大域的ゲージ条件を付加した保存則の積分形式による電磁界解析

正員 長谷部 信也 (明星大)

On subsidiary Global Gauge Condition, Electromagnetic Field Analysis Using Integral Form of Preservation Rule

Shinya Hasebe, Member (Meisei University)

The method based on intergral from of preservation rule is simple form and high accuracy in comparison with FEM. This paper shows that variable decreases adding a condition defined by the integral form of gauge enclosed nodal point. The decrease number agrees with the rank number of a matrix of homogeneous linear equation derived from the condition. For a numerical result, it is clear that this method removes redundant part into the linear equation derived from the integral form.

キーワード：電磁界解析，保存則，辺要素，ゲージ条件，空洞共振器

1. まえがき

電磁界解析では辺要素を用いた FEM が広く用いられているが⁽¹⁾，筆者は簡潔な定式化で，誤差の少ない手法を報告している⁽²⁾。本レターでは，この手法に大域的ゲージ条件を付加し，未知数を低減することを述べている。空洞共振器の解析例で手法の有効性を明確にしている。

2. 保存則の積分形式と大域的ゲージ条件

静電磁場のソース（源泉）が電流密度 J_s の場合，筆者らの提案する保存則の積分形式は簡潔な次式で示される（ A ：ベクトルポテンシャル， μ ：透磁率）。

$$\oint \left\{ n \times \frac{1}{\mu} \Delta \times A \right\} ds = \int J_s dv \quad \dots\dots\dots (1)$$

更に， $\nabla \cdot A = 0$ なるゲージ条件は次式のように境界積分形（大域的ゲージ条件と呼ぶ）で与えられる。

$$\oint n \cdot A ds = 0 \quad \dots\dots\dots (2)$$

〈2・1〉 保存則の局所マトリックス この手法は領域を要素（ここでは6面体辺要素を扱う）に分割する。基準6面体辺要素（ $-1 \leq i, y, z \leq 1$ ，図2参照）では， A は次のように表現できる（ $\{Nx\}, \{Ny\}, \{Nz\}$ ：各成分の辺で値が1となる内挿関数で次数4の行ベクトル，例えば Nx は $(1-y_i)(1-zz_i)/4$ で Nxi 辺で値1， $\{Ax\}, \{Ay\}, \{Az\}$ 各成分辺の係数で次数4の列ベクトル）。

$$A = \begin{bmatrix} \{Nx(y, z)\} i \{Ny(x, z)\} j \{Nz(x, y)\} k \\ \{Ax\} \\ \{Ay\} \\ \{Az\} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (3)$$

ここで，辺を囲む領域と境界で(1)式の保存則が成立するとする。この扱いは， Nx, Ny, Nz 成分辺ごとに部分領域，部分境界（ Nx 成分辺の場合を図1に示す， $Vx1$

図1 Nx 成分辺を囲む領域と境界
Fig. 1. Areas and boundaries enclosing edges for Nx .

図2 節点を囲む境界
Fig. 2. Boundaries enclosing nodal.

～ $Vx4, \Gamma x2$ 図示）で，局所マトリックス〔(1)式の部分演算〕を求め，全体マトリックス $[P]$ を合成する。未知辺数を M_e とすれば，(1)式は次式の方程式となる〔 $[P]$ ： $M_e \times M_e$ 行列， $\{A\}$ ：成分辺の係数の全体（これ以降，未知数と呼ぶ）で次数 M_e の列ベクトル〕。

$$(1/\mu)[P]\{A\} = \{J_s\} \quad \dots\dots\dots (4)$$

〈2・2〉 大域的ゲージ条件の局所マトリックス A は要素間の節点で不連続となり，節点を囲む境界で(2)式の設定できる。節点を囲む部分境界 $\Gamma_k (k=1 \sim 8)$ に分割（図2， $\Gamma 2$ 図示）すると，局所マトリックス Q_1 〔(2)式の部分演算〕は(5)式となる（行は節点 $P_1 \sim P_8$ ，列は $Nx1 \sim Nz4$ に対応）。 Q_1 を全体マトリックス $[Q]$ に合成することで，節点での(2)式の条件が求められる。

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 9 & 3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 1 & 3 \\ -9 & -3 & -1 & 3 & 3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 9 & 3 & 1 \\ -3 & -9 & -3 & -1 & -3 & -1 & -3 & -9 & 1 & 3 & 9 & 3 \\ 3 & 9 & 3 & 1 & -9 & -3 & -1 & -3 & 3 & 1 & 3 & 9 \\ 3 & 1 & 3 & 9 & 3 & 9 & 3 & 1 & -9 & -3 & -1 & -3 \\ -3 & -1 & -3 & -9 & 1 & 3 & 9 & 3 & -3 & -9 & -3 & -1 \\ -1 & -3 & -9 & -3 & -1 & -3 & -9 & -3 & -1 & -3 & -9 & -3 \\ 1 & 3 & 9 & 3 & -3 & -9 & -3 & -1 & -3 & -1 & -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

〈2・3〉 境界節点での大域的ゲージ条件と境界条件

[Q]の行は、領域内節点(内節点)と境界節点での条件を示す。境界節点では、Aの境界条件[保存則での扱いは文献(2)参照]に関する境界面 Γ_{ex} の検討が必要となる。

条件1: $A_n=0, \partial A_{||}/\partial n=0$(6)

この条件では境界節点に対応する[Q]の行に変更はない。

条件2: $A_{||}=0, \partial A_n/\partial n=0$(7)

この条件では、 A_n は $\Gamma_{ex}(\Gamma_{+n})$ と内部境界 Γ_{-n} で一定なので、次式が成立する。

$$\int_{\Gamma_{+n}} n \cdot A ds + \int_{\Gamma_{-n}} n \cdot A ds = 0 \quad \dots\dots\dots (8)$$

つまり、 A_n 成分が消去され3成分の条件でないで、この境界節点に対応する[Q]の行は削除できる。

したがって、内節点と条件1の境界節点(両節点をゲージ節点と呼ぶ)で(2)式の条件を課す。ゲージ節点数を M_p とすれば次の同次方程式を得る([Q]; $M_p \times M_e$ 行列)。

$$[Q][A] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (9)$$

3. 大域的ゲージ条件と未知数の低減

(9)式は $M_e > M_p$ なので自明でない解をもち、解空間 W の次元 M_w と M_e には次の関係がある⁽³⁾。

$$M_w = M_e - M_r \quad M_r; \text{rank}(Q) \quad \dots\dots\dots (10)$$

{A}は一次独立の M_w 個の基で次式のように分割できる。

$$\begin{bmatrix} A_{r1} \\ \vdots \\ A_{rMr} \\ A_{w1} \\ \vdots \\ A_{wMw} \end{bmatrix} = A_{w1} \begin{bmatrix} C_{r1W1} \\ \vdots \\ C_{rMrW1} \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} + \dots + A_{wMw} \begin{bmatrix} C_{r1WMw} \\ \vdots \\ C_{rMrWMw} \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (11)$$

つまり、次式のように M_w 個の独立した変数 A_w の値が決まると、 M_r 個の A_r の値が求められる。

$$A_{rj} = \sum_{k=1}^{M_w} A_{wk} C_{rjWk} \quad (j=1 \sim M_r) \quad \dots\dots\dots (12)$$

この関係より(4)式の行列[P]に以下の処理ができる。

(1) A_w に対応する行における次式の演算

$$dw_i w_k = dw_i w_k + \sum_{j=1}^{M_r} dw_i r_j C_{rjWk} \quad (k=1 \sim M_w) \quad \dots\dots\dots (13)$$

(A_{wk} の列に対応する要素 $dw_i w_k$ へ、 A_{rj} に対応する列の要素 $dw_i r_j$ を加算)

(2) 独立の変数でない A_r に対応する行と列の削除

表1 ゲージ節点数、低減数と零固有値数

Table 1. Gauge nodal number, reduction number and zero eigenvalue number.

分割数 N	8		64
	V	E	H
ゲージ節点数 M_p	1	27	27
未知数 M_e	6	54	108
低減数 M_w	5	28	81
削減数 M_r	1	26	27
零固有値数 ⁽²⁾	1	26	27

こうして、[P]は $M_w \times M_w$ 行列に低減できる。独立の変数 A_w が得られると、 A_r は(12)式で求められる。

4. 解析例

立方体空洞共振器を解析する。電界E、磁界Hに関して同形なのでVで表すと、保存則と大域的ゲージ条件および境界条件は次のようになる($x^2; \epsilon \mu \omega^2$)。

$$\oint n \times (\nabla \times V) ds - \int x^2 V dV = 0 \quad \dots\dots\dots (14)$$

$$\oint n \cdot V ds = 0 \quad \dots\dots\dots (15)$$

$$V \equiv E; \text{条件2} \quad V_{||}=0, \partial V_n/\partial n=0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$$V \equiv H; \text{条件1} \quad V_n=0, \partial V_{||}/\partial n=0 \quad \dots\dots\dots (17)$$

ゲージ節点は $V \equiv E$ では内節点、 $V \equiv H$ では内節点+境界節点となる。領域を6面体辺要素に分割し、全体マトリックスを合成し、未知数{V}に関する次式を得る([P], [L]: $M_e \times M_e$ 行列, [Q]: $M_p \times M_e$ 行列)。

$$([P] - x^2[L])[V] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (18)$$

$$[Q][V] = \{0\} \quad \dots\dots\dots (19)$$

解析は、各辺の長さが2aで8分割の場合のE、H解析と、各辺の長さがaで64分割の場合のE解析を行った。未知辺数を低減した本手法での固有値は、従来の手法による固有値⁽²⁾(零固有値は除く)と同値であり、固有ベクトルも線形変換により一致した。そして表1に示すように、削減数 M_r は零固有値数であることが分かった。

5. むすび

明らかにしたのは、以下の項目である。

- (1) 大域的ゲージ条件は(9)式の同次方程式となる。
- (2) 未知数の削減数は(9)式の $\text{rank}[Q]$ に等しい。
- (3) 解析例より、未知数の低減は(4)式の[P]に含む冗長な成分を除去すると言える。

渦電流問題での低減方法⁽⁴⁾との比較が残されている。

(平成10年9月16日受付, 同10年11月2日再受付)

文 献

- (1) 坪井, 他: 数値電磁界解析法の基礎(平6) 養賢堂
- (2) 長谷部: 「保存則の積分形式による電磁界解析」, AEM学誌, 5, No. 3, 14~19(平9-9)
- (3) 三宅: 入門線形代数(平7) 培風館
- (4) R. Albancese, et al.: "Solution of Three Dimensional Eddy Current Problems by Integral and Differential Method", IEEE Trans., MAG-24, 98(1988)