未知周期外乱を考慮した非線形システムに対する 適応出力レギュレーション

非会員 鶴岡 秀展* 正員 大森 浩充*

Adaptive Output Regulation for Nonlinear Systems with Unknown Periodic Disturbances

Hideobu Tsuruoka*, Non-member, Hiromitsu Ohmori*, Member

Many mechanical systems are subjected to periodic disturbances which may adversely influence control performance. When the plants are nonlinear systems with unknown parameters, this disturbance compensation problem has been considered as adaptive output regulation problem.

This paper discusses the problem about adaptive output regulation for nonlinear systems with arbitrary relative degree, which can be transformed into the output feedback form. The nonlinear plant is affected by unknown constant parameters and periodic disturbances with unknown frequencies, magnitudes and phases. The periodic disturbances are considered as signals generated from a linear time invariant exosystem. It is not assumed that the disturbances meet the matching condition for the control input.

The design method of the adaptive controller and its parameter update law is based on adaptive backstepping manner for the coordinates-changed extended system, which is generated from the nonlinear plant and the exosystem. Then, it can be achieved that the output asymptotically converges to the output reference and that all signals in the closed-loop system are bounded.

キーワード：適応制御，非線形制御，出力レギュレーション，外乱除去，バックステッピング

Keywords: adaptive control, nonlinear control, output regulation, disturbance rejection, backstepping

1. はじめに

回転動力系を中心とした多くの機械システムでは，周期的な外乱がシステムに混入することにより制御性能が劣化する，という問題に直面することが少なからず存在する。

線形システムで周波数が既知の外乱除去問題は，内部モデル原理⁽¹⁾に基づいて体系化が成され，広く応用されている。しかしながら，より複雑なシステムに対してより高精度に対処するためには，周期外乱の周波数を未知の場合に拡張することや対象を未知パラメータを含む非線形システムとして扱うことなどが必要である。このような問題は適応出力レギュレーション問題として近年多くの研究^{(2)~(4)}が行われている。

このような研究では，周期外乱を，虚軸上に極を有する線形時不変な自由システム（以下，これを外部システムと呼ぶ）から発生する信号としてモデル化している。Ding⁽²⁾

は，外部システムのパラメータが既知（周期外乱の周波数が既知）の場合における，非線形制御対象に対する適応出力レギュレーション問題を解決しており，制御器の設計には出力フィードバックにより構成されている。一方，外部システムのパラメータが未知（周期外乱の周波数，振幅，位相が全て未知）の場合におけるレギュレーション問題も研究されており，線形の場合には Marino ら⁽³⁾が出力フィードバックによって，非線形の場合には Nikiforov⁽⁴⁾が状態フィードバックによって問題を解決した。そこでは，制御対象の不確かさや制御入力に対する外乱のマッチング条件の緩和を考慮した議論が行われているが，両方の条件を考慮した問題は解析されていない。

本論文では，出力フィードバック形式に変換可能で任意相対次数を有する非線形システムに対する適応出力レギュレーション問題を解決するための構成法を示す。制御対象には未知で一定と推測されるパラメータと周期外乱を含み，制御入力に対する周期外乱のマッチング条件は仮定しない。文献(2)~(4)と同様に周期外乱は外部システムにより生成される信号であり，含まれるパラメータは未知とする。すなわち，周期外乱の周波数，振幅，位相は全て未知とする。

* 慶應義塾大学理工学部

〒223-8522 横浜市港北区日吉 3-14-1

Faculty of Science and Technology, Keio University

3-14-1, Hiyoshi, Kohoku-ku, Yokohama 223-8522

この問題を解決する制御器は、制御対象と外部システムから導出される拡大システムに適応 backstepping 法⁽⁵⁾を用いることにより設計される。

2. 問題設定

本論文では、次の出力フィードバック形式に変換可能な n 次元非線形システムを考える⁽⁶⁾。

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}_{c(n)}\mathbf{x} + \phi_0(y) + \Phi_1(y)\mathbf{a} \\ \quad + b\sigma(y)u + \mathbf{D}\mathbf{w} \\ y = \mathbf{e}_1^T \mathbf{x} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$\mathbf{A}_{c(i)} := \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I}_{i-1} \\ 0 & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{i \times i}, \quad \mathbf{D} := \begin{bmatrix} d_{11} & \dots & d_{1q} \\ \vdots & & \vdots \\ d_{n1} & \dots & d_{nq} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (2)$$

ここで、 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ は状態 (入手不可)、 $y \in \mathbb{R}$ は出力、 $u \in \mathbb{R}$ は制御入力、 $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^p$ は一定な未知パラメータ、 $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ は未知一定行列、 $\mathbf{e}_1$ は単位行列 $\mathbf{I}_n$ の 1 列目である。関数 $\phi_0(y) := [\phi_{01}, \dots, \phi_{0n}]^T$ 、 $\Phi_1(y) := [\phi_{11}^T, \dots, \phi_{1n}^T]^T$ 、 $\sigma(y)$ は全て滑らかで、 $\sigma(y) \neq 0$ とする。また、 $\mathbf{w}$ は周期外乱を生成する外部信号であり、以下の線形時不変な外部システムにより生成されている。

$$\dot{\mathbf{w}} = \mathbf{S}\mathbf{w}, \quad \mathbf{w} \in \mathbb{R}^q \quad \dots\dots\dots (3)$$

この上記システムに対して以下の仮定を設ける。(A1)(3) 式の行列 $\mathbf{S}$ は未知一定だが、固有値は全て虚軸上に存在し重解がない。(A2) 制御対象の相対次数は m 、すなわち $\mathbf{b} = [b_1, \dots, b_n]^T \in \mathbb{R}^n$ において $b_1 = 0, \dots, b_{m-1} = 0, b_m \neq 0$ とする。また、 $b_m, b_{m+1}, \dots, b_n$ は一定な未知パラメータであるが、高周波ゲイン b_m の符号は既知とする。(A3) 制御対象は最小位相系、すなわち多項式 $p_b(s) = b_m s^{n-m} + \dots + b_n$ は Hurwitz 多項式とする。(A4) 規範出力を y_r とすると、 y_r は m 回微分可能で $y_r^{(m)}$ は区分的連続とする。

【注意 1】 $\mathbf{S}$ の特性多項式を (4) 式と仮定すると、仮定 (A1) より一般性を失うことなく $\mathbf{S}$ を (5) 式のように設定できる。

$$p_\alpha(s) = \det(s\mathbf{I} - \mathbf{S}) = s^q - \alpha_{q-1}s^{q-1} - \dots - \alpha_0 \quad \dots\dots\dots (4)$$

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \alpha_{q-1} & & & \\ & \mathbf{I}_{q-1} & & \\ & & \ddots & \\ \alpha_0 & & & \mathbf{0}^T \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで考える問題は、全ての閉ループ系内の信号を有界とし、 $y \rightarrow y_r(t \rightarrow \infty)$ を達成する制御器、パラメータ調整則を設計することである。

3. 拡大システムの設計

問題解決の最初のステップとして、制御対象 (1) と外部

システム (3) 式を用いて拡大システムを設計する。導出結果を以下の補題にまとめる。

【補題 1】 $w_1 = x_{n+1}, \dots, w_q = x_{n+q}$ とする。制御対象

(1) 式と外部システム (3) 式に対して座標変換、

$$\bar{\mathbf{x}}_i := - \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-i} x_j - \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} \{ \alpha_{q-j+1} h_{(i-j)k} \} x_{n+k} \quad (i=1, \dots, n+q) \quad \dots\dots\dots (6)$$

を行うと以下の $n+q$ 次元の拡大システムを得る。

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}_{c(n+q)}\bar{\mathbf{x}} + \bar{\phi}_0(y) + \bar{\Phi}_1(y)\bar{\theta} + \bar{b}\sigma(y)u \\ y = \mathbf{e}_1^T \bar{\mathbf{x}} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ただし、

$\alpha_q = -1, \alpha_j = 0$ (j は $j < 0$ または $q < j$ を満たす整数)

$$\bar{\theta} := [-\alpha_0, \dots, -\alpha_{q-1}, \mathbf{a}^T, -\alpha_0 \mathbf{a}^T, \dots, -\alpha_{q-1} \mathbf{a}^T]^T \in \mathbb{R}^{\ell_1} \quad (\ell_1 := (p+1)(q+1) - 1)$$

$$\bar{\mathbf{b}} := \left[- \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-1} b_j, \dots, - \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-(n+q)} b_j \right]^T$$

であり、 h_{ij} は以下のように逐次的に定義された未知一定有界なパラメータである。

$$h_{11} := d_{11}, \dots, h_{1q} := d_{1q}$$

$$h_{i1} := \begin{cases} \alpha_{q-1} h_{(i-1)1} + \dots + \alpha_0 h_{(i-1)q} + d_{i1} \\ (i=2, \dots, n) \\ \alpha_{q-1} h_{(i-1)1} + \dots + \alpha_0 h_{(i-1)q} \\ (i=n+1, \dots, n+q) \end{cases}$$

$$h_{ij} := \begin{cases} h_{(i-1)(j-1)} + d_{ij} & (i=2, \dots, n) \\ h_{(i-1)(j-1)} & (i=n+1, \dots, n+q) \end{cases} \quad (j=2, \dots, q)$$

(証明) (6) 式を時間微分すると、

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\mathbf{x}}}_i &:= - \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-i} \dot{x}_j - \sum_{k=1}^q \sum_{j=1}^{i-1} \{ \alpha_{q-j+1} h_{(i-j)k} \} \dot{x}_{n+k} \\ &= - \sum_{i=1}^n \alpha_{q+i-j} [x_{i+1} + \phi_{0i}(y) + \phi_{1i}^T(y)\mathbf{a} + b_i \sigma(y)u \\ &\quad + d_{i1}x_{n+1} + \dots + d_{iq}x_{n+q}] \\ &\quad - \sum_{k=1}^q \sum_{i=1}^{j-1} \{ \alpha_{q-i+1} h_{(j-i)k} \} (\alpha_{q-k}x_{n+1} + x_{n+k}) \\ &= \bar{\mathbf{x}}_{i+1} + \alpha_{q-i}y + \phi_{0i}(y) + \phi_{1i}^T(y)\mathbf{a} \\ &\quad - \sum_{j=1, j \neq i}^n [\alpha_{q+j-i} \{ \phi_{0j}(y) + \phi_{1j}^T(y)\mathbf{a} \}] \\ &\quad - \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-i} b_j \sigma(y)u \quad \dots\dots\dots (8) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $x_{n+1} = 0, \bar{x}_{n+q+1} = 0, \phi_{0j}(y) = 0,$

$\phi_{1j}(y) = 0, b_j = 0$ (j は $j > n$ を満たす整数) である。そして、(8) 式をまとめて行列表現すると以下ようになる。

$$\dot{\bar{x}} = A_{c(n+q)}\bar{x} + \bar{\phi}_0(y) + \bar{b}\sigma(y)u$$

$$+ \begin{bmatrix} \alpha_{q-1}y + \phi_{11}^T(y)a \\ -\sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-1} \left\{ \phi_{0j}(y) + \phi_{1j}^T(y)a \right\} \\ \vdots \\ \alpha_{q-(n+q)}y + \phi_{1(n+q)}^T(y)a \\ -\sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-(n+q)} \left\{ \phi_{0j}(y) + \phi_{1j}^T(y)a \right\} \end{bmatrix}$$

..... (9)

ただし、 $\bar{\phi}_0(y) = [\phi_{01}, \dots, \phi_{0n}, 0, \dots, 0]^T \in \mathbb{R}^{n+q}$ である。(9) 式に対して右辺の最後の項に着目すると、「出力 y の滑らかな関数 ($\phi_{01}(y), \phi_{11}(y)$ など)」と未知一定な未知パラメータ (a, α_i , あるいはそれらの積) の積の線形結合で表すことができるので、

$$\begin{bmatrix} \alpha_{q-1}y + \phi_{11}^T(y)a \\ -\sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-1} \left\{ \phi_{0j}(y) + \phi_{1j}^T(y)a \right\} \\ \vdots \\ \alpha_{q-(n+q)}y + \phi_{1(n+q)}^T(y)a \\ -\sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-(n+q)} \left\{ \phi_{0j}(y) + \phi_{1j}^T(y)a \right\} \end{bmatrix} := \bar{\Phi}_1(y)\bar{\theta} \quad (10)$$

と置き換えることができる。したがって、(9), (10) 式より拡大システム (7) 式が導出される。 ■

〔注意 2〕 拡大システム (7) 式のゼロダイナミクスに関して方程式、

$$p_{\bar{b}}(s) = -\sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-1} b_j s^{n+q-1} - \dots - \sum_{j=1}^n \alpha_{q+j-(n+q)} b_j$$

$$= (b_m s^{n-m} + \dots + b_n)(s^q - \alpha_{q-1}s^{q-1} - \dots - \alpha_0)$$

$$= p_b(s)p_a(s) = 0 \quad (11)$$

の解は、仮定 (A2), (A3) と注意 1 より $n-m$ 個は複素平面の左半平面に存在し、 q 個は虚軸上に存在してかつ重解は存在しないことがわかる。

〔注意 3〕 (7) 式の $\bar{b}$ を具体的に表すと、

$$\bar{b} = b_1[1, -\alpha_{q-1}, \dots, -\alpha_0, 0, \dots, 0]^T$$

$$+ b_2[0, 1, -\alpha_{q-1}, \dots, -\alpha_0, 0, \dots, 0]^T$$

$$+ \dots + b_n[0, \dots, 0, 1, -\alpha_{q-1}, \dots, -\alpha_0]^T$$

..... (12)

となるが、仮定 (A2) より制御対象 (1) 式の相対次数は m としているので、 $b_1 = 0, \dots, b_{m-1} = 0, b_m \neq 0$ となる。よって、 $\bar{b}$ は以下のように書き表される。

$$\bar{b} = \begin{bmatrix} 0_{(m-1) \times 1}^T & \bar{b}'^T \end{bmatrix}^T \quad (13)$$

ただし、 $\bar{b}' \in \mathbb{R}^{\ell_2}$ ($\ell_2 := n+q-m+1$) であり、 $\bar{b}'$ の 1 番目の要素は b_m となる。これは、拡大システム (7) 式の相対次数が元の制御対象 (1) 式の相対次数と一致することを示している。

4. 制御設計

ここでは、導出した拡大システム (7) 式に適応 backstepping 法⁽⁵⁾を用いることにより制御器、パラメータ調整則を設計する。

〈4・1〉 状態推定器の設計 拡大システム (7) 式で入手可能な信号は出力 $y = \bar{x}_1$ であり、状態 $\bar{x}$ は入手不可能なので、K-filter⁽⁶⁾を用いて状態推定器を設計する。

まず、(7) 式を (14) 式のように書き直す。

$$\dot{\bar{x}} = A_{c(n+q)}\bar{x} + \bar{\phi}_0(y) + F^T(y, u)\theta \quad (14)$$

$$\theta := [\bar{b}'^T, \bar{\theta}^T]^T \in \mathbb{R}^{\ell_2 + \ell_1}$$

$$F^T(y, u) := \begin{bmatrix} 0_{(m-1) \times (\ell_2)} \\ I_{\ell_2} \end{bmatrix} \sigma(y)u, \quad \bar{\Phi}_1(y)$$

(14) 式に K-filter を用いて指数的に減少する推定誤差 $\epsilon := \bar{x} - \hat{x}$ を作るように状態推定を行う。状態推定器を以下のように設計する。

$$\dot{\hat{x}} = \xi + \Omega^T \theta \quad (15)$$

また、 $\hat{x}$ を生成する 2 つの信号 ξ, Ω^T は以下のように設計する。

$$\dot{\xi} = A_0 \xi + k y + \bar{\phi}_0(y) \quad (16)$$

$$\dot{\Omega}^T = A_0 \Omega^T + F^T(y, u) \quad (17)$$

$$\begin{cases} \Omega^T = [v_m, \dots, v_{n+q}, \Xi] \\ \dot{\Xi} = A_0 \Xi + \bar{\Phi}_1(y) \\ \dot{\lambda} = A_0 \lambda + e_{n+q} \sigma(y)u \\ v_j = A_0^{n+q-j} \lambda, \quad (j = m, \dots, n+q) \end{cases} \quad (18)$$

ここで、 e_{n+q} は単位行列 I_{n+q} の $n+q$ 番目の列であり、 $k := [k_1, \dots, k_{n+q}]^T$ は $A_0 = A_{c(n+q)} - k e_1^T$ を安定行列にするように設計する。(14) 式~(18) 式より、推定誤差 ϵ に関する次の補題が導出される。

〔補題 2〕 θ が既知の時、(14) 式~(18) 式より推定誤差 ϵ は以下の微分方程式を満たし、指数的減少する信号となる。

$$\dot{\epsilon} = A_0 \epsilon \quad (19)$$

(証明) $\dot{\epsilon} = \dot{\bar{x}} - \dot{\hat{x}}$ に (14), (16), (17) 式を代入することで (19) 式が容易に導出できる。 ■

〔注意 4〕 状態推定器 (15) 式において、 $\hat{x}$ を生成するには未知パラメータ θ が必要なので制御器に $\hat{x}$ を導入することはできない。しかし、(16), (17) 式の ξ, Ω^T は発生可能なので、後で設計する制御器とパラメータ調整則には ξ, Ω^T を導入することになる。

〈4・2〉 制御器・パラメータ調整則の設計 K-filter より設計された状態推定器と適応 backstepping 法⁽⁵⁾を用いて制御器・パラメータ調整則を設計する。まず最初に誤差変数 z_i を次のように定義する。

$$\begin{cases} z_1 = y - y_r \\ z_i = v_{m,i} - \hat{\rho} y_r^{(i-1)} - \beta_{i-1}, \quad (i = 2, \dots, m) \\ z_{m+1} = 0 \end{cases} \dots\dots\dots (20)$$

ここで、 $\hat{\rho}$ は高周波ゲインの逆数 $\rho = 1/b_m$ の推定値、 β_{i-1} は安定化関数、 $v_{m,i}$ はベクトル $\mathbf{v}_m$ の i 番目の要素を意味する。 z_1 を微分して状態推定器 (15) 式～(18) 式を用いると、

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= \dot{x}_1 - \dot{y}_r \\ &= \xi_2 + \Omega_{(2)}^T \theta + \epsilon_2 + \bar{\phi}_{0,1} + \bar{\Phi}_{1(1)} \bar{\theta} - \dot{y}_r \\ &= \omega_0 + \omega^T \theta + \epsilon_2 - \dot{y}_r \\ &= b_m v_{m,2} + \omega_0 + \bar{\omega}^T \theta + \epsilon_2 - \dot{y}_r \dots\dots\dots (21) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\omega_0 = \xi_2 + \bar{\phi}_{0,1}$ 、 $\omega = [v_{m,2}, \dots, v_{n+q,2}, \bar{\Phi}_{1(1)} + \Xi_{(2)}]^T$ 、 $\bar{\omega} = [0, v_{m+1,2}, \dots, v_{n+q,2}, \bar{\Phi}_{1(1)} + \Xi_{(2)}]^T$ 、 $b_m = \theta_1$ であり、 $\bar{\phi}_{0,i}$ はベクトル $\bar{\phi}_0$ の i 番目の要素、下付きのスクリプト (i) は行列の i 番目の行ベクトルを意味する。(21) 式は $v_{m,2}$ が仮想的な入力となるので、安定化関数 β_1 を以下のように設計する。

$$\beta_1 = \hat{\rho} \bar{\beta}_1, \quad \bar{\beta}_1 = -c_1 z_1 - d_1 \dot{z}_1 - \omega_0 - \bar{\omega}^T \bar{\theta} \dots (22)$$

ただし、設計パラメータ $c_1 > 0$ 、 $d_1 > 0$ である。(20) 式～(22) 式より、

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -c_1 z_1 - d_1 \dot{z}_1 + \epsilon_2 + \bar{\omega}^T \bar{\theta} - b_m (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) \bar{\rho} + b_m z_2 \\ (\bar{\theta} &:= \theta - \hat{\theta}, \quad \bar{\rho} := \rho - \hat{\rho}) \end{aligned} \dots\dots\dots (23)$$

となる。ここで、(20)、(22) 式より、

$$\begin{aligned} \bar{\omega}^T \bar{\theta} + b_m z_2 &= \bar{\omega}^T \bar{\theta} + \tilde{b}_m z_2 + \hat{b}_m z_2 \quad (\tilde{b}_m := b_m - \hat{b}_m) \\ &= \bar{\omega}^T \bar{\theta} + (v_{m,2} - \hat{\rho} \dot{y}_r - \beta_1) e_1^T \bar{\theta} + \hat{b}_m z_2 \\ &= \bar{\omega}^T \bar{\theta} - \hat{\rho} (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) e_1^T \bar{\theta} + \hat{b}_m z_2 \\ &= [\omega - \hat{\rho} (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) e_1]^T \bar{\theta} + \hat{b}_m z_2 \dots\dots\dots (24) \end{aligned}$$

となるので、(23) 式は

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= -c_1 z_1 - d_1 \dot{z}_1 + \epsilon_2 + [\omega - \hat{\rho} (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) e_1]^T \bar{\theta} \\ &\quad - b_m (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) \bar{\rho} + \hat{b}_m z_2 \dots\dots\dots (25) \end{aligned}$$

となる。この (25) 式に基づいて最初の調整関数 π_1 と ρ に関するパラメータ調整則を以下のように設計する。

$$\pi_1 = [\omega - \hat{\rho} (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) e_1] z_1 \dots\dots\dots (26)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma \text{sgn}(b_m) (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) z_1 \dots\dots\dots (27)$$

ただし、 $\gamma > 0$ は適応ゲインである。残りの安定化関数 $\beta_2, \dots, \beta_m$ は一般的な適応 backstepping 法⁽⁶⁾と同様に逐次的方法で以下のように設計できる。

$$\begin{aligned} \beta_2 &= -\hat{b}_m z_1 - c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right)^2 z_2 + k_2 v_{m,1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial X_1} \dot{X}_1 \\ &\quad + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} (\omega_0 + \omega^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \beta_1}{\partial \hat{\rho}} \Gamma \pi_2 + \left(\dot{y}_r + \frac{\partial \beta_1}{\partial \hat{\rho}} \right) \hat{\rho} \end{aligned} \dots\dots\dots (28)$$

$$\begin{aligned} \beta_i &= -z_{i-1} - c_i z_i - d_i \left(\frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \right)^2 z_2 + k_i v_{m,1} \\ &\quad + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial X_{i-1}} \dot{X}_{i-1} + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} (\omega_0 + \omega^T \hat{\theta}) + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \pi_i \\ &\quad + \left(y_r^{(i-1)} + \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial \hat{\rho}} \right) \hat{\rho} - \sum_{j=2}^{i-1} \frac{\partial \beta_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \omega z_j \end{aligned} \dots\dots\dots (29)$$

ここで、 $i = 3, \dots, m$ 、 $c_i > 0$ 、 $d_i > 0$ 、 $\Gamma = \Gamma^T > 0$ 、 $\bar{\lambda}_i = [\lambda_1, \dots, \lambda_{n+q-m+i}]^T$ 、 $\bar{y}_i = [y_r, \dots, y_r^{(i-1)}]^T$ 、 $X_i = [\xi^T, \text{vec}(\Xi)^T, \bar{\lambda}_i^T, \bar{y}_i^T]^T$ である。また、調整関数 π_i は逐次的手順で (30) 式のように設計される。

$$\pi_i = \pi_{i-1} - \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \omega z_i, \quad (i = 2, \dots, m) \dots\dots (30)$$

最後に制御入力と θ に関するパラメータ調整則は以下のように設計される。

$$u = \frac{1}{\sigma(y)} \left[\beta_m - v_{m,m+1} + \hat{\rho} y_r^{(m)} \right] \dots\dots\dots (31)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \pi_m \dots\dots\dots (32)$$

以上より本論文の主要結果を定理として示す。

【定理 1】 制御対象 (1) 式と外部システム (3) 式に対して、制御器 (31) 式とパラメータ調整則 (27)、(32) 式を用いると、閉ループ系内の全ての信号が有界となり、 $z_1 = y - y_r \rightarrow 0 (t \rightarrow \infty)$ が達成される。

(証明) (28)、(29) 式の安定化関数 β_i より、誤差変数 $z_i (i = 2, \dots, m)$ の微分方程式は以下のように表される。

$$\begin{aligned} \dot{z}_2 &= -c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right)^2 z_2 - \hat{b}_m z_1 + z_3 - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \epsilon_2 \\ &\quad - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \omega^T \bar{\theta} + \sum_{j=3}^m \sigma_{2,j} z_j \dots\dots\dots (33) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{z}_i &= -c_i z_i - d_i \left(\frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \right)^2 z_i - z_{i-1} + z_{i+1} - \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \epsilon_2 \\ &\quad - \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \omega^T \bar{\theta} + \sum_{j=i+1}^m \sigma_{i,j} z_j - \sum_{j=2}^{i-1} \sigma_{j,i} z_j \dots\dots\dots (34) \\ &\quad \left(i = 3, \dots, m, \sigma_{j,i} := \frac{\partial \beta_{j-1}}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \omega \right) \end{aligned}$$

リアプノフ関数の候補として以下の式を設定する。

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m z_i^2 + \frac{1}{2} \bar{\theta}^T \Gamma^{-1} \bar{\theta} + \frac{|b_m|}{2\gamma} \bar{\rho}^2 + \sum_{i=1}^m \frac{1}{4d_i} \epsilon^T P \epsilon \dots\dots\dots (35)$$

ただし、行列 P はリアプノフ方程式 $PA_0 + A_0^T P = -I$ (A_0 は安定行列) を満たす正定関数である。(35) 式を時間微分して、(25) 式～(27) 式、(30) 式～(34) 式を用いると、

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^m \left[c_i + d_i \left(\frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \right)^2 \right] z_i^2 - \sum_{i=1}^m z_i \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \epsilon_2 - \sum_{i=1}^m \frac{1}{4d_i} \|\epsilon\|^2, \left(\frac{\partial \beta_0}{\partial y} := -1 \right) \dots \dots \dots (36)$$

となる。平方完成より、

$$\left| z_i \frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \epsilon_2 \right| \leq \frac{1}{4d_i} \epsilon_2^2 + d_i \left(\frac{\partial \beta_{i-1}}{\partial y} \right)^2 z_i^2 \dots \dots (37)$$

となるので (36) 式は

$$\dot{V} = - \sum_{i=1}^m c_i z_i^2 \leq 0 \dots \dots \dots (38)$$

となり、 V の有界性が証明される。 V の有界性から (35) 式より $z_i (i=1, \dots, m)$, $\hat{\theta}$, $\hat{\rho}$, ϵ は有界となり、 $\hat{\theta} = \theta - \hat{\theta}$, $\hat{\rho} = \rho - \hat{\rho}$, $z_1 = y - y_r$ から $\hat{\theta}$, $\hat{\rho}$, y の有界性が証明される。また、行列 A_0 は安定行列なので y の有界性と (16), (18) 式より ξ , Ξ が有界となる。さらに、 $\lambda_j (j=1, \dots, n+q)$ に関して (18) 式から、

$$\lambda_j = \frac{s^{j-1} + k_1 s^{j-2} + \dots + k_{j-1}}{K(s)} [\sigma(y)u] \dots \dots (39)$$

となる。ただし、 $K(s) = s^{n+q} + k_1 s^{n+q-1} + \dots + k_{n+q}$ である。一方、元の制御対象 (1) 式は

$$\begin{aligned} \frac{d^n y}{dt^n} - \sum_{i=1}^n \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} \{ \phi_{0,i}(y) + \Phi_{1(i)}(y) a + D_{(i)} w \} \\ = \sum_{i=0}^{n-m} b_{m+i} \frac{d^{(n-m)-i}}{dt^{(n-m)-i}} [\sigma(y)u] \dots \dots \dots (40) \end{aligned}$$

となり、(39), (40) 式より

$$\begin{aligned} \lambda_j = \frac{s^{j-1} + k_1 s^{j-2} + \dots + k_{j-1}}{K(s)p_b(s)} \\ \times \left[\frac{d^n y}{dt^n} - \sum_{i=1}^n \frac{d^{n-i}}{dt^{n-i}} \{ \phi_{0,i}(y) + \Phi_{1(i)}(y) a + D_{(i)} w \} \right] \dots \dots \dots (41) \\ (p_b(s) = b_m s^{n-m} + \dots + b_n) \end{aligned}$$

となる。(16) 式より $K(s)$ が Hurwitz 多項式であること、 y が有界であること、 $\phi_{0,i}(y)$, $\Phi_{1,i}(y)$ が滑らかな関数であること、 w は周期外乱であり有界かつ滑らかであること、および仮定 (A3) より $p_b(s)$ が Hurwitz 多項式であることから $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+q-m+1}$ は有界となる。よって、(20), (28), (29) 式より λ , (15), (18) 式より拡大システムの状態 $\bar{x}$, (31) 式より u が有界となり、(6) 式より制御対象の状態 x の有界性が証明される。以上より閉ループ系内の全ての信号が有界となる。

最後に (38) 式に invariant set theorem を応用すると $\lim_{t \rightarrow \infty} z_i = 0$ となり、制御目的である $\lim_{t \rightarrow \infty} (y - y_r) = 0$ が証明される⁽⁵⁾。 ■

図 1 偏心補償の例

Fig. 1. Example of eccentricity compensation.

〔注意 5〕 本論文では高周波ゲイン b_m の符号を既知として解析したが、未知の場合でも Nussbaum ゲインを導入することで問題を解決することができる⁽²⁾⁽⁶⁾。

5. 数値例

本手法の有効性を示すため、簡単な数値例を試みる。制御対象は振動学で有名な Duffing 方程式 (42) 式を取り上げる。

$$M\ddot{y} + C\dot{y} + (K_1 y + K_2 y^3) = u + F \sin(\mu t) \dots (42)$$

Duffing 方程式は非線形ばねを持つ 1 自由度のマス・バネ・ダンパシステムにおいて、周期的外力による強制振動を表した方程式である。この方程式で表される実システムとしては偏心補償⁽⁷⁾がある。例えば図 1 のように、回転部分に不釣り合い量 (回転部分の質量 m_u , 重心の偏心量 e) を持つ回転機械が、水平方向の運動は拘束されて鉛直方向に非線形ばねとダンパにより支えられているシステムの振動抑制問題である。数値例では、入手可能な信号は回転機械の質量の変位 y のみとし、質量 $M > 0$, ダンパ定数 $C > 0$, ばね定数 $K_1 > 0$, K_2 および $F > 0$, $\mu > 0$ は未知一定とする。

最初に座標変換

$$x_1 := y, \quad x_2 := \dot{y} + \frac{C}{M} y = \dot{x}_1 + \frac{C}{M} x_1 \dots \dots (43)$$

を行い、周期外乱 $\sin(\mu t)$ を (3) 式のように表現すると、本論文で対象としている出力フィードバック形式の制御対象 P と外部システム W が以下のように導出される。

$$P: \begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 - a_1 y \\ \dot{x}_2 = -a_2 y - a_3 y^3 + b_2 u + dw_1 \\ y = x_1 \end{cases} \dots \dots \dots (44)$$

$$\left(a_1 := \frac{C}{M}, a_2 := \frac{K_1}{M}, a_3 := \frac{K_2}{M}, b_2 := \frac{1}{M}, d := \frac{F}{M} \right)$$

$$W: \begin{cases} \sin(\mu t) = w_1, \dot{w}_1 = w_2, \dot{w}_2 = -\mu^2 w_1 & \dots (45) \\ (w_1(0) = 0, w_2(0) = \mu) \end{cases}$$

外部システムの状態を $w_1 := x_3, w_2 := x_4$ として座標変換

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = x_1, \bar{x}_2 = x_2 \\ \bar{x}_3 = \mu^2 x_1 + dx_3, \bar{x}_4 = \mu^2 x_2 + dx_4 & \dots (46) \end{cases}$$

を行うと次の拡大システムが導出される。

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}} = A_{c(4)} \bar{x} + F^T(y, u) \theta \\ y = \bar{x}_1 & \dots (47) \end{cases}$$

$$F^T(y, u) = \begin{bmatrix} 0_{1 \times 3} \\ I_3 \end{bmatrix} u, \bar{\Phi}_1(y) = \begin{bmatrix} \bar{b}' \\ \bar{\theta} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{10}$$

$$\bar{\Phi}_1(y) = \begin{bmatrix} 0 & -y & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -y & 0 & -y & -y^3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -y & -y^3 \end{bmatrix}$$

$$\bar{b}' = [b_2, 0, \mu^2 b_2]^T$$

$$\bar{\theta} = [\mu^2, a_1, a_2, a_3, \mu^2 a_1, \mu^2 a_2, \mu^2 a_3]^T$$

今回提案した手法で解析すると制御器, パラメータ調整則, 安定化関数などは以下のように設計できる。

○ K-filter

$$\begin{cases} \dot{\xi} = A_0 \xi + k y \in \mathbb{R}^4 \\ \dot{\Omega}^T = A_0 \Omega^T + F^T(y, u) \in \mathbb{R}^{4 \times 10} & \dots (48) \end{cases}$$

○ 誤差変数

$$z_1 = y - y_r, z_2 = v_{2,2} - \hat{\rho} \dot{y}_r - \beta_1 \dots (49)$$

○ 安定化関数

$$\beta_1 = \hat{\rho} \bar{\beta}_1, \bar{\beta}_1 = -c_1 z_1 - d_1 z_1 - \xi_2 - \omega^T \hat{\theta} \dots (50)$$

$$\begin{aligned} \beta_2 = & -\hat{b}_2 z_1 - c_2 z_2 - d_2 \left(\frac{\partial \beta_1}{\partial y} \right)^2 z_2 + k_2 v_{2,1} + \frac{\partial \beta_1}{\partial X_1} \dot{X}_1 \\ & + \frac{\partial \beta_1}{\partial y} (\xi_2 + \omega^T \hat{\theta}) + \left(\dot{y}_r + \frac{\partial \beta_1}{\partial \rho} \right) \dot{\rho} + \frac{\partial \beta_1}{\partial \hat{\theta}} \Gamma \pi_2 \dots (51) \end{aligned}$$

○ パラメータ調整則, 制御入力

$$\dot{\hat{\theta}} = \Gamma \left[\{ \omega - \hat{\rho} (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) e_1 \} z_1 - \frac{\partial \beta_1}{\partial y} \omega z_2 \right] \dots (52)$$

$$\dot{\hat{\rho}} = -\gamma \text{sgn}(b_2) (\dot{y}_r + \bar{\beta}_1) z_1 \dots (53)$$

$$u = \beta_2 - v_{2,3} + \hat{\rho} \ddot{y}_r \dots (54)$$

ここで, 未知パラメータを $M = 1, C = 2, K_1 = 1, K_2 = -1$ とし, 周期外乱の周波数 μ は

$$\mu = \begin{cases} 0.5 & (0 \leq t < 200) \\ 1 & (200 \leq t) \end{cases} \dots (55)$$

のように時刻 200 [sec] で変動させるようにした。また, 設

図2 出力誤差 z_1 (上) と制御入力 u (下) のシミュレーション結果

Fig. 2. Simulation results for the output error z_1 (Top) and the control input u (Bottom).

図3 パラメータ推定値 $\hat{\theta}, \hat{\rho}$ のシミュレーション結果

Fig. 3. Simulation results for the parameter estimates $\hat{\theta}, \hat{\rho}$.

計パラメータを $c_1 = c_2 = d_1 = d_2 = 1$, $k = [4, 6, 4, 1]^T$, $\Gamma = I_{10}$, $\gamma = 5$, 初期条件を $y(0) = 1$, $\dot{y}(0) = 0$, $\xi(0) = 0$, $\Omega(0) = 0$, $\hat{\theta}(0) = [1, \dots, 1]^T$, $\hat{\rho}(0) = 1$, 規範出力を $y_r = 0.3$ とした。図 2 に出力誤差 z_1 と制御入力 u のシミュレーション結果を示す。図 2 より未知周期外乱が混入する非線形システムに対して本手法を用いると z_1 が漸近的に零に収束し、また周期外乱の周波数が変動してもその変動を適応的に補償することで再度 z_1 が漸近的に零に収束しており、有界な制御入力で適応出力レギュレーションが達成されていることが確認できる。また、図 3 にパラメータ推定値 $\hat{\theta}, \hat{\rho}$ のシミュレーション結果を示す。図 3 より周期外乱の周波数変動をパラメータ調整則によって適応的に補償していることが確認できる。また、計算により未知パラメータの真値は

$$\rho = 1$$

$$\theta = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1, 0, 1/4, 1/4, 2, 1, -1, 1/2, 1/4, -1/4 \end{bmatrix}^T & (0 \leq t < 200) \\ \begin{bmatrix} 1, 0, 1, 1, 2, 1, -1, 2, 1, -1 \end{bmatrix}^T & (200 \leq t) \end{cases}$$

となるので、推定値は有界な値に収束しているが真値には収束しているわけではない。これはパラメータ調整則 (52), (53) 式のレギュレサベクトルに相当する信号が PE 条件を満たしていないことが原因と考えられる。

6. まとめ

本論文では、出力フィードバック形式に変換可能な任意相対次数を有する非線形システムに対して、適応出力レギュレーション問題を解決する動的制御器、パラメータ調整則を設計した。制御対象には未知一定な未知パラメータの他に周波数・位相・振幅が未知の周期外乱によって影響されるが、周期外乱を線形時不変な外部システムにより生成される信号とみなし、制御対象と外部システムから導出される拡大システムに適応 backstepping 法を用いることで問題を解決した。従来の手法では制御対象の不確かさと外乱のマッチング条件の両方を考慮していなかったが、本手法では両方の条件を考慮した問題解決を行った。また、本手

法の有効性を数値例を通して確認した。

(平成 14 年 9 月 25 日受付, 平成 15 年 2 月 24 日再受付)

文 献

- (1) E.J. Davidson: "The robust control of a servomechanism problem for linear time invariant multivariable systems", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.21, No.1, pp.25-34 (1976)
- (2) Z. Ding: "Global Output Regulation with Minimum Information of Uncertain Nonlinear Systems Subject to Exogenous Signals", *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, pp.1309-1314 (2000-12)
- (3) R. Marino and P. Tomei: "Global Adaptive Compensation of Noises with Unknown Frequency", *Proc. of the 39th IEEE Conference on Decision and Control*, Sydney, Australia, pp.4926-4927 (2000-12)
- (4) V.O. Nikiforov: "Adaptive Non-linear Tracking with Complete Compensation of Unknown Disturbances", *European Journal of Control*, Vol.4, No.2, pp.132-139 (1998)
- (5) N. Krstic, I. Kanellakopoulos, and P. Kokotovic: *Nonlinear and Adaptive Control Design*, pp.327-347, pp.521-540, John Wiley, New York (1995)
- (6) Ye Xudong: "Adaptive Nonlinear Output-Feedback Control with Unknown High-Frequency Gain Sign", *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol.46, No.1, pp.112-115 (2001)
- (7) 北郷 薫・露木洋二: 振動学, pp.28-31, pp.177-181, 森北出版 (1974)

鶴岡 秀 展 (非会員) 1978 年生。2001 年 3 月 慶應義塾大学理工学部システムデザイン工学科卒業。同年 4 月同大学大学院理工学研究科総合デザイン工学専攻修士課程入学。現在、主として適応制御理論に関する研究に従事。

大 森 浩 充 (正員) 1960 年生。1988 年 3 月 慶應義塾大学大学院博士課程修了 (工学博士)。同年慶應義塾大学理工学部助手。2003 年より同教授。適応制御理論, H_∞ 制御理論とその応用に関する研究に従事。計測自動制御学会, システム制御情報学会, 電子情報通信学会, IEEE などの会員。