差分法の任意形状格子メッシュへの適用に関する検討

正員 岩本 雅民 (香川大)

非会員 岩本 宙造 (広島大)

Application of Finite Difference Method to Arbitrary Mesh Points

Masatami Iwamoto, Member (Kagawa University) and Chuzo Iwamoto, Non-member (Hiroshima University)

Presently the finite element method is widely used in the field analysis. It is easily applied to arbitrary mesh points and curved boundaries. On the other hand, it is believed that the finite difference method is applicable primarily to rectangular meshes and that it is difficult to fit the mesh points to curved boundaries. Most of simulation programs for field analysis are written by use of the finite element method. The finite difference method seems to be out of date. This evaluation is not fair to the finite difference method.

In this paper, the author likes to make it clear that the finite difference method is applicable to arbitrary mesh points with high accuracy. The finite difference equations of 4th and 3rd order approximation are derived. An example of coaxial electrodes is numerically solved and successfully demonstrates the feasibility.

キーワード：数値計算，差分法，任意形状格子メッシュ，曲線境界，数値誤差

1. まえがき

この論文は，差分法が有限要素法より原理的に優れていると主張したい。今，有限要素法が全盛である。差分法の旗色は悪い。数値解析が本格化したのは大型コンピュータが出現した1960年代である。筆者の一人は1960年に電機メーカーに入社し，電界磁界の数値解析を始めた。当時は差分法が使用された。40年後の今，差分法の影は薄い。差分法が失速したのは，次の暗黙裡の認識に起因すると思われる。

- ・差分法は矩形格子メッシュに適用された。差分法は任意形状の格子メッシュには適用できないとの認識。
- ・差分法では境界を矩形メッシュでしか扱えないとの認識。

差分法⁽¹⁻²⁾は「手計算」の時代に広く使用された。コンピュータが本格的に利用できるようになると，数値解析関係者の関心は，有限要素法⁽³⁻⁴⁾と境界要素法⁽⁵⁾に移った。コンピュータによる差分法の良さの追求は，未だ十分にはなされていないように思われる。ちなみに，最近の学会⁽⁶⁾をみても差分法に関する発表はほとんどない。

最近，少数ながら差分法に関する専門書が刊行されている⁽⁷⁻⁸⁾。しかし，それらは手計算時代の矩形メッシュのアルゴリズムを踏襲している。

筆者の一人は「差分法も任意形状の格子メッシュに適用できるはず」というコンセプトを持った。それは数値解析を始めた1960年代にまでさかのぼる。しかし，その後，この問題の検討例を見かけない。遅きに失した感はあるが，この論文で差分法の再検討に挑戦した。

この論文は，差分法が有限要素法と比べて遜色ないことを示したい。検討した差分法は次の3つの特長をもつ。

- ・差分法は任意格子メッシュに適用できる。曲線的な境界

にも良好に適合できる。これは有限要素法の利点と同じ。

- ・差分式に取り込む格子点を自由に選ぶことができる。有限要素法では，系全体のエネルギー変分原理を使うので，格子点の組み合わせに要素分割にともなう制約がある。
- ・差分法は理論が単純で分かりやすい。近似の次数を明確に把握できる。

差分法の良さが再認識され，その応用が再び活発化することを願う。

2. 理論

今までの差分法は矩形格子メッシュに適用された⁽⁷⁻⁸⁾。境界では矩形格子点と境界線が一致しない。そこでは補間法を用いて差分式を導いていた。このため，境界近傍にある格子点の差分式の近似度が曖昧で不十分になっていた。

この論文の差分法は任意形状の格子メッシュに適用できる。4次近似または3次近似の差分式をコンピュータで数値的に求める。補間法は使用しない。

2次元 (x, y) を例に説明する。今までの差分法の議論と同様に，Taylor展開を用いる。

図1のように，ある格子点 $P_0=(x_0, y_0)$ と，その近傍の任意点 $P=(x, y)$ とを考える。点 P のポテンシャル（例えば電位） $\Phi(x, y)$ を，Taylor展開を用いて点 P_0 のポテンシ

図1 点 P_0 とその近傍点 P
Fig.1. The point P_0 and its neighboring point P .

ル $\phi(x_0, y_0)$ で表現する。その結果が式(1)である。ここで、 $dx=x-x_0$, $dy=y-y_0$ とする。また、 ϕ_x , ϕ_{xx} ...などは、ポテンシャル ϕ の点 $P_0=(x_0, y_0)$ における微分値とする。

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & \phi(x_0, y_0) + (\phi_x dx + \phi_y dy) \\ & + \frac{1}{2}(\phi_{xx} dx^2 + 2\phi_{xy} dx dy + \phi_{yy} dy^2) \\ & + \frac{1}{6}(\phi_{xxx} dx^3 + 3\phi_{xxy} dx^2 dy + 3\phi_{xyy} dx dy^2 + \phi_{yyy} dy^3) \\ & + O(h^4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(1)$$

ここまでは、今までの差分法と同じである。

<2.1> 10 点格子の差分式 今までの差分法の理論は、矩形格子メッシュの議論から始まった。この論文の差分法は、任意形状の格子メッシュから始める。

図2に「10点格子」を示す。中心格子点10と周りの9個の格子点の合計10個の格子点で構成されている。この10点格子について、4次近似の差分式を導くことができる。

図2 10点格子
Fig.2. 10-point mesh.

図2で、中心の格子点10を $P_0=(x_0, y_0)$ とする。その周りの9個の格子点を $P_j=(x_j, y_j)$ とする ($j=1, 2, 3, \dots, 9$)。この9個の格子点のポテンシャル $\phi(x_j, y_j)$ を、Taylor 展開の式(1)を用いて表現する。

次に、この9個のポテンシャル表現式 $\phi(x_j, y_j)$ のそれぞれに、重み係数 k_j を掛けて足し合わせる。その結果、次の式(2)が得られる。ここで、 $dx_j=x_j-x_0$, $dy_j=y_j-y_0$ とする。また、 $O(h^4)$ は4次以上の項 ($dx^4, dy^4, dx^3 dy$ など) を表す。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^9 k_j \phi(x_j, y_j) = & \sum_{j=1}^9 k_j \phi(x_0, y_0) \\ & + \phi_x \sum_{j=1}^9 k_j dx_j + \phi_y \sum_{j=1}^9 k_j dy_j + \frac{1}{2} \phi_{xx} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j^2 \\ & + \phi_{xy} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j dy_j + \frac{1}{2} \phi_{yy} \sum_{j=1}^9 k_j dy_j^2 + \frac{1}{6} \phi_{xxx} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j^3 \\ & + \frac{1}{2} \phi_{xxy} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j^2 dy_j + \frac{1}{2} \phi_{xyy} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j dy_j^2 \\ & + \frac{1}{6} \phi_{yyy} \sum_{j=1}^9 k_j dy_j^3 + O(h^4) \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(2)$$

式(2)の右辺で、 ϕ_{xx} と ϕ_{yy} の項の存在に注目しよう。次の連立方程式(3)が成立するように、重み係数 k_j を選ぶ。そうすると、式(2)の右辺には、 $\phi(x_0, y_0)$ の項、ラプラス方程式の項 [$(\phi_{xx} + \phi_{yy})$] および誤差項 $O(h^4)$ だけが残る。

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^9 k_j dx_j &= 0, & \sum_{j=1}^9 k_j dy_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^9 k_j (dx_j^2 - dy_j^2) &= 0, & \sum_{j=1}^9 k_j dx_j dy_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^9 k_j dx_j^3 &= 0, & \sum_{j=1}^9 k_j dx_j^2 dy_j &= 0 \\ \sum_{j=1}^9 k_j dx_j dy_j^2 &= 0, & \sum_{j=1}^9 k_j dy_j^3 &= 0 \end{aligned} \quad \dots\dots\dots(3)$$

すなわち、各格子点の重み係数 k_j をこの連立方程式(3)を満足するように決めれば、式(2)からラプラス方程式が取り出せる。連立方程式(3)をコンピュータで数値的に解いて重み係数 k_j を決める。これが本論文の差分法の特徴である。

式(3)は、未知数9個の8元連立同次方程式である。 k_j の一つを仮定し、他の解 k はそれに対する比として求める。

このようにして k_j を決めると、式(2)からラプラス方程式の項を次のように取り出すことができる。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{2}{\sum_{j=1}^9 k_j dx_j^2} \left(\sum_{j=1}^9 k_j \phi_j - \sum_{j=1}^9 k_j \phi_0 \right) + O(h^4) \quad \dots\dots\dots(4)$$

ここで、 ϕ_j は格子点 P_j のポテンシャルで $\phi_j = \phi(x_j, y_j)$ である。 ϕ_0 は中心格子点10、すなわち点 P_0 のポテンシャルで $\phi_0 = \phi(x_0, y_0)$ である。

式(4)において4次の誤差項 $O(h^4)$ を無視すれば(4次近似と呼ぶ)、ラプラス方程式 [$(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0$] は次の式(5)と等価になる。

$$\sum_{j=1}^9 k_j \phi_j - \sum_{j=1}^9 k_j \phi_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(5)$$

ここで、 k_{sum} を次のように定義する。

$$k_{sum} = \sum_{j=1}^9 k_j$$

式(5)から、差分式として次の式(6)が得られる。

$$\phi_0 = \sum_{j=1}^9 \frac{k_j}{k_{sum}} \phi_j \quad \dots\dots\dots(6)$$

この式が、図2の任意形状の10点格子の差分式である。その近似度は4次である。

<2.2> 6点格子の差分式 任意の「6点格子」を用いて、3次近似差分式が得られることを示そう。図3は6点格子である。

図3 6点格子
Fig.3. 6-point mesh.

中心格子点6と周り5個の格子点の合計6個の格子点から構成されている。式(2) (ただし, Σ の $j=1, \dots, 5$) からラプラス方程式を取り出す。前節と同様の議論から, 各格子点の重み係数 k_j を, 次の連立方程式(7)を満足するように選ぶ。

$$\sum_{j=1}^5 k_j dx_j = 0, \quad \sum_{j=1}^5 k_j dy_j = 0$$

$$\sum_{j=1}^5 k_j dx_j dy_j = 0, \quad \sum_{j=1}^5 k_j (dx_j^2 - dy_j^2) = 0 \quad \dots\dots\dots(7)$$

これは未知数5個の4元連立同次方程式である。これを数値的に解いて重み係数 k_j を決める。再び云うが, これが本論文の差分法の特徴である。この k_j を用いて式(2)を書き直すと, 次の式(8)が得られる。ここで $O(h^3)$ は3次以上の項 (dx^3, dy^3, dx^2dy など) を表す。

$$\phi_{xx} + \phi_{yy} = \frac{2}{\sum_{j=1}^5 k_j dx_j^2} \left(\sum_{j=1}^5 k_j \phi_j - \sum_{j=1}^5 k_j \phi_0 \right) + O(h^3)$$

.....(8)

ここで, $O(h^3)$ を無視すると (3次近似と呼ぶ), ラプラス方程式 [$(\phi_{xx} + \phi_{yy}) = 0$] は次の式(9)と等価になる。

$$\sum_{j=1}^5 k_j \phi_j - \sum_{j=1}^5 k_j \phi_0 = 0 \quad \dots\dots\dots(9)$$

ここで, k_{sum} を次式で定義する。

$$k_{sum} = \sum_{j=1}^5 k_j$$

式(9)から, 差分式として次の式(10)が得られる。

$$\phi_0 = \frac{\sum_{j=1}^5 k_j}{\sum_{j=1}^5 k_{sum}} \phi_j \quad \dots\dots\dots(10)$$

これが, 図3の任意の6点格子に対する差分式である。その近似度は3次である。

<2.3> 5点格子の差分式 一般的に, 図4に示すような任意形状の「5点格子」では, 差分式が得られない。なぜなら, 各格子点の重み係数 k_j を決める連立方程式(3)または(7)で, 方程式の個数が未知数 k_j の個数より多いから。

しかし, 特別な形状の5点格子については, この連立方程式を満足する重み係数 k_j が存在する。この証明は次節2.4で説明する。本節では, 得られた結果を先に述べる。

図5に示す3種類の5点格子には, 3次近似の重み係数 k_j を決める連立方程式(7)を満足する解が存在する。すなわち, 3次近似の差分式が得られる。

図4 一般の5点格子
Fig.4. 5-point mesh.

(a) 任意の直交格子 (b) 等3辺直交格子 (c) 1軸対称5点格子
図5 3次近似の差分式を与える5点格子
Fig.5. 5-point mesh of 3rd order approximation. (a)Rectangular mesh. (b)Rectangular mesh with three arms of equal length. (c)Symmetric 5-point mesh.

図6に示す2種類の5点格子には, 4次近似の重み係数 k_j を決める連立方程式(3)を満足する解が存在する。すなわち, 4次近似の差分式が得られる。

以上を表1にまとめた。その証明は次節2.4で述べる。

(a) 2軸対称矩形格子 (b) 正方形格子

図6 4次近似の差分式を与える5点格子
Fig.6. 5-point mesh of 4th order approximation. (a)Rectangular mesh with 2 symmetric axes. (b)Square mesh.

表1 5点格子の差分式の近似度
Table 1 Approximation order of 5-point meshes.

5点格子	差分近似度
・ 任意の5点格子 (図4)	差分式なし
・ 任意の直交格子 (図5(a))	3次近似
・ 等3辺直交格子 (図5(b))	3次近似
・ 1軸対称5点格子 (図5(c))	3次近似
・ 2軸対称矩形格子 (図6(a))	4次近似
・ 正方形格子 (図6(b))	4次近似

今までの差分法は矩形メッシュの5点格子を採用していた。空間のほとんどの格子点を, 正方形格子 (図6(b)) または2軸対称矩形格子 (図6(a)) にとっていた。表1から分かるように, これらは4次近似の差分式である。また, 境界近傍では境界線が矩形メッシュを横切る。そのため, 図5(a) (b) に示すような対称性が崩れた5点直交格子になった。これについて, 今までの差分法では補間法を用いて差分式を導いていた。

この論文の差分法では補間法を用いない。図5の5点格子について, 連立方程式(7)を数値的に解いて重み係数 k_j を求め差分式を得る。その差分式の近似度は3次である。

<2.4> 5点格子の差分式の近似度証明 図5に示した5点格子に, 任意の格子点1個 (点aとする) を追加する。この追加によって構成される6点格子について, 連立方程式(7)を数値的に解く。その結果, 追加した格子点aの重み係数 $k_a=0$ が数値解として得られる。これは, 最初の5点格子

だけで3次近似の差分式が得られることを意味する。

これを一般的に証明するためには、連立方程式(7)を数式的に解けばよい。数式処理プログラム⁽⁹⁾を利用して数式的に解く。その結果、追加した格子点の重み係数 $k_a=0$ が数式的に導かれる。これで一般的に証明したことになる。なお、他の k_j の数式解は式が膨大でここには記載できない。

同様に、図6に示した5点格子に、任意の格子点5個(点a, b, c, d, eとする)を追加する。これで構成される10点格子について、連立方程式(3)を数式処理プログラムで解く。これによって、追加した5個の格子点に対する重み係数がすべてゼロ($k_a=k_b=k_c=k_d=k_e=0$)になることが数式的に証明できる。これは、最初の5点格子だけで4次近似の差分式が得られることを意味する。以上で証明された。

<2.5> 矩形格子の差分式の近似度とその改善 3次近似の直交5点格子(図5)に対して、その周りの新たな5個の格子点を追加付与し10点格子を構成させる。これによって、4次近似の差分式を得ることができる。

図7 矩形格子分割と近似度の改善

Fig.7. Approximation order of rectangular meshes and its improvement. (a)Conventional rectangular meshes. (b)Improvement of the approximation order by adding extra points.

図7の例で説明する。表1の結果から、図7(a)で、正方格子点1と2軸対称矩形格子点2は4次近似差分式を与える。格子点3(メッシュ分割遷移点)と4(境界近傍点)は3次近似差分式を与える。

図7(a)の格子点3と4について、その差分近似度(3次)を4次に改善することができる。すなわち、図7(b)に示すように、格子点3に対して二重線で結んだ新たな5個の隣接格子点を組み合わせて10点格子を構成させれば、4次近似差分式が得られる。

また、境界近傍の格子点4に対しても、三重線で結んだ新たな5個の隣接格子点を組み合わせて10点格子を構成させれば、4次近似の差分式が得られる。

<2.6> 曲線的な境界への差分法の適合 何度も述べたが、この論文で述べる差分法では格子点を任意に配置できる。したがって、曲線的な境界上に複数の格子点を自由に配置できる。境界近傍の10点格子に、境界上に任意に配置した複数の格子点を取り込み、4次近似の差分式を導く。

図7(b)の◎印点はその例である。これによって差分法も曲線的な境界形状に良好に適合できる。境界上へ格子点を自由に配置できることでは、この論文で検討した差分法は有限要素法と比べて遜色ない。

3. 計算例による検討

前章で述べた理論を原理的に検証したい。その目的で、簡単な問題例を差分法で計算する。

図8 同軸円筒電極

Fig.8. Coaxial cylindrical electrodes.

<3.1> 同軸円筒電極の電界計算 図8に示す同軸円筒電極の電界を解析する例を考える。寸法と電極電圧は図中に記入した。同軸円筒電極の電位分布の理論値は簡単に求められる。図8に $V(r)$ として示した。以下の議論で、数値解析の計算誤差は次式で定義する。

$$\text{計算誤差} = \frac{\text{数値解析結果} - \text{理論値} V(r)}{\text{理論値} V(r)} \quad \dots\dots\dots(11)$$

図9の同軸円筒電極の第一象限(対称性を利用)に、粗い格子メッシュを形成し解析する。粗いメッシュでは誤差が大きくなる。それは誤差の議論に都合がよい。実用的ではないが原理検証には十分である。

この論文の差分法では、格子メッシュは任意の形状に配置してよい。しかし、議論を単純にするために、格子点10だけを任意点に選ぶ。その他の格子点は正方格子点に配置する。その理由は、内側電極に近い格子点10の位置だけを任意に動かして、その計算誤差への影響を議論したいから。

図9 同軸円筒電極の格子メッシュ(第一象限)

Fig.9. Mesh distribution in coaxial cylindrical electrodes.

ここで格子点 10 を特別に選んだ理由は、それが内側電極に最近接であるので、他の点より計算誤差が大きくなるから。

図 9 で、電極境界上には、境界線と矩形メッシュ線の交点の格子点 m だけでなく、境界上の任意位置に自由に格子点 n を配置できる。これがこの論文の差分法の利点である。

この差分法では、隣接する複数の格子点 (10 個または 6 個) を任意に組み合わせて差分式を作る。図 9 の斜めに交差した格子メッシュが示すように、ここで検討した差分法では、上下左右の隣接格子点だけでなく、斜め方向にある格子点を自由に組み合わせて差分式を導くことができる。格子点の自由な組み合わせが、この論文の差分法のもう一つの利点である。この利点は有限要素法にはない。なぜなら、有限要素法では要素分割にともなう制約があるからである。例えば三角要素が重なる要素分割は難しい。

格子点 10 の位置を任意点を選び、任意形状メッシュとして計算する。この格子点 10 の位置の選び方が解析結果の誤差に及ぼす影響について検討しよう。

<3.2> 10 点格子の 4 次近似差分式による解 図 9 に於いて、格子点 10 とその周りの 9 個の格子点 1-2-3-4-5-6-7-8-9 で 10 点格子を構成する。この 10 点格子について 4 次近似差分式を導く。なお、格子点 9 は外側境界上に位置し、格子点 10 からかなり離れている。しかし、外側境界の影響を直接取り込むために選んだ。

図 10 格子点 10 を中心とする 10 点格子
Fig.10. 10-point mesh around the point 10.

図 10 には、この 10 点格子だけを取り出して示した。ここで、格子点 10 を半径 $R=\sqrt{2}$ の円弧 (点線で示す) の上で移動させながら計算する。そのようにする理由は、同軸円筒電界では円弧は理論的に等電位になるからである。その結果、格子点 10 の配置の仕方が誤差に及ぼす影響を分離して議論できる。すなわち、その格子点 10 の極座標を $(R=\sqrt{2}, \theta)$ とする。この極座標 θ をパラメータとして変化させながら計算し、そのときの計算誤差を求める。

10 点格子による 4 次近似差分法解の誤差を、図 11 の○印データで示した。同図の横軸は、格子点 10 を円弧上 $R=\sqrt{2}$ に配置した位置の極座標 θ (角度) である。なお、格子点 10 の極座標 θ が 0 度または 90 度に近いと、誤差が極端に大きくなっている。その原因は、格子が極端にびつになるからである。実用的には意味がない。

4 次近似差分法解の誤差 (○印データ) はおよそ 0.05 (5%) であることが分かる。後述の「6 点格子による 3 次

図 11 解析結果における格子点 10 の計算誤差
Fig.11. Error of field calculations of the coaxial electrodes.

近似差分法解の誤差 (□印データ) や「有限要素法解の誤差 (△印データ)」より小さい。理論的期待に合致する。

なお、図 11 の○印データで、 $\theta=45$ 度に対する解の誤差 0.12 (12%) は特異的に大きい。その理由は次のとおり。まず、格子点 6 を含む 10 点格子から 4 次近似差分式が得られる。これに加えて、 $\theta=45$ 度のときは、格子点 10 と格子点 1-3-5-7 の 5 点が正方格子を構成する (格子点 6 を含まない)。これからも 4 次近似差分式が得られる。この 2 つの差分式の和として格子点 10 の差分式が得られる。このため、内側境界上の格子点 6 の影響の取り込み効果が弱まるからである。

<3.3> 6 点格子の 3 次近似差分式による解 図 12 には、格子点 10 とその周りの 5 個の格子点 1-3-5-6-7 で構成した 6 点格子を示す。この 6 点格子について 3 次近似差分式を導き解析する。格子点 10 の解析結果の誤差を、図 11 の□印データで示した。誤差はおよそ 0.2 (20%) である。これは、前節 3.2 で述べた 4 次近似差分式による解析の誤差 (○印データ) より 4 倍大きい。3 次近似と 4 次近似の理論的な近似誤差の比は $O(h^3)/O(h^4)=h^{-1}$ である。 h はメッシュの分割パラメータにとる。この問題例では、最大寸法 (外側電極半径) を 4 分割しているから、 $h=1/4$ と見てよからう。このため、3 次近似誤差が 4 次近似誤差に比べて $h^{-1}=4$ 倍大きくなったのである。理論的な期待と合致する。

見方を変える。4 次近似の 10 点格子 (図 10) に比べ、図

図 12 6 点格子
Fig.12. 6-point mesh.

12の3次近似の6点格子では、点線円で示した4個の格子点2-4-8-9が差分式に取り込まれていない。誤差が大きくなった原因である。

〈3.4〉有限要素法による解との比較 比較のために、図9の格子点で三角要素を作り、有限要素法（基本的な一次三角形要素）⁽¹⁰⁾で解析した。

図9の要素分割を用いて有限要素法で解析した誤差を、図11の△印データで示す。誤差はおおよそ0.09(9%)である。4次近似差分法解の誤差(○印データ)より大きくなった。つまり、4次近似差分法の精度が有限要素法より優る結果例となった。以下に、その理由を考察する。

図13 有限要素法のための要素分割
Fig.13. Triangle elements for finite element method.

有限要素法の理論的な近似度の一般的議論は難しい。図13は、格子点10の周りの有限要素分割を示す。この図と4次近似差分法の図10とを比較する。有限要素法では図13に点線円で示した2個の格子点2と9が取り込まれていない。この分、有限要素法の精度が劣ったのであろう。理論的な期待と矛盾しない。

一方、図11の有限要素法の誤差(△印データ)は、3次近似差分式による解析結果の誤差(□印データ)より小さい。つまり、3次近似差分式の解は、有限要素法に比べて精度が劣る結果例となった。その原因は次のとおり。図12と図13の比較から、図12の3次近似の6点格子は、同図に点線円で示した格子点4と8を差分式に取り込んでいない。この影響であろう。これも理論的予想と矛盾しない。

4. むすび

理論検討で得られた結果をまとめると；

- ・差分法は任意形状の格子メッシュに適用できる。差分法の適用は矩形格子に限定されない。
- ・任意形状の10点格子から、4次近似の差分式が導ける。
- ・任意形状の6点格子から、3次近似の差分式が導ける。
- ・それらの効果として、境界上に複数の格子点を任意に配置し、差分式を導くことができる。これによって、差分法でも曲線的な境界形状に良好に適合できる。
- ・差分法では、格子点の組み合わせを自由に選ぶことができる。これは計算精度の向上に寄与する。なお、有限要素法では格子点の組み合わせに要素分割の制約がある。
- ・なお、今までの差分式で用いられた矩形格子の差分式の

近似度は、正方格子と2軸対称矩形格子の場合が4次近似、また、対称性のない矩形格子は3次近似である。

問題例として、差分法によって同軸円筒電極の電界を解析しその誤差を調べた。その結果をまとめると；

- ・任意形状の10点格子の4次近似差分式、および、6点格子の3次近似差分式によって解析できることを検証。
- ・その計算誤差を比較すると、[4次近似差分法解の誤差] < [有限要素法解の誤差] < [3次近似差分法解の誤差]と云う結果例になった。これは理論的な期待と合致。

差分法で任意形状の格子メッシュを解析できること示した。有限要素法に比べて、差分法の潜在能力は劣っていない。むしろ差分法が優れていると主張したいのである。

(平成11年6月30日受付、平成11年9月10日再受付)

文 献

- (1) G. フォーサイス, W. ワソー: 「偏微分方程式の差分法による近似解法」, 吉岡書店(1968-4)
- (2) 杉山昌平, 「差分方程式入門」, 森北出版(1969-6)
- (3) 中田高義, 高橋則雄: 「電気工学の有限要素法」, 森北出版(1986-4)
- (4) 坪井始, 内藤督: 「数値電磁界解析法の基礎」, 養賢堂(1994-4)
- (5) 中村, 野村, 岩本: 「変圧器洩れ磁界の3次元解析」, 電学論B, 96, 443-450(1976-9)
- (6) T. Nakata (Chief Editor): *Proceedings of the Seventh Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field computation*, Okayama(1996-3)
- (7) 高見頻郎, 河村哲也: 「偏微分方程式の差分法」, 東京大学出版会(1994-6)
- (8) 高橋亮一, 棚町芳弘: 「差分法」, 培風館(1994-12)
- (9) S. ウルフラム: 「Mathematicaブック」, トップラン(1998-6)
- (10) 神谷紀生: 「FORTRANと有限要素法/境界要素法」, サイエンス社(1983-10)

岩本 雅民

(正員) 1937年生。60年東京大学工学部電気工学科卒。60年三菱電機株式会社入社, 90年中央研究所長, 93年取締役。96年香川大学工学部教授。91年電気学会関西支部長, 92年A部門長, 97年A部門代表評議員, 78年進歩賞, 80年論文賞, 工学博士。

岩本 宙造

(非会員) 1967年生。90年山口大学工学部電子工学科卒。95年九州大学大学院工学研究科博士課程修了。九州大学工学部助手を経て, 95年九州芸術工科大学講師。97年広島大学工学部助教授。工学博士。