金属ラミネート遮水シースの透湿係数計算式

— 第一種完全楕円積分とJacobi楕円関数の応用例 —

正員 渡辺 和 夫 (フジクラ) 正員 永田 達 也 (中部電力)

A Calculation Formula of Permeability Coefficient of Metal Laminated Water-Proof Sheath
Kazuo Watanabe, Member(Fujikura Ltd.), Tatuya Nagata, Member(Chubu Electric Power Co., Inc.)

As an application of elliptic integral and elliptic function, a calculation formula of permeability coefficient of metal laminated water-proof sheath is obtained. The solution process is applicable to other problems such as heat conduction and electric current flow.

キーワード：遮水シース、透湿係数、楕円積分、等角写像

1. はじめに

CVケーブルの遮水対策として一般に金属被や金属ラミネートシース (図1) が採用されている。この金属ラミネートシースの遮水効果を定量的に表す指標として、透湿係数が定義され計算式(1)~(3)式が与えられている⁽¹⁾。これはシース部とラミネートテープのラップ部の透湿抵抗の直列回路と考え、全体としてラップ部の透湿係数 (G1) に支配される。しかし、いろいろなケースを想定した場合の遮水効果を論じる時には、シース部の透湿係数 (Gs) の厳密な計算も重要となる。しかし、(2)式はその導出過程が必ずしも明確でない。そこで本報ではGsの理論計算式を楕円積分と楕円関数を用いた等角写像の応用例として新たに導出した。この導出過程はほかの熱伝導や電流界の問題へも活用できるであろう。

$$G = 1 / (1 / G_s + 1 / G_l) \approx G_l \quad \cdots \cdots (1)$$

$$G_s = P \pi / \ln (8 t / \pi a) \quad \cdots \cdots (2)$$

$$G_l = P' \times 2 a / l \quad \cdots \cdots (3)$$

ここに、

G : シース全体の透湿係数
Gs : シース部の透湿係数
Gl : ラップ部の透湿係数
P : シースの固有透湿係数
P' : 接着層の固有透湿係数
(ただし $P \approx P'$ と仮定する)

図1. 金属ラミネートシースラップ部⁽¹⁾
Fig.1 Metal laminated sheath
t : シースの厚さ
2 a : ラップ部の厚さ
l : ラップ部の幅
r : シース内半径

2. シース部透湿係数計算式の導出

シース断面を図2(a)に示す。水分はシースの外周全面から透湿し、内面の遮水層ラップ部に向かって流れる。この時のシース部の透湿抵抗は、電流界で考えると、シース表面の電極と内面ラップ部の電極間の直流抵抗を求める問題と等価となる。従って、等角写像の原理を用いた二次元抵抗値問題として扱える。複素平面上での写像過程を図2(a)~(i)に示す。まず、電極配置を図2(a)に示すようにシース外半径 (r + t) を1に正規化してw-平面座標にと

る。このw-平面を後述する4種類の関数 (下記本文中に示す①~④式) により順次写像してゆく。最後は(i)図に示すW平面の平行平板電極配置となり、透湿抵抗Rsは(4)式で表され、透湿係数Gsは(5)式となる。

$$R_s = \frac{\rho}{2} \frac{K(k_1)}{K'(k_1)} \quad \cdots \cdots (4)$$

ここに、 ρ : シース材質の固有透湿抵抗

$$G_s = \frac{1}{R_s} = 2P \frac{K'(k_1)}{K(k_1)} \quad \cdots \cdots (5)$$

ここに、P : シース材質の固有透湿係数 (= 1 / ρ)

$$K(k_1) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k_1^2 z^2}} \quad \cdots \cdots (6)$$

$$K'(k_1) = \int_0^1 \frac{dz}{\sqrt{1-z^2} \sqrt{1-k_1'^2 z^2}} \quad \cdots \cdots (7)$$

K(k1)、K'(k1)はLegendre-Jacobiの第一種完全楕円積分であり、母数k1は図2の(f)Z'-平面から(g)Z''-平面の写像過程で求まる。また、k1'は補母数で、(8)式の関係式から求まる。

$$k_1^2 + k_1'^2 = 1 \quad \cdots \cdots (8)$$

写像過程の概要を以下に述べる。使用する4種類の関数①~④式は本文中に示す。(a)→(b) : (a)の円環領域を長方形領域に $z = \log w$ の関数 (①式) を使って写像する。(b)→(c) : (b)の上下半平面の対称性から上半平面領域を対象とする。(c)→(d) : 座標軸を置換する。(d)→(e) : Jacobiの楕円関数、 $Z = sn(z', k)$ (②式) を用いて、長方形領域を上半平面領域に写像する。(e)→(f) : Z平面を原領域として双対領域を扱う。(f)→(g) : Z'平面からZ'平面への写像には、一次関数 $Z' = (RZ' + S) / (PZ' + Q)$ (③式) を使用する。P、Q、R、SはZ'平面とZ''平面との対応によって係数を定め、F点の座標 $1/k_1^2$ を求める。(g)→(h) : (6)と(7)式の第一種完全楕円積分 (④式) を用いて、Z'平面上の上半平面を長方形領域に写像し、かつ両電極が対辺になるようにする。(h)→(i) : 双対性から原領域に戻し遮水層ラップ部電極とシース表面電極が平行平板電極となるようにする。

3. 実用計算式の導出

シース部の透湿係数Gsは上記の(5)式と(6)~(8)式より理論的に正確に求まる。しかし、楕円関数が入り計算が多少複雑になるので、ここでは、もう少し簡単な実用計算式を導出する。先の図2(c)において、 $a/r \ll \pi$ が成り立つので、E点を無限遠点とみなし、図3に示すような写像を行う。写像過程の概要を以下に述べる。

(a)→(b)： z' 平面から Z 平面への写像には、 $Z = (1 - \cos z')/2$ の関数を使用し、上半平面に写像する。(b)→(c)：上述の(f)→(g)の写像と同様に行い、D点の座標 $1/k_1^2$

図2 透湿抵抗計算式導出の写像過程

Fig.2 Derivational process of calculation formula of permeability

を求めると(10)式となる。(c)→(d)：上述の(g)→(h)の写像と同様に行う。以上より透湿係数Gsは(9)(10)式となる。

$$G_s = \frac{1}{R_s} = 2P \frac{K(k_1)}{K'(k_1)} \quad \dots\dots(9)$$

$$k_1^2 = \frac{\cosh\left(\frac{a\pi}{r \ln \frac{r+t}{r}}\right) - 1}{\cosh\left(\frac{a\pi}{r \ln \frac{r+t}{r}}\right) + 1} \quad \dots\dots(10)$$

ここに、2a：ラップ部の厚さ、r：シース内半径、t：シース厚さ、p：シース材質の固有透湿係数

図3 実用計算式の導出

Fig.3 Derivation of practical calculation formula

4. 数値計算例

本提案の式(9)(10)式と文献の(2)式による数値計算例を表1に示す。両者とも一致している。本提案式(9)(10)式にはシース内半径rもパラメータとして入っており、導出過程も明確となっている。本計算の手順としては、まず、 k_1^2 を計算し、次に市販の楕円積分数値表を利用し、この k_1^2 に対応する K/K' を読み取れば、手計算で容易に求めることができる。

表1. 275kV 1×2500mm²CVシース（但しラップ部除く）の透湿係数計算結果

Table.1 Calculation result of permeability coefficient

2a	本計算式(9)(10)式	文献の式(2)式
0.1mm	0.54P ($k_1^2 = 1.605 \times 10^{-4}$)	0.54P
0.2mm	0.62P ($k_1^2 = 6.42 \times 10^{-4}$)	0.61P
0.4mm	0.71P ($k_1^2 = 2.56 \times 10^{-3}$)	0.71P

* t = 6.5mm r = 130mm / 2 = 65mm

御教授頂きました元茨城大学寺門龍一教授に深謝します。
(平成11年7月16日受付)

文献 (1)速水敏幸：「CVケーブル」コロナ社p.193