{R_1^2 C_0}{L_1} \quad (4) \end{aligned}$$

となり、これを一つの変数と見なせば、式(2)の逆変換は変形ベッセル関数で表せ、さらに付録 1. に示した公式 1 を使って次式を得る。

$$\begin{aligned} v_n(t) &= n e^{-\frac{R_1}{L_1} t} \left[\frac{1}{t} e^{(-\frac{2}{R_1 C_0} + 2 \frac{R_1}{L_1}) t} I_n(\frac{2t}{R_1 C_0}) \right. \\ &\quad - \frac{R_1}{L_1} \int_0^{\frac{t}{R_1 C_0}} du \frac{e^{(-2 + 2 \frac{R_1^2 C_0}{L_1}) u}}{u} I_n(2u) \\ &\quad \left. \times J_1(\frac{2 R_1^2 C_0}{L_1} \sqrt{u(\frac{t}{R_1 C_0} - u)}) \sqrt{\frac{u}{\frac{t}{R_1 C_0} - u}} \right] \quad (5) \end{aligned}$$

次に LC 回路を図 2(b) に示す。Z1 はコイルとコンデンサの直列であり、Z0 はコンデンサである。この回路は、高周波ではコイルは開放で隣接節点間の電流は流れず、またコンデンサは短絡で節点電位は接地電位に等しくなる。従って節点電位の変化は回路を伝わる事ができず、高周波の波は伝播できない。これに加えて Z1 のコンデンサのため低周波でも節点間は開放状態で、電流は流れない。従ってある周波数領域のみで波は伝わる。この回路の厳密解は、

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_0} &= s^2 L_1 C_0 + \frac{C_0}{C_1} \\ &= (\sqrt{L_1 C_0} s)^2 + (\sqrt{\frac{C_0}{C_1}})^2 \quad (6) \end{aligned}$$

であるから、この式の右边を変数の二乗と見なせば式(2)の逆変換はベッセル関数で表せ、さらに付録 1. の公式 2 から次の解を得る。

$$\begin{aligned} v_n(t) &= 2n \left[\frac{1}{t} J_{2n}(\frac{2t}{\sqrt{L_1 C_0}}) - \frac{1}{\sqrt{L_1 C_1}} \right. \\ &\quad \left. \times \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta J_{2n}(\frac{2t}{\sqrt{L_1 C_0}} \cos \theta) J_1(\frac{t}{\sqrt{L_1 C_1}} \sin \theta) \right] \quad (7) \end{aligned}$$

さらに図 2(c) に帯域通過の LC 回路を示す¹⁰⁾。ここでは厳密解の導出のみを行い、この回路を伝わる波の性質は次章で詳しく調べる。回路から、

$$\begin{aligned} \frac{Z_1}{Z_0} &= (s L_1 + \frac{1}{s C_1})(s C_0 + \frac{1}{s L_0}) \\ &= (\sqrt{L_1 C_0} s + \frac{A}{\sqrt{L_1 C_0} s})^2 + B^2 \quad (8) \\ \begin{cases} A = \sqrt{\frac{L_1 C_0}{L_0 C_1}} \\ B = |\sqrt{\frac{L_1}{L_0}} - \sqrt{\frac{C_0}{C_1}}| \end{cases} \end{aligned}$$

さらに付録 1. の公式 1、2 を使えば次の厳密解を得る。

$$\begin{aligned} v_n(t) &= \frac{1}{\sqrt{L_1 C_0}} \left[h(\frac{t}{\sqrt{L_1 C_0}}) - \int_0^{\frac{t}{\sqrt{L_1 C_0}}} du h(u) \right. \\ &\quad \left. \times J_1(2 \sqrt{\frac{A u}{\sqrt{L_1 C_0}} - u}) \sqrt{\frac{A u}{\frac{t}{\sqrt{L_1 C_0}} - u}} \right] \quad (9) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= 2n \left\{ \frac{1}{t} J_{2n}(2t) \right. \\ &\quad \left. - B \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta J_{2n}(2t \cos \theta) J_1(B t \sin \theta) \right\} \quad (10) \end{aligned}$$

3. 帯域通過のはしご形回路における波動伝播

前章では、図2(c)に示した帯域通過のLC回路の厳密解を導いた。この章ではこの回路の波動現象を調べる。正弦波電圧を回路に加えた時、角周波数は実数となる。この時回路上の電位分布も周期的であれば、波は伝わる。角周波数と波数の関係を分散関係と呼び、次式で与えられる。

$$k = 2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{(L_1 C_0 \omega^2 - A)^2 - B^2 L_1 C_0 \omega^2}{(B^2 + 4) L_1 C_0 \omega^2 - (L_1 C_0 \omega^2 - A)^2}} \quad (11)$$

式の導出は付録2.で行った。波には二種、位相速度と群速度がある。位相速度は角周波数の波数に対する比で、群速度は、角周波数の波数微分で表せる。波形変形で言えば、位相速度は波の一つの山あるいは谷の移動の速さである。これに対して群速度は波束の移動速度である。波の粗密の移動と波束の移動が等しければ、この二つの速度は等しい。式(11)の数値例を、図3に示した。

図3 帯域通過のLC回路における波の位相速度 V_p と群速度 V_g

Fig.3 Phase velocity and group velocity of the wave on the band pass ladder type circuit.

周波数が高い場合と低い場合には、波は伝わることが分かる。回路接続から分かるように、周波数が高い場合コイル L_1 は開放、コンデンサ C_0 は短絡状態となる。逆に周波数が低ければコンデンサ C_1 は開放、コイル L_0 は短絡状態となる。このとき電圧電流の変化は回路の節点間を伝わることができない。さらに波の伝わる領域は二つあり、一方は位相速度と群速度が逆方向とし

て他方は同方向である。これらの範囲は次のように与えられる。

$$\frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4 + 4A} - \sqrt{B^2 + 4}) < \omega < \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4A} - B) \quad (12)$$

$$\frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4A} + B) < \omega < \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4 + 4A} + \sqrt{B^2 + 4}) \quad (13)$$

これ以外の範囲の角周波数の波は伝播できず、式(11)の波数 k は実数にならない。波が伝播できないとき、入力端に加えた振動は回路内を進むにつれて単調に減衰する。この単調な減衰には二種類ある。一つは、同位相の減衰である。隣接節点間の位相は同位相で、振幅だけが一定の割合でゼロ電圧に近づく。もちろん振動電圧を加えているから、一定の周波数で振動しており、回路上の電位分布全体はあるときは正の電位に、あるときは負の電位になる。もう一つは逆位相の減衰で、このときは隣接節点間の電圧の位相は逆位相になっている。従って節点は正と負の電位が交互に並び、一定の割合でゼロ電圧に近づく。次に波動の伝播する場合を考える。式(12)の場合は、位相速度は単調に増加し発散する。すなわち波の山あるいは谷はどんな速さでも移動できる。これに対し群速度は逆方向に僅かな速度を持つにすぎない。一方式(13)の周波数範囲では、位相速度は単調に減少する。このとき群速度は同方向に比較的大きな速度を持つ。回路の応答に基づく波動の伝播条件の説明は付録3.で行った。式(11)の分散関係から波の定性的な様子は分かるが、波形変形は直接数値計算で確かめる必要がある。

回路方程式を微分方程式で表せば次式を得る。

$$L_1 C_0 \frac{d^2}{dt^2} v_n(t) + \frac{1}{C_1 L_0} \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 v_n(t_2) = v_{n-1}(t) + v_{n+1}(t) - \left(2 + \frac{L_1}{L_0} + \frac{C_0}{C_1}\right) v_n(t) \quad (14)$$

もちろんこの式で $v_0(t)$ は入力であり、波束を加える。この波束は $0 \leq t \leq \frac{2\pi}{\omega_0}$ の時、 $v_0(t) = \frac{1 - \cos(\omega_0 t)}{2} \sin(\omega t)$ 。そして $\frac{2\pi}{\omega_0} \leq t$ の時、 $v_0(t) = 0$ である。ここで $\omega_0 = 0.06$ とした。式(14)を数値計算する際の注意事項は付録4.に与えた。図4は位相速度と群速度が同方向に伝わる場合を示している。抵抗、コイル、コンデンサの単位をオーム、ヘンリー、ファラッドで表したとき、時間の単位は秒になる。そこでこれらのパラメータは数値のみを示した。図から回路上の電位分布は波を形成しているのが分かる。図4(a)は大きな時間間隔での波の移動を示している。これから波束全体の移動すなわち群速度が得

られる。波は回路の入力端から回路の内部へ移動しているのが分かる。

図4 帯域通過の LC 回路における波束の伝播
($\omega = 1.13$)

Fig.4 Waveforms on the band pass ladder type circuit.

図5 帯域通過の LC 回路における波束の伝播
($\omega = 0.63$)

Fig.5 Waveforms on the band pass ladder type circuit.

一方図4(b)は、細かな時間間隔で波の移動を示した。この図の矢印で示したように波の山の移動は波束の移動より速いことが分かる。この時間間隔では、波束の移動はほとんど確認できないが、一つの山に着目すれば確かに移動しているのが分かる。この移動は、波束全体の移動とは全く別の速度である。しかしながら、この山も波束の中心からずれると僅かな振幅に減衰してしまい、波の振動エネルギーの移動と無関係なことが分かる。後に、

波のエネルギーの移動速度は群速度で与えられることを用いて波の反射を考察する。次に図5に位相速度と群速度が逆方向の場合を示した。図5(a)から群速度の方向と大きさが分かる。波束は入力端から回路内部に伝わっている。しかしながら細かな時間間隔で波形変形を表すと、図5(b)に矢印で示したように、波束はほとんど静止しているにも関わらず、波の粗密は入力端方向に移動しているのが分かる。このときもやはり、山の位置が波束の中心からずれると振幅は減衰してしまい、波のエネルギーの移動とは関係ないことが分かる。

4. はしご形回路の無反射接続 < 4.1 > 波の反射・透過

すでに述べたように、はしご形回路の方程式は二階の差分方程式で与えられるから、二つの基本解がありこれらの重ね合わせで回路上の電位分布は表せる。しかしながら一様な回路の応答や波動の伝播を考える上では、二つの解のうち一方だけを取れば十分であった。この章で考察する波の反射現象では、この二つの基本解が回路を伝わる入射波、反射波等に対応する。先ず図6の回路を説明する。回路は二つの領域に分けられる。入力端から $n = N$ までを領域1とし、 Z_{a1} と Z_{a0} で構成されている。また $N < n$ を領域2とし、 Z_{b1} と Z_{b0} で構成されている。そしてこの二つの領域は $n = N$ でつながれ、この節点には Z がつながれている。領域1の入力端に電圧を加えると、これは入射波として回路を伝わる。回路が一様であれば、単にこの入射波は変形を受けながら回路を伝わって行くにすぎない。図6の回路では、 $n = N$ で異なる素子定数の回路につながるので、この節点に入射波が達すると、その一部は反射波として領域1を逆方向に伝わり、その他は透過波として領域2を伝わる。これら入射波、反射波、透過波の満足すべき関係は以下になる。領域1の電位分布を入射波と反射波の重ね合わせで表せば、

$$V_{n+1} - (2 + \frac{Z_{a1}}{Z_{a0}})V_n + V_{n-1} = 0 \quad (15)$$

$$V_n = A_I r_a^{n-N} + A_R r_a^{-(n-N)} \quad (16)$$

$$r_a = \frac{1}{2} \left[(2 + \frac{Z_{a1}}{Z_{a0}}) - \sqrt{(2 + \frac{Z_{a1}}{Z_{a0}})^2 - 4} \right] \quad (17)$$

となる。式(16)は、 A_I, A_R が入射波、反射波の振幅に対応するように座標の基準を $n = N$ に取っている。同様に、領域2を伝わる透過波は、

$$V_n = A_T r_b^{n-N} \quad (18)$$

$$r_b = \frac{1}{2} \left[(2 + \frac{Z_{b1}}{Z_{b0}}) - \sqrt{(2 + \frac{Z_{b1}}{Z_{b0}})^2 - 4} \right] \quad (19)$$

図6 二種のはしご形回路の接続

Fig.6 Connection of two kinds of ladder type circuits.

(a)

(b)

図7 二種の LC はしご形回路の接続例

(a) 反射、(b) 無反射

Fig.7 Connection of the two kinds of LC ladder type circuits.

(a) Reflection. (b) Non-reflection.

図8 はしご形回路における波の反射

 $\omega = 0.1, L_{a1} = L_{b1} = C_{a0} = 1, C_{b0} = 0.3$ (a) 反射、(b) 無反射 $C = 0.65, G = 0.45$

Fig.8 Wave reflection on the ladder type circuit.

(a) Reflection. (b) Non-reflection.

と表せる。さらに、節点 $n = N$ での電流の保存から

$$\frac{V_{N-1} - V_N}{Z_{a1}} = \frac{V_N}{Z} + \frac{V_N - V_{N+1}}{Z_{b1}} \quad (20)$$

これらの式から反射係数 A_R/A_I 、透過係数 A_T/A_I は

$$\frac{A_R}{A_I} = -\frac{\frac{1}{r_a} - 1 + (r_b - 1)\frac{Z_{a1}}{Z_{b1}} - \frac{Z_{a1}}{Z}}{r_a - 1 + (r_b - 1)\frac{Z_{a1}}{Z_{b1}} - \frac{Z_{a1}}{Z}} \quad (21)$$

$$\frac{A_T}{A_I} = \frac{r_a - \frac{1}{r_a}}{r_a - 1 + (r_b - 1)\frac{Z_{a1}}{Z_{b1}} - \frac{Z_{a1}}{Z}} \quad (22)$$

となる。この式を使って反射波、透過波の振幅、位相が求まる。特に無反射条件は式(21)から、

$$\frac{1}{r_a} - 1 + (r_b - 1)\frac{Z_{a1}}{Z_{b1}} - \frac{Z_{a1}}{Z} = 0 \quad (23)$$

である。この式を満足する Z を回路につなげば、波は無反射で二つの領域を伝わる。

< 4.2 > LC回路の無反射接続

具体的な回路として二種の LC 回路をつないだ場合を図7に示した。 $Z_{a1} = j\omega L_{a1}$, $Z_{a0} = \frac{1}{j\omega C_{a0}}$, $Z_{b1} = j\omega L_{b1}$, $Z_{b0} = \frac{1}{j\omega C_{b0}}$ の場合、波が無反射で伝わるためには、式(23)から次式のインピーダンス Z をつなぐ必要がある。

$$\frac{1}{Z} \equiv G + j\omega C = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{C_{a0}}{L_{a1}}} \sqrt{4 - L_{a1} C_{a0} \omega^2} - \sqrt{\frac{C_{b0}}{L_{b1}}} \sqrt{4 - L_{b1} C_{b0} \omega^2} \right] + j\frac{1}{2} \omega (C_{a0} + C_{b0}) \quad (24)$$

この式の右辺の実部が正であれば、波の無反射条件は満たされる。数値計算で反射の起こる場合と無反射の場合を比べる。図7(a)は二種の回路を直接つないだ場合で、図7(b)は無反射のための素子を使った場合である。この二つの回路に同一の振動電圧を加えた場合の波の伝播の相違を図8に示した。回路の接続位置は $N = 80$ である。図8(a)は反射の起こる回路である。入力端に加えた振動電圧は回路をおよそ一定振幅で伝わり、接続位置に達する。異種の回路定数のため、入射波に比べ透過波は振幅も波長も変化する。それと同時に反射波の発生で入射波は乱れ、振幅振動を始めることが分かる。一方図8(b)に示した無反射回路では、接続位置に式(24)の素子をつなぐことで振幅一定の波が回路を伝わる。

式(22),(23)から、無反射のとき入射波と透過波の振幅は等しい。すなわち $A_T = A_I$ である。このことから無反射条件の実部すなわち抵抗の値を評価できる。接続位置に単位時間当たり流れ込む入射波の平均エネルギーを E_a とし、接続位置から単位時間当たり流れ出す透過波の平均エネルギーを E_b とする。波の振幅は共に等しいので、これを A_0 とすれば、 E_a, E_b は、それぞれ一段当たりのエネルギー密度 $\frac{1}{2} A_0^2 C_{a0}, \frac{1}{2} A_0^2 C_{b0}$ とそ

の移動する速さである群速度 v_{ga}, v_{gb} の積で表せる。群速度は $v_{ga} = \frac{1}{2L_{a1}C_{a0}}\sqrt{4 - L_{a1}C_{a0}\omega^2}$ で v_{gb} も同様である。これを使うと $E_a - E_b$ が計算できる。この値が無反射素子での損失 $\frac{1}{2}A_0^2G$ に等しいから、次式を得る。

$$G = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{C_{a0}}{L_{a1}}} \sqrt{4 - L_{a1}C_{a0}\omega^2} - \sqrt{\frac{C_{b0}}{L_{b1}}} \sqrt{4 - L_{b1}C_{b0}\omega^2} \right] \quad (25)$$

図9 無反射終端回路を伝わる波

$$\omega = 0.1, L_{a1} = C_{a0} = 1, L_{b1} = 10, \\ C_{b0} = 0.1, R_{b1} = 2, C = 0.2, G = 0.94.$$

Fig.9 Waveforms on the non-reflection terminal circuit.

< 4.3 > 無反射終端回路

LC はしご形回路を伝わる波は回路の終端に達すれば反射波の発生を招く。この反射波を防ぐ工夫も重要である。損失を含む回路上の波はエネルギーを失いながら伝わる。図6で領域1はLC回路で、領域2はRLC回路の場合を考える。領域1を一定振幅で伝わる波も、領域2では減衰してしまう。反射波が発生しないように、無反射条件式(23)を満たすインピーダンス Z を接続位置につなぐ。こうして、反射波は発生せず領域2では波を減衰させる回路が得られる。領域2を、 $Z_{b1} = j\omega L_{b1} + R_{b1}, Z_{b0} = \frac{1}{j\omega C_{b0}}$ で構成すると、 Z は次式で与えられる。

$$\frac{1}{Z} \equiv G + j\omega C = \frac{1}{2} \left[\sqrt{\frac{C_{a0}}{L_{a1}}} \sqrt{4 - L_{a1}C_{a0}\omega^2} \right.$$

$$\left. \pm \omega \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \cos\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1}\right) \right] \\ + j\frac{1}{2}\omega \left[C_{a0} + C_{b0} \pm \sqrt{A_1^2 + A_2^2} \sin\left(\frac{1}{2} \tan^{-1} \frac{A_2}{A_1}\right) \right] \quad (26)$$

$$A_1 = \frac{4C_{b0}L_{b1}}{R_{b1}^2 + (\omega L_{b1})^2} - C_{b0}^2 \quad (27)$$

$$A_2 = \frac{1}{\omega} \frac{4C_{b0}R_{b1}}{R_{b1}^2 + (\omega L_{b1})^2} \quad (28)$$

この値の G と C を無反射のための素子として使えば、反射波は発生せず、透過波は減衰しながら伝わることになる。図9にこの様子を示した。回路の領域1は80段までで、その後はRLCで構成された終端回路につながる。一定振幅の正弦波も80段を過ぎると、減衰しているのが分かる。この時反射波は全く現れない。

5. まとめ

はしご形回路における波動伝播および反射現象を調べ、以下のことを明らかにした。

- 1) ラプラス変換の公式を組み合わせることで、一次元のはしご形回路には厳密解の得られる回路例が多くあり、その具体例をいくつか示した。
- 2) 帯域通過のはしご形回路は厳密解の得られる例であるが、波動現象としても興味深い性質を持っている。この回路を伝わる波の位相速度と群速度は、周波数に依存して、同方向だけでなく逆方向の場合もあることを示した。
- 3) 素子定数の異なる二つのはしご形回路をつないだ場合の反射現象を調べた。反射係数、透過係数を導き、さらに無反射の条件を与えた。そして二つの回路の接続位置での波のエネルギーの保存と無反射条件の関係を明らかにした。
- 4) 無反射終端回路として、はしご形のRLC回路を考察した。

(平成9年5月14日受付、平成9年9月18日再受付)

文献

- (1) S.Noda : J.Phys.Soc.Jpn. 65(1996)3392.
- (2) 野田 : 電学論 A, 112 巻 11 号, 平成4年, 945.
- (3) R.Hirota and K.Suzuki : J.Phys.Soc.Jpn. 28(1970)1366.
- (4) H.Nagashima and Y.Amagishi : J.Phys.Soc.Jpn. 47(1979)2021.
- (5) N.Yajima: Prog.Theor.Phys. 58(1977)1114.
- (6) N.Yajima and J.Satsuma : Prog.Theor.Phys. 62(1979)370.

(7) S.Watanabe, M.Miyakawa and M.Toda :

J.Phys.Soc.Jpn. 45(1978)2030.

(8) L.Brillouin : 「Wave Propagation in Periodic Structure」, DOVER

(9) K.Lonngren and A.Scott : 「Solitons in Action」, Academic Press

(10) 森口 他 著 : 「数学公式 (二)」, 岩波

付録 1. ラプラス変換の公式

厳密解の導出で用いたラプラス変換の公式を以下に示す¹⁰⁾。関数 $f(t)$ のラプラス変換を $g(s)$ とすれば、

公式 1

$$\int_0^\infty dt e^{-st} [f(t) - \int_0^t du f(u) J_1(2\sqrt{au(t-u)}) \sqrt{\frac{au}{t-u}}] = g(s + \frac{a}{s})$$

公式 2

$$\int_0^\infty dt e^{-st} [f(t) - at \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta f(t \cos \theta) J_1(at \sin \theta) \cos \theta] = g(\sqrt{s^2 + a^2})$$

が成り立つ。

付録 2. 分散関係式 (11) の導出

正弦波入力であるから $V_0 = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$ とおき、式(2)、(3)、(8) から次式を得る。

$$V_n = \left[\frac{1}{2} \left((\sqrt{L_1 C_0} s + \frac{A}{\sqrt{L_1 C_0} s})^2 + B^2 + 2 \right) - \sqrt{((\sqrt{L_1 C_0} s + \frac{A}{\sqrt{L_1 C_0} s})^2 + B^2 + 2)^2 - 4} \right]^n \times \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \quad (29)$$

極の評価が難しいので V_n の正確な逆変換を求めることができない。しかしながら $s = \pm j\omega$ は極で、この二つの極から、正弦波を加えた場合の定常解 $v_{n,st}(t)$ が得られる。この解のラプラス変換を $V_{n,st}$ で表せば、次式を得る。

$$V_{n,st} = \frac{P_n}{s - j\omega} + \frac{\bar{P}_n}{s + j\omega} \quad (30)$$

$$P_n = V_n(s - j\omega)|_{s=j\omega} = \frac{1}{2j} q(\omega)^n \quad (31)$$

$$q(\omega) = \left[\frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0} \omega} \left(-\sqrt{B^2 L_1 C_0 \omega^2 - (L_1 C_0 \omega^2 - A)^2} + \sqrt{(B^2 + 4)L_1 C_0 \omega^2 - (L_1 C_0 \omega^2 - A)^2} \right) \right]^2 \quad (32)$$

$q(\omega)$ は、実数だけでなく複素数にもなる。 ω が式(12)、(13)の範囲にある時、 $q(\omega)$ は複素数となる。このとき

波は伝わる。 $q(\omega)$ と波の伝播条件のさらに詳しい説明は付録 3.で行う。波が伝わる場合の電位分布は

$$v_{n,st}(t) = \sin(\omega t - kn) \quad (33)$$

で表せる。もちろん ω と k は実数である。各節点電位は角周波数 ω で時間的に振動するだけでなく、この振動は回路上を伝わる。ここで波数 k は ω の関数である。波数は波の空間的な変化を表し、この二つの値の関係を分散関係という。波が伝わる時、 $q(\omega)$ は大きさ 1 の複素数である。

$$q(\omega) = \quad (34)$$

$$\exp \left[-j2 \tan^{-1} \sqrt{\frac{(L_1 C_0 \omega^2 - A)^2 - B^2 L_1 C_0 \omega^2}{(B^2 + 4)L_1 C_0 \omega^2 - (L_1 C_0 \omega^2 - A)^2}} \right]$$

式(30),(31),(34) から

$$v_{n,st}(t) = \sin(\omega t \quad (35)$$

$$-2n \tan^{-1} \sqrt{\frac{(L_1 C_0 \omega^2 - A)^2 - B^2 L_1 C_0 \omega^2}{(B^2 + 4)L_1 C_0 \omega^2 - (L_1 C_0 \omega^2 - A)^2}})$$

これと式(33)を比べれば式(11)が得られる。

付録 3. 波動の伝播条件

ω が 0 から ∞ まで変わるとき、式(32)の $q(\omega)$ は実数にも複素数にもなる。 $q(\omega)$ が複素数のとき、その大きさは 1 である。そして正弦波入力に対する定常解 $v_{n,st}(t)$ は式(35)で与えられる。一方、 $q(\omega)$ が実数のとき $-1 < q(\omega) < 1$ である。式(32)を用いれば $v_{n,st}(t)$ は次のようになる。

$$v_{n,st}(t) = q(\omega)^n \sin(\omega t) \quad (36)$$

ω が 0 から ∞ まで変化するとき、複素平面上での $q(\omega)$ の軌跡を図 10 に示した。 $q(\omega)$ が実数から複素数へ、あるいは複素数から実数へ変わるのは、次の四つの角周波数のときである。

$$\omega_1 = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4 + 4A} - \sqrt{B^2 + 4})$$

$$\omega_2 = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4A} - B)$$

$$\omega_3 = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4A} + B)$$

$$\omega_4 = \frac{1}{2\sqrt{L_1 C_0}} (\sqrt{B^2 + 4 + 4A} + \sqrt{B^2 + 4})$$

$\omega = 0$ で $q(\omega)$ は原点にあり、負の実軸上を移動する。 $\omega = \omega_1$ で $q(\omega)$ は P1 に達する。そして下半平面の単位円上を反時計方向に動き、 $\omega = \omega_2$ で正の実軸上の点 P2 に達する。次に $q(\omega)$ は正の実軸上を原点方向に動く。あ

る値で折り返し、 $\omega = \omega_3$ で再び P2 に戻る。さらに下半平面の単位円を時計方向に動き、 $\omega = \omega_4$ で P1 に達し、 $\omega = \infty$ で原点に至る。波の伝わる条件は、 $q(\omega)$ が単位円上にあることであり、 $q(\omega)$ が反時計方向に動く時、位相速度 V_p と群速度 V_g は同方向である。そして、 $q(\omega)$ が時計方向に動く時、位相速度 V_p と群速度 V_g は逆方向である。

図10 複素平面上での $q(\omega)$ の軌跡
Fig.10 Trajectory of $q(\omega)$ on the complex plane.

付録 4. 式(14)の数値計算

式(14)の数値計算はルンゲ・クッタ・ギル法を用いた。時間ステップごとに計算していくが、特に二重積分は次式を使う。

$$S_n(t) = \int_0^t dt_1 \int_0^{t_1} dt_2 v_n(t_2)$$

$$S_n(M\Delta) \simeq \Delta^2 \sum_{k=0}^{M-1} \sum_{j=0}^k v_n(j\Delta)$$

$$S_n((M+1)\Delta) \simeq S_n(M\Delta) + \Delta^2 \sum_{j=0}^M v_n(j\Delta)$$

ここで、 $t = M\Delta$ 、 M はステップ数、 Δ は時間のステップ幅である。

野田 俊一 (正員) 昭35年11月14日生。

昭59年3月佐賀大学理工学部電気工学科修士課程修了。昭62年3月九州大学大学院博士課程単位取得退学。同年4月弓削商船高等専門学校電子機械工学科講師。現在、助教授。工学博士。非線形波動の研究に従事。日本物理学会会員。