単層だ円形コイルの自己インダクタンスの計算式

正員 田 中 章 雄 (宇部高専)

正員 武 平 信 夫 (徳山高専)

正員 三 木 俊 克 (山口大)

The Calculation Formula of Self-Inductance of a Single-Layer Elliptic Coil

Akio Tanaka, Member (Ube National College of Technology), Nobuo Takehira, Member (Tokuyama College of Technology), Toshikatsu Miki, Member (Yamaguchi University)

Recently, the use of rhombic coils, parallelogram coils or elliptic coils has been proposed in eddy current sensor or eddy current testing. However, it is generally difficult to analyze the magnetic field produced by these coils. Therefore, there is hardly any report touching the self-inductance which is fundamental characteristics of the coil. In this letter, a single-layer coil has been noticed among the elliptic coils. And the exact calculation formula of the self-inductance has been shown using the same coefficient as Nagaoka's coefficient. In addition, the validity of the calculation formula has been confirmed by comparing measured values with calculated ones.

キーワード：だ円形コイル，自己インダクタンス，単層コイル

1. ま え が き

最近，渦電流センサや渦流探傷の分野において，磁界発生用や検出用のコイル形状として，円形コイルや方形コイル以外のものが提案されている。具体的には，ひし形コイル⁽¹⁾，平行四辺形コイル⁽²⁾，だ円形コイル⁽³⁾などが例として挙げられる。特に，だ円形コイルについては，医療分野においても，MRI システムの傾斜磁界コイルとして検討されている⁽⁴⁾。しかしながら，これらのコイルによる磁界解析は一般に困難で，基本的特性となるコイルの自己インダクタンスについて触れられた報告はほとんどないと言ってよい。そこで著者らは，まず，ひし形コイルを取り上げ，製作上，形を損ねることのない単層巻コイルについて，その自己インダクタンスの厳密な計算式を導出した⁽⁵⁾。また，同時に実験検証を行い，計算式の妥当性も確認した。さて，本レターにおいては，依然として未解決のままであるだ円形コイルに注目し，単層巻コイルの自己インダクタンスの厳密な計算式を導出している。また，計算式は，円形コイルの長岡係数に相当する係数を用いて示されており，その値については，特性図で示されている。さらに，コイルを製作して自己インダクタンスの測定を行い，計算式の妥当性も確認している。

2. 自己インダクタンスの計算式

図1のような巻数 N の単層だ円形コイルの自己インダ

クタンス L は，以下ようになる。

$$L = \frac{\mu_0 \pi a b N^2}{\tau} G \dots \dots \dots (1)$$

ただし， G は長岡係数に相当する係数で，

$$G = 1 - \frac{4ab}{\pi\tau} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_1^2(\sqrt{a^2\xi^2 + b^2\eta^2})}{a^2\xi^2 + b^2\eta^2} \times \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} (1 - e^{-\tau\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}) d\xi d\eta \dots \dots \dots (2)$$

となる。ここに， $J_1(\quad)$ は，ベッセル関数であり， $b=a$ のとき， G は半径 a の円形コイルについての係数となり，

$$G = 1 - \frac{4}{\pi\tau} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_1^2(a\sqrt{\xi^2 + \eta^2})}{\xi^2 + \eta^2} \times \frac{1}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}} (1 - e^{-\tau\sqrt{\xi^2 + \eta^2}}) d\xi d\eta \dots \dots \dots (3)$$

さらに， $\xi = \zeta \cos \phi$ ， $\eta = \zeta \sin \phi$ なる変換を行うと，

$$G = 1 - \frac{2}{\tau} \int_0^\infty \frac{J_1^2(a\zeta)}{\zeta^2} (1 - e^{-\tau\zeta}) d\zeta \dots \dots \dots (4)$$

となり，長岡係数に一致する⁽⁶⁾。

次に，(2)式において， $\xi = p/a$ ， $\eta = q/a$ なる変換を行い， $a \geq b$ として， $x = b/a$ ， $\varepsilon = 2a/\tau$ とおくと，自己インダクタンスの計算式は，改めて以下のように示される。

$$L = \frac{\mu_0 \pi a b N^2}{\tau} G(x, \varepsilon) \dots \dots \dots (5)$$

ここに， $\mu_0 \pi a b N^2 / \tau$ は，無限長の単層だ円形コイルの長さ τ 当たりの自己インダクタンスで，

図1 単層だ円形コイル
Fig. 1. Single-layer elliptic coil.

図2 係数 G の特性
Fig. 2. Characteristics of coefficient G.

$$G(\chi, \varepsilon) = 1 - \frac{2\chi\varepsilon}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{J_1^2(\sqrt{p^2 + \chi^2 q^2})}{p^2 + \chi^2 q^2} \times \frac{1}{\sqrt{p^2 + q^2}} (1 - e^{-(2/\varepsilon)\sqrt{p^2 + q^2}}) dp dq \dots (6)$$

なお、 $\chi=1$ のとき、すなわち、 $G(1, \varepsilon)$ は長岡係数の計算式そのものとなる。

さて、図2は、 $\chi(\leq 1)$ をパラメータとして、(6)式から求めた係数 $G(\chi, \varepsilon)$ の ε に対する特性である。ただし、二重の無限積分については、数値積分法により、収束状況を見ながら計算を行った。図によれば、コイルの長さが無限長から小さくなるに従い (ε については、0 から大きくなるに従い)、 G の値は1から徐々に減少していく。また、 $\chi=1$ の場合の値については、長岡係数の値⁽⁷⁾と小数点以下3けた目まで一致することを確認した。

3. 測定値と計算値の比較

導出した算式 ((5)式および(6)式) の妥当性を検証するために、コイルを製作して LCR メータ (HP 4284 A) による自己インダクタンスの測定を行った。製作した短軸

表 1 だ円形コイルの諸元
Table 1. Specifications of elliptic coils.

コイル I	コイル II
$a = 30.25 \text{ mm}$	$a = 30.25 \text{ mm}$
$b = 21.75 \text{ mm}$	$b = 15.25 \text{ mm}$
$\tau = 9.50 \text{ mm}$	$\tau = 9.50 \text{ mm}$
$N = 16$	$N = 16$

の長さ ($2b$) と長軸の長さ ($2a$) の比が異なる2種類の単層だ円形コイルの諸元は、表1のとおりである。各コイルについて、係数 G を求めて得られた計算値と測定値との比較を下に示す。

(i) コイル I について

$\chi = b/a \approx 0.719$, $\varepsilon = 2a/\tau \approx 6.37$ より、 $G(\chi, \varepsilon) \approx 0.308$ となるから、(5)式より

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 30.25 \times 10^{-3} \times 21.75 \times 10^{-3} \times 16^2 / (9.50 \times 10^{-3}) \times 0.308 \approx 21.56 \mu\text{H} \dots (7)$$

【測定値 21.65 μH : 誤差 1.00%】

(ii) コイル II について

$\chi \approx 0.504$, $\varepsilon \approx 6.37$ より、 $G(\chi, \varepsilon) \approx 0.354$ となり、

$$L = 4\pi \times 10^{-7} \times \pi \times 30.25 \times 10^{-3} \times 15.25 \times 10^{-3} \times 16^2 / (9.50 \times 10^{-3}) \times 0.354 \approx 17.37 \mu\text{H} \dots (8)$$

【測定値 17.43 μH : 誤差 1.00%】

4. む す び

単層だ円形コイルの自己インダクタンスの厳密な計算式を導出し、計算の際に使用する係数の特性値をグラフに示した。また、製作した二つのコイルについて、計算値と測定値を比較した結果、良好な一致が認められ、計算式の妥当性が確認された。

(平成13年7月2日受付)

文 献

- (1) D. Mirshekar-Syahkal & R. F. Mostafavi: "Analysis Technique for Interaction of High-Frequency Rhombic Inducer Field with Cracks in Metals", *IEEE Trans. Magn.*, **33**, 2291~2298 (1997-5)
- (2) 海老根典也・竹内信次郎・荒 克之:「乱れ磁束検出型渦電流探傷法のための探傷プローブ形状の検討」, 電学論 A, **115**, 999~1006 (平7-10)
- (3) 丸田俊樹, 白井巧也, 金丸保典:「渦流探傷法による裏側欠陥の検出について」, 電学会マグネティックス・リニアドライブ合研資, MAG-00-251; LD-00-116 (平12-11)
- (4) Q. Lui, D. G. Hughes & P. S. Allen: "General Expressions for the Magnetic Field and Stored Energy of Elliptic Cylinder Coils", *J. Magn. Reson.*, **B 113**, 222~227 (1996)
- (5) 田中章雄・梶山賢志・松村昌敏・宮川伸秀・武平信夫:「単層ひし形コイルの自己インダクタンスの計算式」, 電学論 A, **120**, 257~258 (平12-2)
- (6) 尾上守夫:「導体に近接した有限長ソレノイドコイルの解析」, 電学誌, **88**, 1894~1902 (昭43-10)
- (7) 山田直平:電気磁気学, p. 268 (昭50) 電気学会